

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ESCOLA DE CAMINS CANALS I PORTS



Modelado de Multifractura Discreta en Materiales Quasi-Frágiles

Tesis Doctoral

Presentada por:

Nelson M. LAFONTAINE

Dirigida por:

Dr. Eugenio OÑATE

Dr. Riccardo ROSSI

Dr. Chen PU

Barcelona, España
13 de noviembre de 2015

Nelson Lafontaine

13 de noviembre de 2015



Acta de qualificació de tesi doctoral

Curs acadèmic: 2015-2016

Nom i cognoms
NELSON MAIRENI LAFONTAINE MATOS

Programa de doctorat
ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Unitat estructural responsable del programa
Prof. MIGUEL CERVERA RUIZ

Resolució del Tribunal

Reunit el Tribunal designat a l'efecte, el doctorand / la doctoranda exposa el tema de la seva tesi doctoral titulada

Acabada la lectura i després de donar resposta a les qüestions formulades pels membres titulars del tribunal, aquest atorga la qualificació:

☐ NO APTE

☐ APROVAT

☐ NOTABLE

☐ EXCEL·LENT

(Nom, cognoms i signatura)		(Nom, cognoms i signatura)	
President/a		Secretari/ària	
(Nom, cognoms i signatura)	(Nom, cognoms i signatura)	(Nom, cognoms i signatura)	(Nom, cognoms i signatura)
Vocal	Vocal	Vocal	Vocal

_____, _____ d'/de _____ de _____

El resultat de l'escrutini dels vots emesos pels membres titulars del tribunal, efectuat per l'Escola de Doctorat, a instància de la Comissió de Doctorat de la UPC, atorga la MENCIÓ CUM LAUDE:

☐ SÍ

☐ NO

(Nom, cognoms i signatura)	(Nom, cognoms i signatura)
President de la Comissió Permanent de l'Escola de Doctorat	Secretari de la Comissió Permanent de l'Escola de Doctorat

Barcelona, _____ d'/de _____ de _____

Diligència "Internacional del títol de doctor o doctora"

- Com a secretari/ària del tribunal faig constar que la tesi s'ha defensat en part, i com a mínim pel que fa al resum i les conclusions, en una de les llengües habituals per a la comunicació científica en el seu camp de coneixement i diferent de les que són oficials a Espanya. Aquesta norma no s'aplica si l'estada, els informes i els experts provenen d'un país de parla hispana.

(Nom, cognoms i signatura)

Secretari/ària del Tribunal

Aquesta tesi va ser llegida el dia.....
a l'Escola Tècnica Superior d' Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona,
i va obtenir la qualifucació de

El President

El Secretari

El Vocal

El Vocal

El Vocal

Índice general

1. Introducción	29
1.1. Introducción	29
1.1.1. Motivación: Por qué simular la fractura discreta	32
1.1.1.1. Objetivos generales	32
1.1.1.2. Objetivos específicos	32
1.1.2. Contenido de la tesis	33
2. Estado del arte de simulación de la fractura	35
2.1. Estado del Arte	35
2.1.1. Introducción	35
2.1.2. Antecedentes	36
2.1.3. Modelo Fractura Distribuida	44
2.1.4. Modelo de Fractura Discreta	50
2.1.5. Modelo de Fisura Distribuida vs Modelo de Fisura Discreta	57
2.1.6. Otros Modelos de Fractura	59
2.1.7. Algoritmos de Rastreo	60
2.1.8. Criterios de Fractura	61
2.1.9. Conclusiones	62
3. Solución explícita y problemas de interacción de superficies	65
3.1. Integración explícita de la ecuación del movimiento	65
3.1.1. Introducción	65
3.1.2. Método de diferencias centrales	67
3.1.3. Diagonalización de las matrices M y D	69
3.1.4. Desacoplamiento de las ecuaciones de equilibrio	70

3.1.5. Estabilidad del esquema de diferencias centrales	71
3.1.6. Amortiguamiento numérico	74
3.2. Mecánica del contacto	76
3.2.1. Introducción	76
3.2.2. Descripción del problema de contacto. Definiciones generales	77
3.2.3. Contacto normal y contacto tangencial	79
3.2.3.1. Contacto normal	79
3.2.3.2. Contacto tangencial	81
3.2.4. Solución Explícita de la Mecánica del Contacto	81
3.2.4.1. Método de los multiplicadores de Lagrange	82
3.2.4.2. Sistema acoplado de ecuaciones. Método de multiplicadores de Lagrange con incremento hacia adelante	83
3.2.5. Método de la función de penalización	86
3.2.5.1. Discretización de la fuerza de contacto en 2D	89
3.2.5.2. Discretización de los campos potenciales en 2D	90
3.2.6. Integración de la ecuación del movimiento incluyendo contacto	93
3.3. Búsqueda espacial de contactos	94
3.3.1. Introducción	94
3.3.2. Algoritmo <i>NBS</i> basado en Objetos	95
3.3.3. Descomposición espacial	96
3.3.4. Asignación de los objetos a las celdas	99
3.3.5. Detección de contactos	101
3.3.6. Algoritmos de detección de colisión	103
3.3.7. Ventajas y desventajas del método	104
3.3.8. Búsqueda local	104
3.4. Ejemplos numéricos	105
3.4.1. Problema de impactos	105
3.4.1.1. Impacto de una barra con una pared rígida	106
3.4.2. Comprobación del Patch Test	111
3.4.3. Contacto de una barra flexible consigo misma	113
3.4.4. Contacto De Hertz en 3D	115
3.4.5. Contactos Múltiples en 3D. Colisión entre tetraedros.	117
3.5. Conclusión y discusión	122
4. Tratamiento de los materiales quasi-frágiles basado en la teoría de plasticidad	123
4.1. Introducción	123
4.2. Modelo de daño plástico. Ingredientes fundamentales.	124

4.3. Variables fundamentales del modelo de daño plástico	127
4.3.1. Definición de la variable de daño plástico: κ^p	127
4.3.2. Ley de evolución de la cohesión: c	128
4.3.3. Definición de la resistencia a tracción: f_t	129
4.3.4. Definición del ángulos de fricción y dilatancia: ϕ y ψ	129
4.4. Dominio elástico. Superficie de fluencia	131
4.4.1. Modelo de Mohr Coulomb y Modelo Rankine	131
4.4.2. Modelo combinado de Mohr Coulomb (MC) y Rankine. Modelo de Mohr-Coulomb mo- dificado (MCM)	133
4.4.2.1. Regla de flujo	134
4.5. Integración numérica del modelo constitutivo de daño plástico	135
4.5.1. Esquema de integración implícita backward-Euler.	136
4.5.1.1. Método implícito backward-Euler.	136
4.5.1.2. Integración implícita del modelo de daño plástico.	137
4.6. Algoritmo de retorno	137
4.6.1. Generalidades	137
4.6.2. Algoritmo de retorno en el espacio de tensiones principales	138
4.7. Aplicación del algoritmo de retorno en tensiones principales al modelo modificado de Mohr- Coulomb	141
4.7.1. Algoritmo de retorno en el modelo de MC-Modificado	141
4.7.2. Flujos plásticos en la parte comprimida	142
4.7.2.1. Caso I. Flujo plástico en el plano principal	142
4.7.2.2. Caso II. Flujo plástico en el borde derecho	144
4.7.2.3. Caso III. Flujo plástico en el borde izquierdo	145
4.7.2.4. Caso IV. Flujo plástico en el ápice	145
4.7.3. Flujos plásticos en la parte traccionada. Modelo de Rankine	146
4.7.3.1. Flujo plástico en el plano de tracción σ_1	146
4.7.3.2. Flujo plástico en dos planos de tracción σ_1 y σ_2	147
4.7.3.3. Flujo plástico en tres planos de tracción σ_1 , σ_2 y σ_3	147
4.7.4. Modelo combinado de MC para estados tensionales ubicados en la intersección de la superficie de MC y Rankine	148
4.7.4.1. Modelo combinado de MC para estados tensionales ubicados en la intersección de la superficie principal de MC y plano σ_1 Rankine	148
4.7.4.2. Flujo plástico en la intersección de plano principal y borde derecho de MC junto con plano de tracción σ_1 Rankine	149
4.7.4.3. Flujo plástico en la intersección de plano principal y borde izquierdo de MC junto con plano de tracción σ_1 y σ_2 Rankine	149

4.8. Estrategia para seleccionar los retornos	149
4.8.1. Selección del retorno en borde derecho o izquierdo en MC	151
4.9. Conclusión y discusión	153
5. Modelado discreto de la fractura. Ingredientes fundamentales	155
5.1. Introducción	155
5.2. Algoritmo de Refinamiento Local Adaptativo (ARLA)	157
5.2.1. Introducción	157
5.2.2. Algoritmo de división global	160
5.2.3. División de elementos simpliciales	163
5.3. Modelado discreto-geométrico de la fractura	167
5.3.1. Del continuo a lo discreto.	167
5.4. Formulación mixta en un esquema explícito	173
5.4.1. Introducción	173
5.4.2. Formulación mixta en desplazamiento-deformación ($\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}$)	174
5.4.2.1. Planteamiento continuo del problema. Generalidades	174
5.4.2.2. Discretización espacial y temporal	175
5.4.3. Método de los elementos finitos estabilizados	175
5.4.3.1. Multi-escalas variacionales de resolución	175
5.4.4. Método de los elementos finitos mixtos estabilizados explícitos	177
5.4.4.1. Caso I: Pequeñas Deformaciones	177
5.4.4.2. Estabilización mediante sub-escalas algebraicas (ASGS)	179
5.4.4.3. Estabilización mediante sub-escalas ortogonales(OSS)	179
5.4.4.4. Parámetros de estabilización	180
5.4.4.5. Ecuación discreta y estabilizada de la ecuación de movimiento. Formulación mixta estabilizada explícita	182
5.4.5. Aspectos de implementación computacional	183
5.4.5.1. Algunas expresiones matriciales de equilibrio dinámico en esquema mixto	184
5.4.6. Método de los elementos finitos mixtos estabilizados explícitos. Caso II: Grandes Deformaciones	186
5.4.6.1. Formulación continua y discreta	186
5.4.6.2. Discretización espacial. Formulación débil	187
5.4.6.3. Formulación en multi-escalas	188
5.4.6.4. Fórmula estabilizada de la ecuación semi-discreta de movimiento en grandes deformaciones	193
5.5. Evaluaciones numéricas	196
5.5.1. Aplicación ALRA	196
5.5.1.1. Aplicación de ALRA para refinamientos adaptativos arbitrarios	196

5.5.1.2.	Aplicación de ALRA en problemas de localización de deformaciones	199
5.5.2.	Estabilidad de la formulación mixta explícita	205
5.5.2.1.	Problema unidimensional	205
5.5.2.2.	Problema bidimensional	207
5.5.3.	Precisión numérica de la formulación mixta explícita	209
5.5.3.1.	Test de la parcela	209
5.5.3.2.	Viga en voladizo. Pequeñas deformaciones	210
5.5.3.3.	Viga en voladizo. Grandes deformaciones	213
5.5.3.4.	Caso compresible y quasi-incompresible. Efecto de la sub-escala de los despla- zamientos. Membrana de Cook	221
5.5.3.5.	Ensayo de Prantl. Plasticidad Perfecta	227
5.5.3.6.	MEX-FEM en grandes deformaciones. Bloque 3D sometido a compresión . . .	228
5.5.4.	Aplicación de MEX-FEM en problemas de localización de deformaciones	234
5.5.4.1.	Orientación de la banda de localización. Generalidades	234
5.5.4.2.	Ensayo a tracción de una barra con agujero	235
5.5.5.	Cilindro de pequeño espesor con agujero a torsión longitudinal. Localización tridimen- sional	236
5.6.	Conclusión y discusión	238
6.	Modelado discreto de la fractura. Simulaciones Numéricas	241
6.1.	Introducción	241
6.2.	Simulaciones Numéricas	242
6.2.1.	Simulación numérica de fractura discreta en ensayo brasileño	242
6.2.2.	Modelado de fractura discreta alrededor de una cavidad circular	252
6.2.3.	Simulación de fractura dinámica con bifurcación	255
6.2.4.	Simulación de fragmentación de un cilindro sometido a una presión interna	261
6.2.5.	Simulación numérica de fractura discreta tridimensional en el ensayo brasileño	262
6.3.	Conclusión	265
7.	Conclusiones	269
7.0.1.	Síntesis	269
7.0.2.	Conclusiones	270
7.0.3.	Aportaciones	272
7.0.4.	Lineas futuras de investigación	273
A.	Mecánica de medios continuos	275
A.1.	Conceptos básicos de la mecánica medios continuos	275
A.2.	Descomposición multiplicativa	279

A.3. Medidas de la tensión	284
A.4. Función de energía libre	284
A.4.1. Respuesta Elástica	285
A.4.2. Respuesta Plástica	286
A.5. Variables internas	287
A.5.1. Ley de endurecimiento o ablandamiento	287
A.6. Criterio de fluencia y potencial plástico	288
A.7. Regla de flujo	289
A.8. Condición de carga y descarga. Condición de consistencia	289
B. Comentarios sobre el operador de proyección	291
B.1. Operador de proyección ortogonal	291
C. Curvas de ablandamiento de la cohesión	293
C.1. Curvas de ablandamiento	293
D. Parámetros de estabilización	295
D.1. Determinación de los parámetros de estabilización mediante un análisis de Fourier	295
E. A modal reanalysis algorithm based in AMLS method for local non-topological modification	297
E.1. Introduction	297
E.2. AMLS Method	301
E.2.1. Overview	301
E.2.2. Multi-Level extension of AMLS Method	302
E.2.3. The block Gauss elimination procedure	305
E.2.4. Substructures condensation and modal approximation	307
E.2.4.1. Final condensed eigen-problem	309
E.3. Modal reanalysis with AMLS method	310
E.3.0.2. Problem statement. Modification and propagation	310
E.3.1. Local reanalysis in the modified sub-structure	315
E.3.2. Substructure size effect	316
E.4. Numerical Experiments	317
E.4.1. Numerical evaluation of size effect	317
E.4.2. Reanalysis with AMLS-Method	324
E.4.2.1. Reanalysis with AMLS-Method modifying a predetermined sub-structure	327
E.4.2.2. Reanalysis with AMLS-Method modifying a predetermined group of elements	329
E.5. Conclusion	330
6. Erratum Fórmulas	335

Índice de figuras

2.1. Los 3 Modos de Fractura. (a) Modo I (opening). (b) Modo II (sliding). (c) Modo III (tearing). . . .	37
2.2. Modelado de fractura discreta. Primer modelo de elementos finitos de una viga reforzada para abordar la fractura(Ngo y Scordelis[274]1967).	39
2.3. Modelo de Fractura Ficticia. Términos y conceptos asociados al Modelo de Fractura Ficticia de Hillerborg(1976).	40
2.4. Modelo de Banda de Fisura. Respuesta del sistema equipado con ablandamiento por deformación en la banda de la fisura.	42
2.5. Efecto Tamaño. Efecto tamaño en materiales quasi-frágiles[302].	43
2.6. Modelos discretos de fractura. (a) Sin remallar (b) con remallado (c) con enriquecimiento cinemático, nodal o elemental.	50
2.7. X-FEM. Modelo unidimensional de X-FEM para modelar discontinuidades fuertes.	53
2.8. Discontinuidades en un elemento finito. (a) una discontinuidad débil (b) dos discontinuidades débiles (c) discontinuidad fuerte.	55
2.9. Modelos de inserción de fracturas y rotura de elementos. (a) Factor de daño nodal (b) Fractura por caras (sin remallado) (c) Fractura por elementos(remallado local).	56
2.10. Método de los Elementos Discretos. (a) Modelado numérico de interacción entre partículas. (b)Proceso de fractura en DEM.	57
2.11. Modelo de fractura. Desplazamientos y deformaciones en el modelo difuso y discreto de fractura. .	64
3.1. Esquema de Integración de Diferencias Centrales.	68
3.2. Región de estabilidad del esquema de DC.	74
3.3. Contacto entre dos cuerpos Ω_1 y Ω_2	76
3.4. Concepto de proyección al punto más cercano.	80
3.5. Esquema de contacto nodo-segmento empleando multiplicadores de Lagrange.	84
3.6. Fuerza de contacto resultado de la superposición infinitesimal de dos objetos en los puntos P_m y P_c	88

3.7. Punto P_m sobrepuesto en el cuerpo Ω_s	88
3.8. Discretización en elementos finitos de dos cuerpos en contacto	90
3.9. Potencial ϕ en cualquier punto P del triángulo.	90
3.10. Contacto entre el triángulo Ω_m y Ω_s	91
3.11. Distribución de la fuerza de contacto entre dos triángulos en contacto.	91
3.12. Fuerzas nodales equivalentes.	92
3.13. Elementos considerados como elementos de contorno.	96
3.14. Problema de detección de contactos. Contorno espacial.	97
3.15. Descomposición espacial por celdas	97
3.16. Caja contenedora para distintos tipos de objetos.	99
3.17. Ubicación espacial del objeto en el contenedor.	99
3.18. Situaciones ambiguas de contacto.	105
3.19. Impacto de una barra unidimensional con una pared rígida [58].	107
3.20. Malla de elementos finitos para el análisis numérico del impacto de una barra con una pared rígida.	108
3.21. Evolución de las fuerzas de contacto. (a) Método de Multiplicadores de Lagrange. (b) Método de Penalización no amortiguado con $\Delta t = 0.00009s$ y $P = 10E$. (c) Método de Penalización no amortiguado con $\Delta t = 0.000027s$ y $P = 100E$	109
3.22. Método de Penalización. (a) Evolución de las fuerzas de contacto usando el Método de la Función de Penalización con amortiguamiento proporcional $\beta = 1E - 4$ y $\beta = 1E - 3$, $\Delta t = 0.00009s$ y $P = 10E$. (b) Evolución de las fuerzas de contacto usando el Método de la Función de Penalización con amortiguamiento proporcional $\beta = 1E - 4$ y $\beta = 1E - 3$, $\Delta t = 0.000027s$ y $P = 100E$	110
3.23. Ejemplos típicos para la verificación del patch test de contacto	112
3.24. Malla de elementos finitos para analizar la figura	112
3.25. Evolución de la reacción y la fuerza de contacto. (a) Método de Penalización. (b) Método de Multiplicadores de Lagrange.	113
3.26. Verificación del Patch Test. (a) Malla de la deformada y no deformada para el ejemplo del patch test de contacto. (b) Contorno de las tensiones S_{yy} obtenidas mediante el Método de Penalización. (c) Contorno de las tensiones S_{yy} obtenidas mediante el Método de Multiplicadores de Lagrange.	114
3.27. Barra flexible que contacta consigo misma. (a) Datos geométricos y condiciones iniciales. (b) Discretización del modelo en elementos finitos.	115
3.28. Barra flexible que contacta consigo misma. Distintos eventos que muestran la posición espacial de la barra durante la simulación numérica.	116
3.29. Contacto de Hertz: Geometría, Materiales y Condición de Carga [57].	116
3.30. Contacto de Hertz. Discretización de elementos finitos. (a) Malla gruesa. (b) Malla fina. (c) Visión tridimensional de la discretización	117
3.31. Contacto de Hertz. Solución obtenida usando una malla gruesa y una malla fina. (a) Malla gruesa. (b) Malla fina.	118
3.32. Contacto múltiples entre tetraedros. Geometría del modelo y mallas utilizadas en el análisis.	118

3.33. Evolución de la Energía Cinética: <i>Energía cinética total para Malla A y B aplicando el Método de Penalización y el Método combinado de Penalización y Multiplicadores de Lagrange.</i>	119
3.34. Contacto múltiples malla A. <i>Distintas etapas de la simulación que muestran configuración deformada del choque entre los fragmentos y la placa. Los fragmentos colisionan separándose unos de otros, desplazándose a distintas velocidades y rotando en torno a sus tres ejes de inercia.</i>	120
3.35. Contacto múltiples malla B. <i>Distintas etapas de la simulación que muestran configuración deformada del choque entre los fragmentos y la placa en la malla B.</i>	121
4.1. Superficie de fluencia de Mohr-Coulomb en estado plano y 3D.	132
4.2. Mohr Coulomb Modificado.	141
4.3. Retorno a la superficie de Mohr-Coulomb.	142
4.4. Selección de retornos en el modelo de MC.	151
5.1. <i>Refinamientos sucesivos no conformes.</i>	158
5.2. <i>Refinamiento por bisección.</i>	158
5.3. <i>Refinamiento por la arista más larga.</i>	159
5.4. <i>Refinamiento por vértices.</i>	159
5.5. <i>División de tetraedros.</i>	164
5.6. <i>Colapso de a arista de un triángulo.</i>	165
5.7. Modelo de fractura discreta. <i>Modelos discretos de fractura empleados en elementos finitos.</i> . . .	169
5.8. <i>Modelo tridimensional de fractura discreta. Modelos discretos de fractura empleados en elementos finitos.</i>	170
5.9. <i>Gráfico de tensiones desviadoras vs. deformaciones desviadoras en un modelo elasto-plástico.</i> . . .	180
5.10. <i>Esquema de las relaciones cinemáticas mediante sub-escalas.</i>	189
5.11. <i>Datos geométricos y malla original del bloque.</i>	196
5.12. <i>Ejemplos de refinamientos.</i>	198
5.13. <i>Ángulo de localización en MC.</i>	201
5.14. <i>Resultados empleando una malla alineada a la dirección de la banda.</i>	202
5.15. <i>Resultados sin emplear remallado.</i>	203
5.16. <i>Refinamiento adaptativo empleando el criterio de Zienkiewicz y Zhu [413].</i>	203
5.17. <i>Refinamiento adaptativo empleando el criterio de Hyun-Gym Kim y Seyoung Im [214].</i>	204
5.18. <i>Diagrama Fuerza (Reacción vertical) vs Desplazamiento Vertical.</i>	205
5.19. <i>Ejemplo unidimensional.</i>	205
5.20. <i>Ejemplo bi-dimensional</i>	207
5.21. <i>Variación de la frecuencia normalizada en función del parámetro de estabilización.</i>	208
5.22. <i>Variación del paso de tiempo normalizado en función del parámetro de estabilización.</i>	208
5.23. <i>Error en el tiempo de MEX-FEM</i>	209
5.24. <i>Malla utilizada para la verificación del criterio de la parcela[156].</i>	210

5.25. Valores de las tensiones en el criterio de la parcela con MEX-FEM	211
5.26. Datos de las dimensiones de la viga.	211
5.27. Secciones de corte.	211
5.28. Malla de elementos finitos de la viga en voladizo. Malla A.	212
5.29. Malla de elementos finitos de la viga en voladizo. Malla B.	212
5.30. Malla de elementos finitos de la viga en voladizo. Malla C.	212
5.31. Análisis dinámico de paso a paso utilizando tanto formulación explícita irreducible y mixta en la malla A.	213
5.32. Análisis dinámico de paso a paso utilizando tanto formulación explícita irreducible y mixta en la malla B.	214
5.33. Análisis dinámico de paso a paso utilizando tanto formulación explícita irreducible y mixta en la malla C.	214
5.34. Análisis dinámico de paso a paso utilizando tanto formulación explícita irreducible y mixta en la malla A.	215
5.35. Análisis dinámico de paso a paso utilizando tanto formulación explícita irreducible y mixta en la malla B.	215
5.36. Análisis dinámico de paso a paso utilizando tanto formulación explícita irreducible y mixta en la malla C.	216
5.37. Distribución normal y tangencial de las deformaciones en la sección A-A de la malla A en el punto de desplazamiento máximo.	216
5.38. Distribución normal y tangencial de las deformaciones en la sección B-B de la malla A en el punto de desplazamiento máximo.	217
5.39. Distribución normal y tangencial de las deformaciones en la sección A-A de la malla B en el punto de desplazamiento máximo.	217
5.40. Distribución normal y tangencial de las deformaciones en la sección B-B de la malla B en el punto de desplazamiento máximo.	218
5.41. Distribución normal y tangencial de las deformaciones en la sección A-A de la malla C en el punto de desplazamiento máximo.	218
5.42. Distribución normal y tangencial de las deformaciones en la sección B-B de la malla C en el punto de desplazamiento máximo.	219
5.43. Primer modo de vibración de la viga en voladizo en malla C.	219
5.44. Segundo modo de vibración de la viga en voladizo en malla C.	219
5.45. Tercer modo de vibración de la viga en voladizo en malla C.	219
5.46. Membrana de Cook. Geometría.	221
5.47. Membrana de Cook. Mallas de elementos finitos empleada en el análisis bidimensional. N_n : número de elementos y N_n : número de nodos.	222
5.48. Membrana de Cook. Mallas de elementos finitos empleada en el análisis tridimensional. N_n : número de elementos y N_n : número de nodos.	222
5.49. Membrana de Cook 2D. Formulación irreducible vs MEX-FEM con $\nu = 0.3$	224

5.50. Membrana de Cook 2D. Formulación irreducible vs MEX-FEM con $\nu = 0.499$.	224
5.51. Membrana de Cook 2D. Curvas de convergencia.	225
5.52. Membrana de Cook 2D. Campo de presiones. Malla D.	225
5.53. Membrana de Cook 3D. Formulación Irreducible vs MEX-FEM con $\nu = 0.499$.	226
5.54. Membrana de Cook 3D. Curva de convergencia.	226
5.55. Membrana de Cook 3D. Campo de presiones. Malla D.	226
5.56. Geometría y malla de EF utilizado para la prueba de Prandtl.	227
5.57. Resultado de los análisis para la formulación irreducible y formulación mixta estándar.	229
5.58. Resultado de los análisis con MEX-FEM.	230
5.59. Deformada del test de Prandtl.	231
5.60. Curvas de Desplazamiento-Reacción obtenidas con la formulación irreducible, mixta explícita estándar y MEX-FEM.	231
5.61. Ensayo a compresión de un bloque en 3D. Malla sobre la configuración de referencia.	232
5.62. Distribución del campo de las presiones en grandes deformaciones con formulación irreducible y la formulación propuesta.	233
5.63. Ángulo de localización.	234
5.64. Banda de localización obtenida con MEX-FEM. Deformaciones plásticas equivalentes.	237
5.65. Curvas Desplazamiento-Reacción para el problema de la barra con agujero.	238
5.66. Geometría y malla empleada.	238
5.67. Deformaciones plásticas equivalentes en el modelo de MC con $\phi = 45^\circ$ en torsión con perturbación de tracción. Ángulo de localización teórico: $\theta_{loc}^{teo} = 22.5^\circ$ con el plano horizontal. Ángulo de localización numérico: $\theta_{loc}^{num} = 23.62^\circ$.	239
5.68. Deformaciones plásticas equivalentes en el modelo de MC con $\phi = 45^\circ$ en torsión pura. Ángulo de localización teórico: $\theta_{loc}^{teo} = 67.5^\circ$ con el plano horizontal. Ángulo de localización numérico: $\theta_{loc}^{num} = 67.53^\circ$.	239
6.1. Ensayo brasileño. Geometría, condiciones de carga y patrón de fractura.	242
6.2. Resultado experimental del ensayo brasileño[402].	243
6.3. Malla de elementos finitos.	246
6.4. Distribución elástica de tensiones. Comparación de la solución analítica con la solución numérica obtenida con MEX-FEM.	247
6.5. Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de Rankine con MEX-FEM.	248
6.6. Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de MC con MEX-FEM.	248
6.7. Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de MCM con MEX-FEM.	249
6.8. Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de Rankine con formulación irreducible.	249

6.9. Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de MC con formulación irreducible.	250
6.10. Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de MCM con formulación irreducible.	250
6.11. Curva Desplazamiento-Reacción.	251
6.12. Ensayo experimental reportado por E.Z. Lajtai y V.N. Lajtai [232].	252
6.13. Ensayo experimental reportado por E. J. Dziky y E. Z. Lajtai [119].	253
6.14. Boceto del ensayo experimental reportado por Carter [63].	254
6.15. Malla de elementos finitos.	254
6.16. Localización de la fractura primaria y remota en el modelo de Rankine.	255
6.17. Localización de la fractura primaria y remota en el modelo de MC.	255
6.18. Localización de la fractura primaria y remota en el modelo de MCM.	256
6.19. Problema de fractura dinámica con bifurcación.	257
6.20. Patrón de fractura del ensayo experimental reportado por Ramulu y Kobayashi [322].	257
6.21. Evolución de la fractura empleando un modelo de plasticidad de Rankine con MEX-FEM.	259
6.22. Evolución de la fractura empleando un modelo de plasticidad de Rankine con formulación irreducible.	260
6.23. Modelo discreto de fractura empleando fractura por elementos y fractura por caras.	260
6.24. Velocidad de fractura.	261
6.25. Cilindro sometido a presión interna.	262
6.26. Evolución de la onda expansiva y del proceso de fragmentación en el cilindro empleando el modelo de Rankine.	263
6.27. Patrón final de fractura.	264
6.28. Energía de fractura disipada.	264
6.29. Malla de elementos finitos en el ensayo brasileño en 3D.	265
6.30. Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de Rankine con MEX-FEM.	266
6.31. Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de MC con MEX-FEM.	266
6.32. Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de MCM con MEX-FEM.	267
6.33. Curva Desplazamiento-Reacción.	267
A.1. Descripción del movimiento de un continuo.	275
A.2. Interpretación física de la descomposición multiplicativa del gradiente de deformaciones [64].	279
A.3. Descomposición multiplicativa. Configuraciones original, deformada e intermedia.	280
E.1. Domain Ω partitioned into four sub-domains Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 and Ω_4 and interfaces Γ_1 , Γ_2 and Γ_3	303
E.2. Data tree structure for the stiffness matrix defined in equation (E.2.3) with three partition level L_0 , L_1 and L_2	304

E.3. <i>Generic data tree structure for a large sparse matrix formed by 7 level and 125 nodes</i>	305
E.4. <i>Local modification in a truss bridge without increasing a decreasing the number of dofs.</i>	311
E.5. <i>Sub-structures local modification.</i>	311
E.6. <i>Modification and propagation when node 3, in a 4 level tree partition, is modified.</i>	314
E.7. <i>Balance and unbalance tree substructure.</i>	317
E.8. <i>Modal error and standard error for example Wtaoc01.</i>	319
E.9. <i>Modal error and standard error for in example Wtnh01.</i>	320
E.10. <i>Modal error and standard error for in example Bs6.</i>	321
E.11. <i>Tree partition sub-structures in Wtnh01 example.</i>	323
E.12. <i>Tree partition bs6 example with average size of 10000 DOFs.</i>	324
E.13. <i>Modal and standard error in the unbalance and balance tree.</i>	325
E.14. <i>Error in the unbalance and balance tree.</i>	326
E.15. <i>Error in the unbalance and balance tree.</i>	327

Índice de cuadros

3.1. Objetos contenidos en las celdas	100
3.2. Objetos contenidos en las celdas	101
3.3. Características del modelo	107
3.4. Propiedades del ejemplo de la figura 3.23a	111
3.5. Propiedades generales del ejemplo de la figura 3.27	114
3.6. Propiedades generales del ejemplo de la figura 3.32	117
5.1. Definición de los bordes de un tetraedros y los posibles resultados de refinamiento.	165
5.2. Tetraedro arriba-izquierda GIDs original 1234 - identificador: 000189	167
5.3. Tetraedro arriba-derecha GIDs original 2534 - identificador: 006249	167
5.4. Tetraedro arriba-derecha - GIDs original 2534 - identificador: 026249	167
5.5. Medidas de deformaciones y tensiones en la la configuración de referencia y actualizada para la formulación mixta y formulación irreducible. NV: notación de Voigt	195
5.6. Datos finales del refinamiento A,B,C y D realizado en una malla de elementos finitos de la figura 5.11b.	197
5.7. Datos de materiales para el ensayo numérico de refinamiento adaptativo.	201
5.8. Ángulo de la banda de localización	204
5.9. Coordenadas nodales de la malla del test de parcela de la figura 5.24.	210
5.10. Datos materiales y geométricos para el análisis dinámico de la viga en voladizo.	212
5.11. Datos de discretización empleada en la viga en voladizo.	212
5.12. Máximo Δt^{max} para el análisis en la formulación mixto propuesta e irreducible.	220
5.13. Datos de los materiales para la prueba de Prandtl.	227
5.14. Resultados obtenidos del ángulo de localización θ_{loc} empleando MEX-FEM (medido desde $90-\theta_{loc}$). T(Resultado teórico, (E) Resultado empírico.	235
6.1. Datos de materiales de la probeta STC4 [329].	245

6.2. Comparación de la resistencia a tracción obtenida empleando MEX-FEM y la formulación estándar .	251
6.3. Propiedades materiales de la roca caliza del ensayo de la cavidad sometida a compresión.	253
E.1. Test problem for substructures size effect.	318
E.2. Final projected matrix size. S the size of final projected matrix and NZ is the non-zeros in the final mass projected matrix.	318
E.3. Number of nodes and levels sub-structures.	318
E.4. Average time reported to complete the eigen-analysis with AMLS method. Final projected system solved by Trilinos-Anasazi Super-LU.	322
E.5. Average time reported to complete the eigen-analysis with AMLS method. Final projected system solved by LAPACK dense eigen-solver.	322
E.6. Average time reported for solving the complete system using different eigen-solve.	322
E.7. Full modal-analysis time calculation for different eigen-solvers.	328
E.8. Reported re-analysis time when one leaf sub-structures is modified. M . E (number of modified elements); M . $DOFs$ (number of modified $DOFs$; M . I . N (Modified internal nodes) and M . L . N (Modified leaf nodes)).	328
E.9. Reported re-analysis time when two leaf sub-structures is modified.	328
E.10. Reported re-analysis time when half leaves sub-structures is modified.	329
E.11. Reported reanalysis time modifying groups of elements.	329
E.12. Reported standard error eigen-values when the group Id 1 is modified.	330
E.13. Reported standard error eigen-values when the group Id 2 is modified.	331
E.14. Reported standard error eigen-values when the group Id 3 is modified.	331
E.15. Reported standard error eigen-values when the group Id 4 is modified.	332
E.16. Reported standard error eigen-values when the group Id 20 is modified.	332

Lista de Símbolos

$(\bullet) : (\bullet)$	Producto interior.
$(\bullet) \cdot (\bullet)$	Contracción simple de un vector o tensor.
$(\bullet)^T$	Transpuesta de un vector o matriz.
$(\bullet)_n$	Variable (\bullet) evaluada en tiempo t_n .
$[[u]]$	Salto en el campo de los desplazamiento.
γ	Vector de las funciones de peso del campo de las deformaciones.
σ	Tensor de tensiones.
ε	Tensor de deformaciones infinitesimales.
B	Operador matricial de gradiente.
C_t	Tensor constitutivo tangente.
D	Matriz de amortiguamiento.
M	Matriz de masa.
N_ε	Vector de las funciones de forma del campo de las deformaciones.
N_u	Vector de las funciones de forma del campo de los desplazamientos.
Q	Tensor acústico.
u	Campo de desplazamientos.
w	Vector de las funciones de peso del campo de los desplazamientos.
Z	Matriz de restricción de contacto.
$(\ddot{\bullet})$	Campo de aceleraciones.
Δt	Paso de tiempo.

δ_{ij}	Símbolo de Kronecker.
\mathcal{L}	Longitud característica.
\mathcal{P}	Operador de Proyección.
\mathcal{P}^\perp	Operador ortogonal de proyección.
$\nabla(\bullet)$	Operador de gradiente.
$\nabla \cdot (\bullet)$	Operador de divergencia.
$\nabla^s(\bullet)$	Operador de gradiente simétrico $\nabla^s(\bullet) = \frac{1}{2}(\nabla(\bullet) + \nabla(\bullet)^T)$.
ρ	Densidad.
τ_ε	Parámetro de estabilización en las deformaciones.
τ_u	Parámetro de estabilización en el campo de los desplazamientos.
ν	Coefficiente de Poisson.
$\tilde{\mathbf{u}}$	Sub-escala de los desplazamientos.
$\tilde{\varepsilon}$	Subescala de las deformaciones.
\mathbf{x}_{max}^b	Coordenada máxima de la caja contenedora de un objeto.
\mathbf{x}_{min}^b	Coordenada mínima de la caja contenedora de un objeto.
\mathbf{x}_{max}^c	Coordenada máxima de una celda.
\mathbf{x}_{min}^c	Coordenada mínima de una celda.
\mathbf{x}_{max}	Coordenada máxima del contenedor.
\mathbf{x}_{min}	Coordenada mínima del contenedor.
ξ	Factor de amortiguamiento al crítico.
E	Módulo de elasticidad.
f_t	Resistencia a tracción del material.
h^e	Longitud característica del elemento finito.
h_c	Ancho de banda de fractura.
h_{min}^e	El menor tamaño de la longitud del elemento finito dentro de una malla.
p	Parámetro de penalización.
s_e	Número de Carpinteri.

Este trabajo es fruto de un enorme esfuerzo personal sostenido durante todos estos años...

A mis padres por su apoyo incondicional:

N. Lafontaine (In memoriam), a Lissette y a Efrén

A mi abuela Cándida quien siempre rezó por mí.

A mi segunda madre y hermana mayor Nercy Lafontaine.

A mi primo Alan.

A mis mejores amigos Natalia, Ezequiel y Víctor.

A Emma Quiles.

A mis paisanos de dominicana.

Y a nuestra hermosa Quisqueya: República Dominicana.

Agradecimientos

Quiero dejar constancia de mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas con las que he compartido durante todos estos años durante mi carrera doctoral y que me han aportado un valor añadido en mi vida personal, profesional y académica.

En primer lugar quisiera agradecer a Dios, esa fuerza inexplicable que reconforta y anima...

Quiero agradecer al Prof. Eugenio Oñate y al Prof. Miquel Canet, no sólo por la confianza depositada en mí al haberme propuesto el tema de esta tesis y su invalorable apoyo, sino también por su paciencia y perseverancia durante estos años. Su capacidad de trabajo, su visión, su interés, su determinación en realizar un buen trabajo y sus exigencias me ha obligado a intentar superarme continuamente sin importar los obstáculos encontrados. Agradecer profundamente al Prof. M. W. Yuan y al Prof. Chen Pu por su calidad humana, su hospitalidad y su generosidad durante mi estancia de estudios doctorales en China, a ambos le debo mucho.

Quisiera expresar mis más profundos agradecimientos al Prof. Miguel Cervera quien siempre estuvo interesado por el desarrollo de mi investigación. Muchos de los conocimientos adquiridos del tema de la mecánica de la fractura se los debo a él, a sus publicaciones y sus consejos. Agradecer enormemente el tiempo dedicado en contestar mis *e-mails*, apoyo en los momentos cruciales de mi trabajo y a los trabajos realizados en conjunto. Al Prof. Sergio Oller por dedicarme su tiempo y compartir con generosidad sus ideas y conocimientos en el modelado constitutivo del material. Al Prof. Michele Chiumenti por compartir su experiencia en el campo de las formulaciones mixtas. A Riccardo Rossi, quien siempre sacó el tiempo para aclarar dudas, involucrarse en el trabajo, ayudarme en la parte técnica de KRATOS. Sin tu ayuda y esas discusiones por Skype hubiera sido doblemente difícil acabar la tesis. Gracias enormes.

Agradecer al personal del departamento de Resistencia de Materiales en la escuela de caminos y a CIMNE. En especial, a Rosa Olea por su amabilidad, eficacia, calidad humana y ayudarme más allá del cumplimiento del deber. De igual manera a Mercè Alberich, Sònia Sagristà, al personal de publicación y al equipo técnico de informática.

A mis compañeros del grupo KRATOS, en especial a Pooyan Dadvand, quien me dio los buenos consejos de programación que aplico hoy en día. Su estilo particular me animó siempre a buscar y mejorar la eficiencia de mis códigos. A Antonia, Kazem, Jordi, Julio, Pablo con quienes compartí en el grupo. Agradecer a mis hermanos Miguel Angel Celigueta, Salvador Latorre, Ferran Arrufat, Miquel Santasusana, amigos con quienes compartí almuerzos y risas en ESADE y en el bar de caminos. Al equipo GID, Enrique Escolano, Miquel Pasenau, Abel Coll, Anna Monros y Jorge Suit. Gracias por ayudarme en los problemas técnicos con GID, en especial a Enrique.

Agradecer a mis compañeros de despacho y fatigas de la pecera: Cuauthémoc (Temo), Carlos Morillo (Chamo), Enrique Ortega (Kike), Eduardo Soudah (Edu), Carlos Labra, Joan Baiges, Narges Dialami y su ayuda incondicional y desinteresada en compartir ideas. Agradecer a Joaquin Hernández a quien considero un hermano mayor para mí. A mis compañeros Josep M. Carbonell, Jose María, Jesús Bairán, Matías y a María del Mar en el departamento de transporte con quienes disfruté algún almuerzo o café.

A mis valiosos amigos, que siempre estuvieron dándome palabras de aliento en mis momentos difíciles: Ezequiel Ramon, Natalia Kepikova y Victor Herazme. A Petra, Ema, Mexy, Lorena, amigos inolvidables. Mis agradecimientos sinceros a Patricia Kasajova. Agradecer con toda el alma a Emma Quiles por sus sabios consejos en la vida práctica y por recordarme siempre quien soy. A mis amigos de la parroquia Mare de Déu dels Desamparats en Hospitalet de Llobregat, Guillermo, Maria Luisa, Carmen, Rosa y el P Ramón.

A mis amigos de República Dominicana, a quienes siempre he sentido cerca: Emyl Feliz, Alturo Lau Cheng, Rosario Ines, Rigoberto Castillo, Cinthia Cuevas, Milagros Matos, Leticia Martínez y Mayra Pérez. A mis profesores de mi universidad Edwin Díaz, Nelson Morrison y María Penkova por animarme a emprender el camino del doctorado.

A mis amigos de China: Zhou, Ji y Xia. A mis amigos de LASA, Jairo, Luis, Jose Antonio, Pablo, Belisa, Irene, Daniela y Peter. Gracias por hacerme partícipe de ese hermoso proyecto latinoamericano. A mis colegas y amigos dominicanos en China con quien también compartí momentos y risas: Enmanuel Ortega, Emmanuel García, Endrys Méndez y Cinthia Zabala. A la excelentísima señora embajadora de la República Dominicana en China Doña Rosa Ng.

A la Agencia Española de Cooperación Internacional por la beca otorgada para subvencionar mis estudios y mi estancia en Barcelona. A casa de América en Barcelona en especial a Teresa María de Manuel Ochoa por su acogida y amabilidad. Gracias por su empeño desinteresado al desarrollo de América Latina.

Estar y ser tú.

Emma Quiles de Fernández

1.1. Introducción

La fractura frágil o quasi-frágil en los materiales empleados en la ingeniería es un amplio campo de investigación que involucra a muchos investigadores dedicados al estudio de diferentes aspectos de la mecánica y la física de la fractura, siendo un tema de intenso debate y controversia en la comunidad científica. Por lo general, entre los materiales estudiados se incluyen las aleaciones de metales, polímeros, materiales compuestos, piedras, cerámicas, concreto, entre otros, que constituyen una proporción significativa de nuestro entorno estructural. El modelado numérico constituye una herramienta poderosa (aunque en ocasiones puede resultar computacionalmente costosa y compleja) que nos ayuda comprender el comportamiento de estos materiales, con el fin de trazar normas y reglamentos para diseñar de un modo seguro aquellas estructuras que emplean estos tipos materiales.

El fallo en los materiales quasi-frágiles está influenciado por el desarrollo de una zona de proceso intrínseco en forma de una región localizada de microfisuración, la cual presenta una alta concentración de deformaciones extensionales, comúnmente llamada bandas de corte o bandas de localización e inician el proceso de macrofisuración (la fractura discreta) debido a la coalescencia de las mismas microfisuras. Se emplea el término localización para referirnos a situaciones en las que la concentración de las deformaciones en el sólido surge como resultado del comportamiento constitutivo del material. Desde el punto de vista matemático y numérico, la iniciación de la localización de deformaciones es el resultado de la pérdida de elipticidad de las ecuaciones de gobierno. Una vez desarrollada la banda de corte se observa un deslizamiento relativo entre los dos lados de la banda muy similar al modo II de fractura. La formación de la banda de corte, considerado como una consecuencia de la inestabilidad en el material, está acompañada por una respuesta de reblandecimiento en el material que por lo general conduce al completo colapso de la estructura. En la actualidad, el fenómeno de la localización de la deformación está recibiendo mucha atención en diversas áreas de la ingeniería debido a su influencia significativa en el comportamiento de un gran número de materiales. Por otra parte, los materiales quasi-frágiles no poseen el mismo mecanismo de deformación observado en los materiales dúctiles, por lo que trabajo realizado durante el fallo se limita a la ruptura frágil de los enlaces atómicos. La manifestación más significativa de los materiales quasi-frágiles es el efecto del tamaño (*size*

effect) de la respuesta estructural. Esto se debe principalmente a la liberación de energía de deformación en la zona de proceso de fractura, cuya magnitud es proporcional al tamaño de la estructura.

En los últimos años se ha dedicado un enorme esfuerzo para el desarrollo de modelos numéricos con el objeto de simular el comportamiento de fractura en los materiales quasi-frágiles. El modelado numérico de la fractura comenzó a partir de los años 60 con la introducción del Modelo de Fractura Distribuida por Rashid[323] y el Modelo Discreto de Fractura por Ngo y Scordelis[274] aplicados en el momento al estudio de estructuras de hormigón en masa y concreto reforzado. De hecho, es inevitable no hablar del hormigón, pues muchos de los estudios numéricos y experimentales de la fractura quasi-frágil fueron realizados con este material. Existe una basta literatura dedicada sólo a ello. En especial, el modelo distribuido ganó mucha popularidad entre los ingenieros, no sólo porque reformuló el concepto de fractura concibiéndola como un número infinito de grietas paralelas infinitamente pequeñas y distribuidas sobre un elemento finito, sino que además era capaz de reproducir satisfactoriamente lo observado en los ensayos experimentales. En este modelo, la propagación de la fractura era simulado mediante la reducción de la rigidez y la resistencia del material. En esencia, esta idea era simple y a la vez robusta, motivo por el cual muchas de las investigaciones posteriores fueron dedicadas a perfeccionar tal idea introduciendo mejoras al modelo.

En otro sentido, los modelos discretos de fractura se desarrollaban paralelamente a los modelos distribuidos de fractura. Sin embargo, fueron bastantes limitados y poco empleados en situaciones prácticas, dada la complejidad que envolvía realizar la fractura discreta dentro de la malla de elementos finitos. De hecho, esto resultó ser la principal desventaja de este enfoque ya que la topología de la malla de elementos finitos cambiaba continuamente para reflejar la inserción de la fractura. Por otra parte, en un principio la fractura se propagaba sólo en los bordes de los elementos finitos y/o en una dirección ya predefinida. Asimismo, los resultados eran muy sensibles con respecto al tamaño y la forma de la malla de los elementos finitos. El remallado adaptativo resultó ser entonces una técnica prometedora para atenuar la dependencia de la malla pero era computacionalmente costosa e introducía errores debido a la extrapolación o mapeo de las variables involucradas. La fractura discreta con remallado era una ruta viable para la simulación tridimensional de la fractura discreta, sin embargo, a pesar de la cantidad de trabajos publicados era aún muy limitada, principalmente porque los malladores no eran muy sofisticados y robustos. Todo el modelo numérico tenía que actualizarse, desde la malla de los elementos finitos hasta la matriz de rigidez del sistema. Ante estas dificultades, los ingenieros preferían emplear el modelo de fractura distribuida y operar a nivel constitutivo. Años más tarde, Hillerborg[175] revolucionó el enfoque discreto de fractura mediante la introducción del Método Ficticio de Fractura y posteriormente perfeccionado en los modelos cohesivos de fractura. Si bien, estos modelos llegaron a ser muy populares, sobre todo para estudiar el comportamiento del hormigón, necesitaba y requieren aún hoy en día la solución del problema de la dependencia de la malla.

Como una necesidad de describir satisfactoriamente la cinemática de la fractura, se empezaron a desarrollar formulaciones de fractura que incorporaban el salto producido por la fractura en el campo de los desplazamientos y deformaciones. La idea era simple: introducir la discontinuidad o salto dentro del continuo sin necesidad de remallado. Esto dio lugar a formulaciones ingeniosas conocidas hoy en día como Modelos de Fractura con discontinuidades embebidas entre ellos Discontinuidades Fuertes[277, 278, 354, 355] y el muy conocido X-FEM[30, 256, 368]. Si bien, estas formulaciones poderosas son capaces de describir la fractura con una sorprendente precisión, presentan sus inconvenientes particulares, como el efecto del bloqueo en los elementos enriquecidos, sobre todo en los elementos de orden inferior (triángulos o tetraedros lineales). Por otra parte requieren el rastreo de la fractura por lo que emplean algoritmos de rastro de fractura (*Tracking* o el llamado *Level Set*).

En este estudio se retoma las bases originales del modelado discreto de la fractura pero con una visión distinta. La experiencia numérica nos ha demostrado que los elementos basados en la formulación estándar en desplazamientos, si bien son capaces de resolver una amplia gama de problemas en ingeniería y han sido empleados a lo largo de los años para tratar problemas de fractura en materiales quasi-frágiles, no son adecuados en sí mismos para tratar este problema, si no es con una mejora de la cinemática del elemento finito. Por otra parte, los modelos constitutivos empleados para predecir el comportamiento de los materiales quasi-frágiles, sobre todo aquellos basados en la teoría de la plasticidad, se encontraban con el problema de la limitación del elemento finito o que simplemente la formulación empleada de elemento finito no era capaz de dar el resultado esperado. La dependencia de la malla y el efecto de bloqueo era una consecuencia de ello, en particular en los modelos de fractura distribuida.

El problema de la fractura y su propagación es una cuestión de aproximabilidad. Cuando se enriquece un elemento finito ya sea añadiendo modos de deformación, grados de libertad rotacionales, saltos u otros parámetros, implícitamente lo que hacemos es mejorar la aproximación dada por el elemento finito. Sin embargo, aunque son capaces de dar y predecir resultados satisfactorios, pueden añadir inconvenientes adicionales. En este trabajo se toma por primera vez la adopción de una formulación mixta en desplazamientos y deformaciones para resolver el problema de la fractura. Sin embargo, las formulaciones mixtas, muy populares en la mecánica computacional de fluidos, su aplicación en la mecánica de sólidos representa un reto numérico. La adición de estos nuevos grados de libertad de deformaciones involucra la resolución de un sistema mayor de ecuaciones y por otra parte hay que considerar los aspectos de estabilidad de las formulaciones mixtas. Para evitar tales problema, en este trabajo se ha desarrollado y aplicado por primera vez a la problemática de la fractura, un método mixto explícito en desplazamientos y deformaciones. Entre las características de la formulación propuesta están un buen comportamiento a situaciones cercanamente incompresibles, buen comportamiento a situaciones de flexión, eficacia computacional, precisión en mallas bastas, aplicable a formas geométricas de elementos finitos de bajo orden, facilidad de implementación y descripción objetiva de la localización. Además proporciona una manera natural de realizar fractura discreta.

En este trabajo se aborda el problema de la fractura desde un enfoque explícito. La ventaja de usar esquemas explícitos es lo relativamente *fácil* y computacionalmente barato que resulta realizar la fractura discreta. Sin embargo la principal desventaja de los métodos explícitos es que consumen mucho tiempo de cálculo. La fractura discreta se modela como una separación nodal, como lo hicieron en un principio Ingraffea y sus colaboradores [341], y también mediante la rotura del elemento finito, es decir, el elemento finito se divide en la dirección de la fractura calculada, creando nuevos elementos y nodos en la malla. Todo este proceso no es realizado con un remallado, sino que se ha desarrollado un algoritmo numérico de refinamiento local adaptativo para tal fin. Los aspectos altamente no lineales y complejos como el contacto se toman en cuenta. Una vez que se produce la fractura, las caras entre las fisuras pueden o no entrar en contacto, según las condiciones de las cargas actuantes. Realmente esto constituye un esfuerzo computacional tremendo, ya que una vez que se producen las fracturas, se crean más superficies de contacto. No obstante, el computo de las fuerzas de contacto no es complicado, es modelo aún requiere un algoritmo de búsqueda de contactos que sea eficiente. Lo que buscamos es simular objetivamente el proceso de fragmentación en los materiales quasi-frágiles tomando en cuenta aspectos tan complicados como la alta no linealidad del material y la interacción del contacto.

1.1.1. Motivación: Por qué simular la fractura discreta

Ciertos estados tensionales generan la aparición progresiva de procesos de daño interno y micro-grietas que eventualmente se unen en una discontinuidad geométrica que separa el material e inician procesos de fragmentación de la estructura y posteriormente su colapso. Esta discontinuidad geométrica es a lo que nos referimos como fractura discreta. El modelo de fractura discreta es el enfoque que ofrece desde el punto de vista físico, una descripción realista y global de los procesos de fractura de un material. Asimismo, este enfoque puede aplicarse en otras áreas de estudio para simular procesos de fragmentación, estabilidad y deslizamientos de taludes, explosiones y cualquier otro proceso que en que verdaderamente se requiera la simulación de la fractura discreta. La fractura discreta sería una alternativa viable para estudiar situaciones de fractura en la que el modelo de distribuido no diera una respuesta fiable y satisfactoria.

En otro sentido, en modelo de fractura discreta está basado en los principios de mecánica de la fractura. Este método es teóricamente el más conveniente para describir los procesos de localización[229]. Sin embargo, al requerir técnicas de remallado adaptable y otros requisitos particulares, se hace necesario el empleo de programas de ordenador más especializados y sofisticados. No obstante, el avance de la tecnología y de las herramientas de computación proporcionan una solución a tales problemas haciendo que el enfoque discreto de fractura sea nuevamente retomado, explotado y constantemente actualizado.

1.1.1.1. Objetivos generales

El principal objetivo de este trabajo es desarrollar e implementar una metodología numérica explícita, precisa y robusta capaz de abordar de una manera objetiva el fenómeno de la localización y la fractura discreta en los materiales quasi-frágiles y a la vez simular procesos discretos de fractura incluyendo las fuerzas de contacto normales dentro de un análisis quasi-estático y dinámico, empleando los enfoques clásicos de fractura basados en la teoría de plasticidad. En este trabajo se ha utilizado el clásico criterio de fallo de Mohr Coulomb para describir situaciones de fractura que se producen en estados tensionales de compresión y el criterio de Rankine, ampliamente aceptado para describir el fallo a tracción del material. Con la finalidad de ser útiles en aplicaciones prácticas e industriales, se ha desarrollado por primera vez una formulación mixta explícita, con cualidades superiores a la formulación estándar en desplazamientos de elementos finitos cumpliendo los requisitos de bajo coste computacional, buen comportamiento en mallas bastas, estabilidad del campo de las presiones, buen comportamiento a situaciones cercanamente incompresibles, facilidad de implementación y operable con cualquier modelo constitutivo, sea o no sea lineal.

1.1.1.2. Objetivos específicos

Entre los objetivos específicos de esta tesis están el desarrollo de una serie de herramientas y algoritmos numéricos, a lo que particularmente llamamos ingredientes fundamentales, para el modelado de la fractura discreta. Los mismos se citan a continuación:

- Crear un algoritmo numérico eficiente de búsqueda de contactos aplicable a cualquier tipo de geometría, en particular a triángulos y tetraedros.
- Implementar un algoritmo de cómputo de fuerzas de contacto normales basado en el Método de Multiplicadores de Lagrange y el Método de la Función de Penalización. A la vez, aprovechar las ventajas de ambos algoritmos y usarlos de manera combinada dentro del análisis.

- Desarrollar un algoritmo de refinamiento local adaptativo para triángulos y tetraedros con la finalidad de realizar refinamientos en una zona de la malla y realizar la inserción de la la fractura discreta.
- Extender y utilizar el Modelo de Daño Plástico para capturar el proceso de deterioro del material y ser el puente en la transición continuo-discreto.
- Desarrollar una formulación mixta-explicita en desplazamientos y deformaciones.

1.1.2. Contenido de la tesis

La tesis está estructurada en 7 capítulos y un apéndice. En el capítulo 2 se aborda el estado del arte con la finalidad de ubicar el trabajo en el contexto actual de la mecánica de la fractura, identificando las principales líneas de investigación incluyendo un repaso histórico de las principales investigaciones desarrolladas en la mecánica de la fractura, ventajas y desventajas de los dos modelos de fractura más influyentes de la mecánica de la fractura y los enfoques actuales y mejorados de estos modelos.

El capítulo 3 introduce cómo abordaremos la solución dinámica de la ecuación de gobierno en la mecánica de sólidos. Para tal caso, se ha empleado el popular método explícito de Diferencias Centrales. A la vez, y dado que necesitamos resolver un problema de contacto en forma explícita, describimos el algoritmo numérico desarrollado para realizar búsqueda de potenciales de contacto, los métodos para imponer las condiciones de contacto y evaluar posteriormente las fuerzas de contacto. Finalmente se realizan una serie de simulaciones numéricas mostrando la factibilidad del algoritmo de contacto implementado dentro de un código explícito.

En el capítulo 4 describimos y extendemos al rango de deformaciones finitas el Modelo Constitutivo de Daño Plástico desarrollado por S. Oller[289]. Aunque es posible emplear otros modelos constitutivos, entendemos que este modelo es suficiente como una primera aproximación para estudiar el comportamiento constitutivo del material quasi-frágil. Por otra parte, dado que este modelo fue desarrollado para abordar problemas en deformaciones infinitesimales, aquí extendemos el concepto y lo aplicamos a grandes deformaciones, asumiendo como hipótesis básica que las deformaciones elásticas de un material quasi-frágil es pequeña en comparación con las deformaciones plásticas. En esencia, este modelo asume pequeñas deformaciones elásticas y grandes deformaciones plásticas. Se describen en detalle los aspectos de la integración constitutiva. Así mismo, este modelo constituye la transición continuo-discreto del material y nos proporciona la información fundamental requerida para hacer tal transición: *la variable normalizada de daño plástico*.

El capítulo 5 constituye el punto central de este trabajo. Explica los ingredientes fundamentales del modelado de la fractura discreta. El mismo se ha estructurado en tres partes fundamentales: la primera parte está dedicada a describir el modelo de refinamiento local adaptativo desarrollado para elementos triangulares y tetraedros, en la cual hemos bautizado con el nombre de ARLA. La originalidad de esta algoritmia es que emplea el concepto de matriz dispersa, ampliamente utilizada en el ensamblaje de matriz global de rigidez de elementos finito y emplear la misma para realizar un mapeado de las conectividades elementales. Explicamos las consideraciones, ideas fundamentales y los procedimientos empleados para llevar a cabo tal técnica. La ventaja de este algoritmo es su versatilidad y aplicabilidad a otros campos de la mecánica, además de ser computacionalmente conveniente para realizar procesos paralelizados de refinamientos y a la vez servir como una algoritmia auxiliar en los programas de mallado. Asimismo se evita realizar un mapeado de las variables entre dos mallas distintas, como es habitual en un remallado adaptable. Para el caso particular en que se requiera la extrapolación de alguna variable, la misma se hace muy fácilmente mediante las funciones

de interpolación de los EF. A la vez, este algoritmo es la base para realizar la inserción de la fractura discreta dentro de un continuo, pues mediante simples operaciones lógicas, nos proporciona los nuevos datos de conectividad acorde con la fractura discreta que queremos introducir. Seguidamente introducimos una nueva formulación mixta explícita en la mecánica de sólidos a la que hemos llamado MEX-FEM. Esta es la contribución original más importante de este trabajo, pues es la primera vez que se plantea una formulación mixta explícita en la mecánica de sólidos. Esta formulación ha mostrado tener propiedades superiores al esquema explícito estándar descrito en el capítulo 3. Por último, se realizan una serie de validaciones numéricas con el objeto de demostrar la eficacia y la aplicabilidad de ARLA y MEX-FEM.

El capítulo 6 se aplican todos y cada uno de los conceptos desarrollados en los capítulos precedentes. Es, en esencia, el objeto final de este trabajo. Mostramos mediante ejemplos de simulaciones numéricas la fractura discreta.

Las conclusiones de la tesis, las aportaciones originales realizadas y las futuras líneas de investigación que se vislumbran a partir de este trabajo se enuncian en el capítulo 7.

Finalmente se incluyen unos anexos en donde se revisa los conceptos más importantes y las expresiones principales de la mecánica de medios continuos, aplicados sobre todo en el capítulo 4. Se anexan también las funciones de ablandamiento empleadas y un breve comentario sobre el operador de proyección empleado en el capítulo 5.

Estado del arte de simulación de la fractura

El propósito de la computación es la comprensión, no los números.

Richard Hamming

2.1. Estado del Arte

2.1.1. Introducción

El estudio de los materiales frágiles y quasi-frágiles requieren de modelos numéricos robustos que representen adecuadamente el carácter discontinuo del proceso de fractura. El proceso de fractura en materiales quasi-frágiles se caracteriza por la formación de microfisuras en la zona de proceso de fractura que eventualmente se unen y dan lugar a la formación de macrofisuras. La propagación de las grietas en estos materiales se asocia con la localización de las deformaciones. Por tanto, para el modelado del comportamiento no lineal de estos materiales en las proximidades de la grieta se requiere considerar la transición gradual de la resistencia del material, desde un estado virgen hasta un estado completamente deteriorado.

El fenómeno de la fractura frágil o quasi frágil constituye hoy en día un amplio campo de investigación que involucra a muchos investigadores dedicados al estudio de diferentes aspectos de la mecánica y la física de la fractura. La rotura quasi-frágil no es un fenómeno limitado solamente a cargas estáticas ya que también se le relaciona con la fatiga y el fallo bajo estados cíclicos de cargas. Además, es bien conocido que el aumento de la carga transforma la deformación homogénea en zonas de intensa localización de deformaciones, la antesala de la fractura.

Desde mediados de la década de 1960 se han realizado progresos considerables en el desarrollo de modelos numéricos capaces de describir la evolución de la fractura en los materiales quasi-frágiles. Para ello se han empleado enfoques basados en la mecánica de medios continuos como formulaciones de plasticidad, daño u otros modelos de fractura.

Al mismo tiempo se desarrollaban modelos dentro del Método de los Elementos Finitos que permitían una representación física y real (discreta) de la fractura mediante la introducción de la misma en aquellos elementos que eran atravesados por la fractura. Este procedimiento es el empleado en este estudio. Este enfoque, denominado Modelo Discreto de Fractura, se desarrolló originalmente dentro la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica LEMF y más tarde empleado con éxito para el modelado de fisuras cohesivas.

Gracias a los avances computacionales, hoy en día se tienen técnicas y procedimientos numéricos potentes para el modelado de la fractura. El objetivo de este capítulo es realizar una revisión histórica y actual de aquellos procedimientos empleados en el análisis de la fractura, tratando de englobar aquellos aspectos relevantes en la evolución y desarrollo del estudio de la fractura. Cada procedimiento o método de fractura es en sí un escalón para el entendimiento de este fenómeno. Entrar en detalles particulares en cada uno de ellos sale fuera del objetivo de esta tesis, por lo que si se desea abarcar más, se tendrá que consultar las referencias que este estudio hace referencia. Por otra parte, esta revisión está enfocada particularmente en dos métodos de fractura: EL Modelo de Fractura Distribuida y el Modelo de Fractura Discreta, en especial, a este último, el cual es el objetivo principal de este trabajo.

2.1.2. Antecedentes

El fallo en muchos materiales involucra la propagación de grandes densidades de grietas conocido comúnmente como fractura[289]. La fractura es un fenómeno fundamental en materiales frágiles (Bazant, 2003), presentándose sobre todo en geo-materiales como rocas, cerámicas, entre muchos otros. Estos materiales se caracterizan por ser frágiles; es decir, fallan prácticamente en ausencia de deformaciones significativas. Dicho de otra forma, el vocablo frágil se utiliza para referirse a materiales cuya rotura ocurre de forma catastrófica bajo pequeñas deformaciones. El número de grietas o fisuras es extremadamente alto y su localización y orientación es muy aleatoria. Por consiguiente, es inevitable en muchas ocasiones tratar la densidad de fractura del material como un continuo. El proceso de fractura es la causa fundamental del daño en materiales frágiles y quasi-frágiles causado por la degradación significativa de la resistencia del material bajo estados de carga. Es un proceso muy complejo debido a la estructura heterogénea de estos materiales. Cuando se habla de fractura ¹ y mecánica de la fractura se hace inevitable relacionarlo con los estudios y ensayos realizados en estructuras de hormigón.

La mecánica de la fractura es un análisis matemático del proceso mecánico que conduce a la propagación de la fractura en los materiales. Aplica métodos analíticos de la mecánica de sólidos para calcular las fuerzas de conducción en una grieta y las de la mecánica de sólidos experimentales para caracterizar la resistencia del material a la fractura. Definiremos en este caso *fractura*, desde el punto de vista ingenieril, como una discontinuidad física en el sólido[289] y como la culminación del proceso de deformación plástica. En general, se manifiesta como la separación o fragmentación de un cuerpo sólido en dos o más partes bajo la acción de un determinado estado de cargas. La necesidad de aplicar la mecánica de fractura se debe al hecho de que la mecánica clásica de los materiales es inadecuada para manejar las discontinuidades que pudiera haber en un material, razón por el cual, la disciplina de la mecánica de la fractura se desarrolló para proporcionar técnicas que permitiesen predecir la propagación de las fisuras. La mecánica de la fractura puede definirse entonces como el conjunto de ideas y/o conceptos que describen la transición *continuo-discreto* de un material.

Aunque es antiguo el interés del ser humano por conocer el comportamiento de los materiales y la física detrás, se le reconoce a Coulomb² (1776) como el pionero en la investigación de la fractura a compresión en rocas. En la actualidad, su criterio que lleva su nombre, se sigue todavía utilizando sobre todo en geo-materiales. Otro aspecto en particular con respecto a sólidos frágiles y quasi-frágiles es el fenómeno del efecto tamaño (size effect), estudiado por primera vez por Galileo Galilei³. Galileo investigó la influencia del tamaño

¹A lo largo de la tesis se usará indistintamente el término grieta, fractura y fisura.

²Coulomb C.A. (1776), Remarque sur la rupture des corps", Mémoires présentés par divers savants à l'Académie, vol.7.

³Galilei G. (1638), "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze", Elzeviri, Leida (English translation, Two new

de las estructuras en la fractura para responder el ¿por qué se rompen cuerpos. Galileo, en una visita al Arsenal de Venecia, quedó sorprendido porque los trabajadores de la construcción de barcos prestaban mayor atención en la construcción de naves de mayor tamaño que en otras de menor tamaño.

Tres siglos más tarde, durante la Primera Guerra Mundial, se desarrolla la *Mecánica de la Fractura* por el ingeniero aeronáutico inglés Griffith[152] para explicar el fallo en materiales frágiles. Tras observaciones realizadas durante su investigación sobre la fractura en láminas de vidrio, Griffith introdujo el concepto de la energía de fractura \mathcal{G}_f como una propiedad del material. La energía de fractura \mathcal{G}_f se define como la energía necesaria para crear una grieta de longitud unitaria en una superficie. Junto con este concepto, Griffith propuso los mecanismos de fractura bien conocidos como los *Modos de Fractura*, los cuales pueden visualizarse en la figura 2.1. El Modo I de fractura (Tensile Opening Mode) se refiere al proceso de fractura que ocurre normal a la aplicación de la carga. El Modo II (In Plane Shear Mode, Sliding Mode) y el Modo III (Out-of-Plane Shear Stress, Tearing Mode) son procesos de fractura por cortante; la diferencia entre ambos modos radica principalmente en su forma de fallo: En el Modo II, el desplazamiento es paralelo al plano de la superficie de la grieta y normal al frente de la grieta; en el Modo III los desplazamientos son paralelos al plano de la superficie de la grieta y paralelo a la frente de la grieta. Con normalidad se habla de *modo mixto de fractura* cuando durante el proceso de carga pudieran aparecer modos combinados de fractura.

La teoría de Griffith parte de la hipótesis de que los materiales frágiles contienen micro-grietas elípticas que introducen altas concentraciones de tensiones en sus puntas. Para Griffith, una grieta se volvía inestable cuando la energía elástica almacenada por el material alrededor de la punta de la grieta⁴ era mayor que la energía necesaria para la extensión de la misma. Su teoría predecía que la resistencia a la compresión de un material era 8 veces mayor que su resistencia a la tracción. Su gran contribución consistió en que él comprendió que el debilitamiento del material causado por una grieta podría ser tratado como un problema de equilibrio, en el cual, la reducción de la energía de tensión de un cuerpo que contiene una grieta, cuando la grieta se propagaba, podría ser comparada con el aumento de la energía superficial debido al aumento de la superficie. El trabajo de Griffith fue ignorado en gran medida por los ingenieros hasta la década de 1950. Las

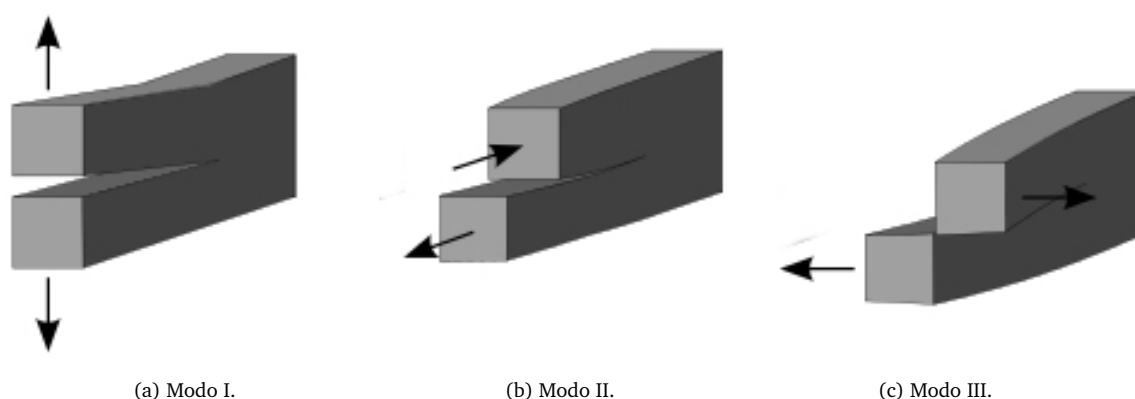


Figura 2.1: Los 3 Modos de Fractura. (a) Modo I (opening). (b) Modo II (sliding). (c) Modo III (tearing).

razones se debieron principalmente a que la energía necesaria para provocar el fallo en estructuras reales era de orden más altas de magnitud que la energía de superficie correspondiente. Por otra parte, en los materiales estructurales siempre hay algunas deformaciones inelásticas en todo el frente de la grieta en la cual, suponer

sciences, The Macmillan Company, N.Y., 1933).

⁴La cabeza o punta de una grieta hace referencia a todo el espacio que está al frente de la grieta.

un medio con tensiones infinitas en la punta de la misma es muy poco realista. Sin embargo, la teoría de Griffith proporcionó una excelente concordancia con los datos experimentales para materiales como el vidrio. Empero, para materiales dúctiles como acero, la energía superficial predicha por la teoría de Griffith era por lo general demasiado elevada.

Westergaard[178](1934) fue el primero en aplicar los conceptos de la mecánica de fractura en de vigas de hormigón. Más tarde, Irwin[194] (1957) extendió la teoría Griffith y propuso un criterio de crecimiento de la fractura. Irwin demostró además que utilizando el método de Westergaard, el campo de tensiones en la punta de una grieta está completamente determinada por la cantidad K , llamada *factor de intensidad de tensiones* (Stress Intensity Factor SIF). Barenblatt[17](1959) y Dugdale[117](1960) introdujeron el concepto de fuerzas cohesivas ubicada en la punta de la grieta, el primero dentro de los límites de teoría de elasticidad y el segundo asumiendo un material perfectamente elasto-plástico. Como consecuencia, estos trabajos derivaron más tarde en el *Modelo de Fracturas Cohesivas* (Cohesive Crack Model), el cual fue el primer intento para describir todos los procesos de fractura, aunque con algunas simplificaciones, tratando de unificar la teoría de la Mecánica de Fractura y la Mecánica del Continuo. En el Modelo de Fisura Cohesiva, la no linealidad de la zona de procesos de fractura se encuentra idealmente caracterizada por una extensión de la fisura real dentro de la cual es posible la transferencia de tensiones entre las caras de la fisura. Si bien, el modelo se basa en el concepto de fisura cohesiva desarrollado por Dugdale(1960), su difusión más amplia al campo de los hormigones y otros materiales quasi-frágiles se debe a la reformulación del problema introducida por Hillerborg a través del *Modelo de Fisura Ficticia* del que se hablará más adelante.

La primera aplicación de la mecánica de la fractura fue realizado en 1961 por Kaplan[210] en ensayos experimentales con estructuras de hormigón. El aplicó los principios de la teoría de Griffith, conocida entonces como la Teoría de la *Mecánica de la Fractura Lineal Elástica* (Linear Elastic Fracture Mechanics LEFM). Kaplan concluyó, con algunas reservas, que el concepto de Griffith era aplicable al concreto. Sus reservas fueron justificadas, ya que, más tarde, en 1972 Kesler et al. [212] demostraron que el LEMF era inadecuado para el análisis de estructura de hormigón, conclusión apoyada por Walsh[128, 129](1972, 1976) en ensayos experimentales con vigas entalladas de diferentes tamaños y geométricamente similares. De hecho, LEFM es una teoría de fallo estrictamente aplicable a materiales frágiles homogéneos que presentan respuesta elástica lineal antes del fallo. LEFM no proporciona una descripción de la zona de proceso de fractura y por lo tanto no es directamente aplicable para la modelización de materiales quasi-frágiles, lo que resulta en la incapacidad para predecir las cargas reales de fallo y las deflexiones en estructuras de tamaño normal[189]. Esto derivó en el desarrollo de la *Mecánica No Lineal de la Fractura* (No Linear Fracture Mechanics NLFM) para tomar en cuenta los efectos no lineales durante los procesos de fractura. El *Modelo de Fractura Equivalente*[375] (Equivalent Crack Model) es un intento de ello. Este modelo aproxima los procesos no lineales en la cabeza de la fractura como un alargamiento efectivo de la grieta. Esto se traduce en una reducción de la rigidez del material, que es una manifestación física del proceso no lineal en la zona de fractura.

Los primeros análisis de la fractura empleando el Método de los Elementos Finitos (FEM) fueron reportados por Clough[91](1962), Nilson[163], Ngo y Scordelis[274] (Nilson 1967, Ngo y Scordelis 1967, Nilson 1968). La figura 2.2 muestra el primer modelo de elementos finitos estudiado por Ngo y Scordelis(1967) para abordar el problema de la fractura. Ngo y Scordelis modelaron la fractura discreta, pero no abordaron el problema de la propagación de la grieta. Nilson (1967) modeló un proceso progresivo de fisuración, pero no mediante técnicas de la mecánica de la fractura, sino aplicando un criterio basado en tensiones. Tampoco tomó en cuenta la singularidad en el campo de tensiones generada en la punta de la grieta. Por tanto, puesto que la tensión máxima calculada cerca de la punta dependía del tamaño del elemento, los re-

sultados fueron altamente dependientes de la malla de elementos finitos. Desde entonces, gran parte de la investigación y desarrollo en la modelización numérica de la fractura discreta, sobre todo en estructuras de hormigón, fueron realizadas por Ingraffea y sus colaboradores[191, 192, 341] (Ingraffea 1977, Ingraffea y Manu 1980, Saouma 1981, 1982 Gerstle, Ingraffea 1983, 1986 Gerstle, Wawrzynek y Ingraffea 1987, Swenson y Ingraffea 1988, Wawrzynek y Ingraffea, 1989, 1990 Ingraffea, Martha et al. 1991) y por Hillerborg y sus colaboradores[122, 121, 175] (Hillerborg et al., 1976, 1981 Petersson, Gustafsson 1985).

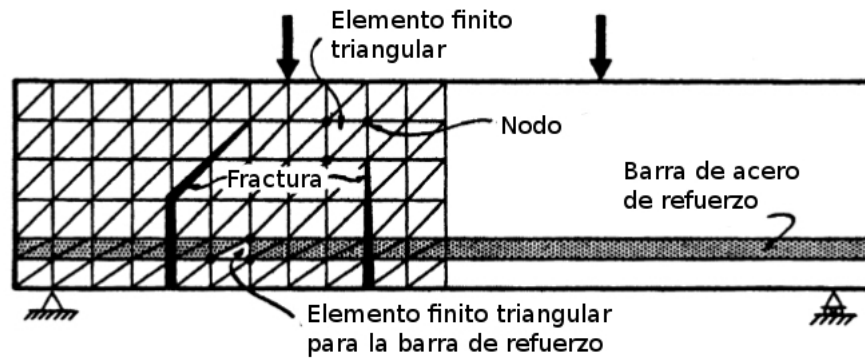


Figura 2.2: Modelado de fractura discreta. Primer modelo de elementos finitos de una viga reforzada para abordar la fractura(Ngo y Scordelis[274]1967).

Luego de que Clintock y Walsh (1962) introdujeran el concepto de *fricción entre las caras de fisuras*, Hillerborg[175](1976) marcó el punto de inflexión en el estudio de la fractura en los materiales quasi-frágiles. Su investigación comenzó cuando era profesor en el Departamento de Ciencias de Materiales del Instituto Tecnológico de Lund (Suecia) a mediados la década de 1970 con la introducción del modelo que lleva su nombre. Su objetivo era analizar el fallo en estructuras de hormigón en la cual la aplicabilidad LEFM era cuestionable. Hillerborg, Modeer y Petersson[176] (1976) estudiaron la zona del proceso de la fractura (PFZ) en las estructuras de hormigón. Encontraron que la misma era larga y estrecha. Finalmente esto derivó al desarrollo del *Modelo de Fractura Ficticia* (Fictitious Crack Model FCM), el primer modelo de la mecánica no lineal de la fractura (NLFM) en describir el proceso completo de la fractura para cualquier material quasi-frágil equipado con un criterio de inicio de propagación de la fractura. Este modelo incluye el proceso de reblandecimiento del material a través del modelado de una fractura *ficticia* delante de una grieta ya existente. Los conceptos y la terminología asociada a este modelo puede observarse en en la figura 2.3 donde se considera que las tensiones normales σ_n y las tensiones tangenciales σ_t alrededor de la fractura es función de la abertura de fisura w y de los desplazamientos tangenciales relativos v y de otras variables de estado. El Modelo de Fractura Ficticia queda completamente definido por la resistencia a tracción del material f_t y la energía de fractura \mathcal{G}_f . Este modelo es matemáticamente equivalente, pero conceptualmente diferente al Modelo de Banda de Fisura propuesta por Bazant[28]. El FCM ganó mucha popularidad y se empleó fundamentalmente para simular el proceso de la fractura (y sobre todo fractura discreta) en el hormigón (Hillerborg et al. 1976, Petersson 1981, Ingraffea y Saouma 1984, Ingraffea y Gerstle 1985, Gustafsson 1985, Gerstle y Xie 1992, Feenstra et al. 1991, Bocca et al., 1991, Yamaguchi y Chen 1991, Klisinski et al. 1991, Planas y Elices 1992, 1993).

Hillerborg et al. (1976) introdujeron el concepto de longitud característica \mathcal{L} como una propiedad del material. Más tarde, Carpinteri[1] (1980) propuso el coeficiente de fragilidad s , parámetro que serviría para medir la fragilidad del concreto y más tarde en 1986 introduce un parámetro que lleva su nombre y

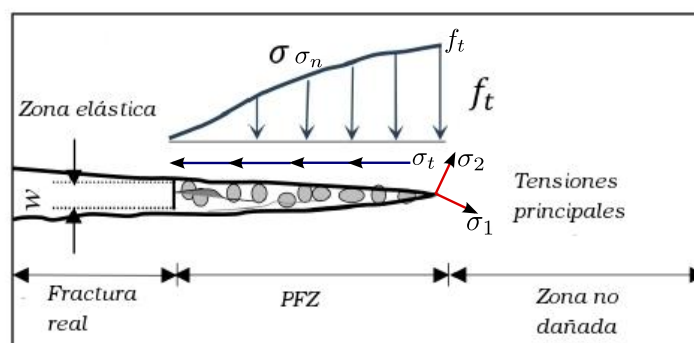


Figura 2.3: Modelo de Fractura Ficticia. Términos y conceptos asociados al Modelo de Fractura Ficticia de Hillerborg(1976).

comúnmente conocido como *Energy Brittleness Number* $s_e = \mathcal{G}_f / f_t \mathcal{L}$.

Al mismo tiempo, se realizaban una extensa investigación en la modelización de la fractura en estructuras de hormigón en masa empleando el *Método de Celosías* (Lattice Model) (Hrennikoff 1941; Roelfstra et al 1985; Burt & Dougill 1977; Herrman et al 1989; Herrman 1991; Schlangen & Van 1991; 1992; Raghuprasad et al. 1994; Ince et al. 2003; Arslan et al. 2002; Karihaloo et al. 2003). En dicho modelo, el continuo se idealiza con elementos de línea tales como barras y vigas que pueden transferir fuerzas y momentos. La ventaja de este modelo es que la heterogeneidad del material puede representarse mediante la asignación de diferentes propiedades a los miembros individuales de la celosía y otra ventaja es la posibilidad de identificar micro-grietas y las ramificaciones de fractura.

En la década de 1970 se realizaron enormes avances en el modelado de LEFM utilizando el método de elementos finitos. Chan, Tuba y Wilson (1970) señalaron que se requería un gran número de elementos finitos triangulares de tensión constante para obtener soluciones aproximadas del factor de intensidad de tensiones. Hasta ese momento, los *elementos finitos singulares*⁵ aún no se habían desarrollado. Wilson (1969) y Tracey (1971) fueron los primeros en desarrollar una tecnología de elementos de este tipo. Más tarde continuado por Tong y Pian (1973) y Owen y Fawkes (1983).

Otro enfoque importante en el modelado de fractura fue introducido por Rashid[323] en 1968 con el *Modelo de Fisura Distribuida* (Smeared Crack Model). En este enfoque, el frente de la grieta consiste en una zona difusa de microfisuras. Este enfoque fue empleado por Cervenka y Gerstle[379, 380](1972), Darwin y Pecknold[105](1976), Bazant[300](1976), Bazant y Cedolin[301](1979), Meyer y Bathe[255](1982), Balakrishnan y Murray[14, 15](1988). Bazant(1976) observó que debido a la naturaleza del ablandamiento por deformación, el concreto no podría ser del todo modelado como un continuo. Las zonas de daño tienden a localizarse a una escala que es del orden del tamaño del agregado. Por lo tanto, para poder modelar el hormigón como un continuo, se debe tener en cuenta el tamaño heterogéneo de la estructura del material. Esto implica que el tamaño máximo del elemento finito h_{max}^e tiene que estar relacionado con el tamaño de los agregados. Si la escala de la estructura es pequeña, esto no representa un problema en particular. Sin embargo, si la misma es grande en comparación con el tamaño de su estructura interna (tamaño de los agregados), los factores de intensidad de tensiones (parámetros fundamentales en LEFM) pueden proporcionar resultados más realistas que el modelo de fisura distribuida (Griffith 1920 , Bazant 1976). La mayoría de las estructuras de interés son de un tamaño intermedio, es decir, se encuentran entre estos dos extremos.

⁵Esta tecnología de elementos era capaz de modelar exactamente el estado de tensión en la punta de una grieta.

En 1976 se inicia el estudio del efecto tamaño en los procesos de localización de las deformaciones. Al día de hoy, las teorías empleadas para interpretar el efecto tamaño sobre la tensión nominal de rotura σ_{Nu} se basaron en la teoría estadística de Weibull desarrollada para materiales frágiles[388]. Si bien esta teoría predice la disminución de la tensión nominal de rotura a medida que aumenta el tamaño D de la estructura, ha quedado demostrado que en materiales como el concreto y las rocas las predicciones basadas en la teoría de Weibull no es suficiente para explicar los resultados experimentales. Una de las razones por la cual esta teoría estadística resulta insuficiente en este tipo de materiales es que a diferencia de lo que ocurre con los materiales frágiles, donde la rotura se produce por la propagación de una única imperfección en carga máxima, en las rocas y los hormigones la rotura va acompañada por el crecimiento y coalescencia de varias imperfecciones o microfisuras antes de la carga máxima[329]. La teoría de Weibull sólo es aplicable a materiales quasi-frágiles cuando el tamaño de la estructura es tan grande que la heterogeneidad del material es despreciable y el comportamiento estructural global cambia de quasi-frágil a frágil. La fractura se asocia entonces con el crecimiento no lineal de la zona de fractura definida por una *escala de longitud característica* correspondiente a la dimensión de la micro-estructura heterogénea del material. Esta escala de longitud característica se considera una propiedad del material y se mantiene constante independientemente del tamaño de la estructura. La extensión de la zona de proceso de fractura resulta por consiguiente en la redistribución de las tensiones y la liberación de la energía almacenada, siendo ésta última una función del tamaño de la estructura. En un sentido cualitativo, la estructura más grande posee mayor energía elástica a una tensión nominal dada y por lo tanto mayor potencial para propagar la fractura. Por consiguiente, las estructuras más grandes presentan una respuesta más frágil, al contrario que las estructuras más pequeñas que presentan una respuesta más dúctil. Dicha observación puede verificarse en la en la figura 2.5 que representa la *ley de Bazant* de efecto tamaño, donde las grandes estructuras se ubican en el límite asintótico de LEFM y las pequeñas se acercan asintóticamente a una ductilidad perfecta dado por el Criterio de Resistencia. Como se observa en la misma figura, los materiales quasi-frágiles se caracterizan por estar en la transición de Criterio de Resistencia y LEFM, el cual define el dominio de NLFM, indicando que la descripción de materiales quasi-frágiles requiere una combinación de los parámetros de ambos criterios, es decir, la resistencia a la tracción f_t y la energía de fractura \mathcal{G}_f . Observe que las curvas de efecto tamaño definidas por LEFM y el Criterio de Resistencia de resistencia son en general incapaces de recuperar el efecto tamaño en el material quasi-frágil. La incapacidad de estas dos teorías para explicar la respuesta quasi-frágil es debido a la ausencia de una escala de longitud característica correspondiente a la dimensión de heterogeneidad de la microestructura del material. Estas teorías no proporcionan ninguna descripción de la zona de proceso de fractura, que es fundamental para el mecanismo de fractura quasi-frágil, y por tanto, no es aplicable a estos materiales[222].

Bazant y Oh [28](1983) propusieron el *Modelo de Banda de Fisura* (Crack Band Model), que es esencialmente idéntico al modelo de Hillerborg, pero elaborado en el contexto de la mecánica del medio continuo. Estos desarrollos mostraron que, en el contexto del FEM, el concepto de ablandamiento por deformación no debe considerarse como una característica del material, ya que está relacionada con la energía de fractura del material y del tamaño del elemento finito. La *ley de Bazant* de efecto tamaño elaborada dentro de este contexto proporcionó una medida de la fragilidad en las estructuras de hormigón. El Modelo de Banda de Fisura relaciona la respuesta constitutiva del ablandamiento por deformación con un ancho de banda de fractura h_c , el cual se considera como propiedad del material. Por lo general, el ancho de banda de fisura se asocia generalmente con la heterogeneidad de material, así que, en materiales como el concreto, el tamaño de la banda será acorde con el máximo tamaño del agregado. En consecuencia, la localización de la deformación inelástica ocurre en un volumen finito de la banda de fisura asegurando la disipación finita (véase 2.4). La

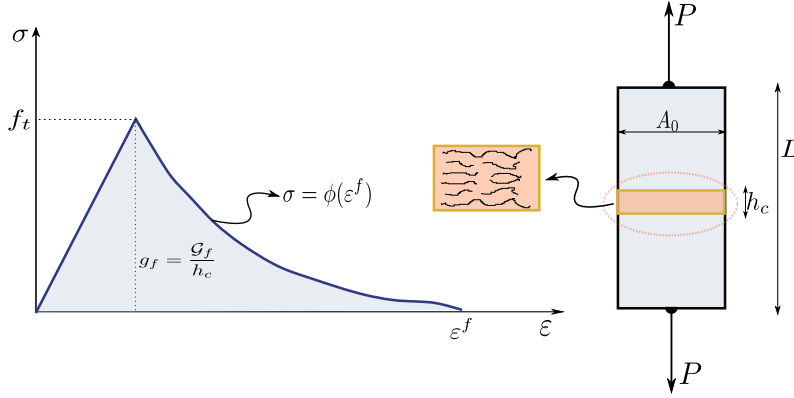


Figura 2.4: Modelo de Banda de Fisura. Respuesta del sistema equipado con ablandamiento por deformación en la banda de la fisura.

deformación en la banda de fisura es equivalente a la de una fisura cohesiva si el alargamiento de la fractura $\Delta L = h_c \varepsilon^f$ se identifica con el desplazamiento abertura de fisura cohesiva w , tal que $w = h_c \varepsilon^f$. Para obtener una correspondencia idéntica entre el Modelo de Banda de Fisura y el Modelo de Fisura Cohesiva, la función constitutiva ϕ que define el ablandamiento requiere que $\phi(\varepsilon^f) = \phi(w)$.

Una banda de fisura exhibe una distribución constante de deformación y una variación lineal del desplazamiento a través del ancho de la banda, mientras que una fisura cohesiva exhibe una función delta de Dirac en la deformación y un salto $[[u]]$ en desplazamiento a través de la grieta. Se dice entonces que la descripción de banda de fisura es más realista en la iniciación del reblandecimiento, donde el daño en el material es más disperso, mientras que una fisura cohesiva es más realista al final del reblandecimiento, donde el daño disperso se une para formar una fractura discreta localizada[222]. Finalmente, para usar el Modelo de Banda de Fisura, se requiere definir una longitud h_e de cada elemento finito Ω_e . Con normalidad y por simplicidad, para elementos cuadriláteros y hexaedros regulares se toma como raíz cuadrada del área $h_e = A_e^{1/2}$ y la raíz cúbica del volumen $h_e = V_e^{1/3}$ respectivamente.

Por otro lado, durante el mismo periodo, Hillerborg (1983, 1985) logró mejorar el modelo de ficticio de fisura para su posterior uso en el hormigón. El análisis por FEM mostró que este modelo predice, para el fallo a flexión de vigas de hormigón, un efecto tamaño determinístico. En [61] Carpinteri sugiere la naturaleza fractal de las superficies de fractura y propone que la microestructura heterogénea es fuente de efecto tamaño en materiales quasi-frágiles. Sin embargo, a falta de corroboración experimental se ha desechado tales afirmaciones.

Una vez superado el problema de la dependencia del tamaño de la malla, se identificó luego una más complicada. A principios de 1990, se reconoce que las soluciones por FEM presentaban una solución *dependiente* de la malla de elementos finitos (mesh-bias dependence). Se observó además que si se realizaba una apropiada discretización para el avance de la fractura, o en otras palabras, si los elementos finitos se alineaban acorde con la dirección de la fractura, se obtenían soluciones satisfactorias. Como una solución parcial a este problema se recomendó entonces el remallado adaptativo (véase[412, 416]). En los últimos 15 años, gran parte de la investigación en la mecánica de sólidos se ha dedicado a remediar este problema, ahora denominado *Mecánica Computacional de la Fractura* (Computational Failure Mechanics).

Posteriores investigaciones han propuesto (véase[67, 204, 205]) modelos de fisura distribuida que incorporan el efecto del salto en campo de los desplazamientos. Estos modelos se conocen hoy en día como el

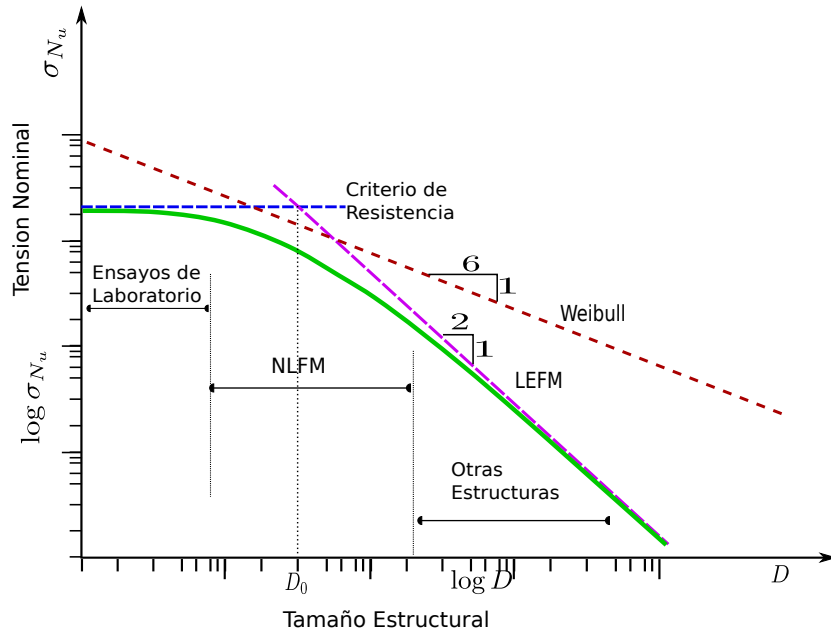


Figura 2.5: Efecto Tamaño. *Efecto tamaño en materiales quasi-frágiles*[302].

Modelo de Fisura Distribuida con Discontinuidades Embebidas (Embeded Smeared Crack Model). Los cálculos son realizados a nivel constitutivo, el cual permite emplear los elementos finitos estándares con campos de desplazamiento continuos y realizar un análisis no lineal. Por lo tanto, estos modelos vienen a ser una mejora del *Modelo de Fisuras Ortogonales* (Orthogonal Crack Model) propuesta por Rashid[323] en 1968. No obstante este modelo requiere la introducción de correcciones para evitar la dependencia de la malla de elementos finitos[67].

En el mismo sentido, Simo et al. [354, 355], J. Oliver[277, 278] y Oliver y Huespe[281, 282, 283, 284, 286] propusieron dentro del marco de los modelos de fisura discreta el enfoque de las *discontinuidades fuertes*. Este enfoque plantea una nueva formulación de elementos con *discontinuidades embebidas* que dependen unas condiciones estáticas y cinemáticas supuestas. El mismo representa un esfuerzo para abordar directamente el problema de la fractura discreta. En este caso, la interpolación estándar de elementos se enriquece con un término adicional que representa el salto en los desplazamientos. No obstante, esta formulación requiere del uso de *algoritmos de rastreo* (Tracking Algorithm) para establecer el camino que seguir la fractura y enriquecer los elementos que se encuentren en dicho camino.

Sin embargo, el más prometedor de los métodos de fractura ha sido desarrollado por Belytschko et al. [30, 256, 368]: El *Método de los Elementos Finitos Extendidos* (Extended Finite Element Method X-FEM). Este enfoque permite modelar la propagación de la fractura sin remallar, a costa de enriquecer los grados libertad con otros nuevos que representan tanto el salto del desplazamiento través de la grieta así como también el campo singular de tensiones en la punta de la fractura. Se requieren métodos refinados de integración para aquellos elementos que son atravesados por la fractura.

Recientemente, Cervera et al. [73, 74, 245] han investigado las ventajas de la *formulación mixta* en la mecánica de sólidos y han empleado dicha formulación en combinación con modelos de fisura distribuida para análisis de localización de deformaciones en modo I y II de fractura. Sus ensayos numéricos muestran

la potencia de esta formulación, obteniendo sorprendentes resultados, independientes de la orientación de la malla de elementos finitos y sin utilizar un algoritmo de rastreo. Como contrapartida, está el alto coste computacional propio de los métodos mixtos debido a la adición de nuevos grados de libertad. En base a esta motivación, el autor de esta tesis ha desarrollado la *versión explícita de la formulación mixta* que en combinación con un modelo discreto de fractura constituirán el punto central de este trabajo.

Actualmente se reconoce que los dos enfoques principales que se utilizan en el Método de los Elementos Finitos (FEM) para representar la fractura en los materiales son el *Modelo Fisuras Discretas* (Discrete Crack Model) y el *Modelo de Fisuras Distribuidas* (Smeared Crack Model). Ambos procedimientos compiten, donde versiones mejoradas de estos enfoques se han desarrollado, manteniendo la base de la formulación original. En la siguiente sección abordará en detalle cada uno de estos procedimientos. Por otro lado, abarcar toda la evolución y desarrollo histórico de la mecánica de la fractura, no son considerados en los alcances de este estudio y solo aquellos aspectos considerados relevantes fueron mencionados.

2.1.3. Modelo Fractura Distribuida

El Modelo de Fractura Distribuida (también llamado Modelo Difuso de Fractura) es un concepto de ingeniería muy popular para la simulación numérica de los procesos de fractura en los materiales quasi-frágiles. La formulación del daño distribuido para la simulación de las fisuras a tracción tiene sus orígenes en la mecánica computacional de medios continuos. Por ende, los criterios tanto de propagación como de dirección de fisura están básicamente planteados en términos de tensiones y deformaciones. Los modelos de fisura distribuida suponen que el material *dañado* se mantiene continuo, por lo que no es necesario hacer remallado o refinamientos en la malla de elementos finitos durante el cálculo. La degradación del material se simula cambiando sus propiedades mecánicas (rigidez y resistencia) en función de la evolución del estado tenso-deformacional[68]. Idealmente, los modelos de fisura distribuida deben ser capaces de representar la propagación de una sola grieta o varias con una precisión razonable.

Bajo la hipótesis de la mecánica de medios continuos, el modelo de fractura distribuida considera que la creación de una fisura por tensiones de tracción (modo de fractura tipo I) es un fenómeno físico que consiste en la acumulación de deformaciones en una determinada zona del sólido sometido a carga creciente. Durante el proceso de formación de la fisura se libera la energía elástica acumulada por el material en la zona donde se localizan estas deformaciones. La liberación de esta energía puede ocurrir de forma repentina, haciendo que el material falle sin que apenas muestre deformaciones, (comportamiento frágil), o de una forma más suave, con deformaciones que se pueden apreciar antes de la rotura del material (comportamiento dúctil). Así, por ejemplo, en los materiales cerámicos, la fractura ocurre bajo deformaciones relativamente bajas, mientras que en materiales como el acero se pueden formar grandes deformaciones debido a la plastificación del material en la zona de proceso de localización antes de alcanzar el colapso total. En los llamados materiales quasi-frágiles se observa un comportamiento intermedio, tal que para valores moderados de deformación se libera la energía en su totalidad. Una vez liberada la energía, el material ya no es capaz de soportar tracciones en esa zona, formándose entonces una fractura discreta. El proceso total se puede caracterizar con dos parámetros característicos del material: Su resistencia a tracción f_t y la energía de fractura \mathcal{G}_f .

La fisura distribuida ha sido ampliamente utilizada desde que Rashid[323] (1968) la aplicara por primera vez al hormigón. De hecho, actualmente se encuentra implementada en muchos códigos comerciales de elementos finitos con muy pocos cambios con respecto a la versión original. Desafortunadamente, uno de los primeros inconvenientes que se encontraron los investigadores al tratar con esta formulación es que el si el

daño distribuido ocurre en una franja de un elemento finito de ancho, la disipación de energía es proporcional al tamaño de dicho elemento. Así, si la malla se refina hasta tamaños infinitesimales, desaparece la disipación de energía, lo cual es físicamente inadmisibles[90]. Este problema fue resuelto por Bazant y Oh[28] (1983), quienes propusieron el *Modelo de Banda de Fisura*. En dicho modelo, el ablandamiento del material se relaciona con la energía de fractura del material y además con el tamaño del elemento finito por la cual pasa la fractura.

De acuerdo con la evolución de la dirección de la fisura distribuida, se han desarrollado dos aproximaciones diferentes:

1. El **Modelo de Dirección Fija de Fisura** (Fixed Crack Models). Bazant y Oh[28] propusieron *El Modelo fijo de Fisura* en el cual se fija la orientación de la banda de fisura y los ejes de ortotropía en el inicio del ablandamiento. La posterior reorientación del campo de tensiones induce tensiones de cortante paralelas a la banda de fisura. Estas tensiones de corte están representadas físicamente por la interacción de las asperezas en la superficie de las grietas. Este modelo asume que dicha reorientación es directamente proporcional al módulo de elasticidad cortante G multiplicado por un *factor de retención al corte* β . Este factor de retención al corte permite el incremento indefinido de las tensiones de corte lo que evita la disipación de la energía de corte resultando en una respuesta excesivamente rígida[155, 334].

La manifestación física de la tensión de corte en las grietas que se propagan es la desviación de la trayectoria de propagación para recuperar la orientación energéticamente más viable[222]. Por lo tanto, los materiales quasi-frágiles poseen un mecanismo natural para aliviar la excesiva tensión de corte, lo que corresponde macroscópicamente a una rotación efectiva de la banda de fisura. A la luz de las observaciones físicas, el factor de retención de corte es arbitrario, una conclusión confirmada por la dificultad de verificación experimental. Con el fin de eliminar la necesidad de definir explícitamente el factor de retención de corte, Rots[199, 334] se propone una expresión en base a unos límites de cortante asumidos con el propósito de inducir una respuesta de menos rígida. Sin embargo, este ablandamiento adicional no proporciona un remedio absoluto. El Modelo Fijo de Fisura es por lo general demasiado rígido en la respuesta, lo que resulta en tensiones de cortantes severas que bloquean la solución.

2. El **Modelo De Fisura Rotante** (Rotating Crack Models). De Bosrt y Nauta[108] propusieron *El Modelo de Múltiples Fracturas Ortogonales* (Multiple Fixed Crack Model) para aliviar el efecto del bloqueo por cortante del Modelo Fijo de Fisura. Este modelo permite la inserción de múltiples bandas de fracturas fijas ortogonales dentro de incrementos finitos de desplazamiento angular. El razonamiento físico detrás es que a medida que el campo de tensiones gira, se propagan nuevas grietas abriéndose en la orientación óptima de fractura, mientras que las grietas existentes experimentan cizallamiento y descarga en cierto grado. Aunque este modelo alivia el bloqueo tensional por cortante, la hipótesis de asumir un acoplamiento despreciable entre las grietas ortogonales resulta en exceso de disipación[222]. Este modelo viola la condición de invariancia, es decir, los ejes principales de tensión y deformación no coinciden, además de ser demasiado complejo. Sin embargo, existe un caso interesante para un incremento angular pequeño, si se supone que las grietas existentes se cierran con la rotación de los ejes principales de ortotropía y los ejes principales de tensión. Tal hipótesis es asumida en el Modelo de Fisura Rotante, que es un mecanismo eficaz para eliminar el bloqueo por cortante y se ha demostrado que reproduce una respuesta más fiable en comparación con el modelo de fisura fija[137].

El Modelo de Fisura Rotante es independiente de la historia de carga, por lo cual, la orientación de banda de fisura no siempre puede reflejar la dirección real del daño, lo que limita su aplicabilidad sólo para procesos de carga en la cual la rotación de las direcciones principales de tensión son pequeñas. Además,

este modelo sobre-flexibiliza la respuesta al corte reflejando reducidas tensiones de corte. Como una solución a los inconvenientes del Modelo Fijo de Fisura y el Modelo de Fisura Rotante Bazant[22] propone *El Modelo de Microplanos* el cual permite la fractura simultánea en múltiples orientaciones que relaja el bloqueo por cortante al tiempo que introduce una fuerte dependencia de la historia de la trayectoria de fractura. Sin embargo, este modelo es demasiado complejo para las hipótesis en las que se basa y generalmente exhiben un acoplamiento arbitrario entre la dirección del daño y la disipación energética. Recientemente, como otra alternativa, Klerck[222] propone un *Modelo Estabilizado de Fractura Rotante* en el cual, la orientación de la banda de fisura se define por la media ponderada de las direcciones de deformación. Las bandas de fisura se mantiene fija durante el proceso descarga y re-carga con lo cual, la orientación promedio refleja la historia de fractura. Sin embargo, al igual que su modelo génesis, este modelo viola la condición de invariancia.

Posteriormente se hizo patente otro problema con este enfoque del Modelo Difuso de Fractura. Sus soluciones presentaban una dependencia de la orientación de la malla[23, 271, 307] Algunos trabajos recientes afirman que el problema de la dependencia de orientación de la malla está en el hecho de que cuando se produce el ablandamiento del material (y por consiguiente el cambio de la pendiente de la curva tensión-deformación y el cambio de la matriz de rigidez tangente), las ecuaciones de gobierno del problema continuo dejan de ser elípticas. Para remediar esto, se han planteado diferentes modelos no locales, en lo que efectivamente se evitan los altos gradientes de desplazamientos. Estos modelos tienen en común la utilización de un parámetro que limita la localización, usualmente denominado *limitador de localización*.

De acuerdo a su formulación y con el objeto de superar las deficiencias del esquema de fisura distribuida se pueden distinguir los siguientes enfoques:

1. **Modelos No Locales** (Pijaudier-Cabot[308], 1996; Hall y Hayhurst[165], 1991; De Vree et al. [110], 1995; Milan Jirásek[201], 1998, Comi et al. [55], 2002). A pesar del largo historial de los modelos continuos no locales, la modelización no local a nivel constitutivo se empleó por primera vez como limitadores de localización en la década de 1980. Bazant[21], después de realizar algunas formulaciones preliminares explotando el concepto de “*imbricate elements*” propuso entonces la Teoría Del Modelo de Daño No Local[308]. Las formulaciones no locales fueron desarrolladas para diferentes modelos constitutivos, incluyendo la plasticidad con ablandamiento, modelos de fisura distribuida, modelos microplanos, etc.

Por lo general, el enfoque no local consiste en reemplazar una cierta variable por su contraparte no local obtenida haciendo un promedio ponderado sobre la vecindad espacial de cada punto en consideración. Si $f(\mathbf{x})$ es un campo local en el dominio Ω , su contraparte no local se expresa como:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \alpha(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.1.1)$$

en donde $\alpha(\mathbf{x}, \xi)$ es la función de peso no local, \mathbf{x} es el punto fuente y ξ en punto receptor. En un medio infinito, la función de peso depende sólo de la distancia entre el punto *fuente* ξ y el punto *receptor* \mathbf{x} . En el contorno, la función de peso se reformula tal que el operador no local no altere el campo de tensiones. Esto se alcanza, definiendo $\alpha(\mathbf{x}, \xi)$ como

$$\alpha(\mathbf{x}, \xi) = \frac{\alpha_0(\|\mathbf{x} - \xi\|)}{\int_{\Omega} \alpha_0(\|\mathbf{x} - \zeta\|) d_{\Omega}} \quad (2.1.2)$$

donde $\alpha_0(r)$ es una función no negativa, monótona decreciente y $r = (||\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}||)$. Con frecuencia α_0 se toma como cualquiera las dos siguientes funciones

$$\ln(\alpha_0(r)) = -\frac{r^2}{2h^2} \quad (2.1.3a)$$

$$\alpha_0(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases} \quad (2.1.3b)$$

donde 2.1.3a es la función de Gauss, 2.1.3b se conoce como la *función campana*, h es la longitud no local del continuo y R es el radio de interacción, es decir, la distancia más lejana en la que el punto $\boldsymbol{\xi}$ afecta al punto \mathbf{x} . Observe que en la función 2.1.3a el radio de interacción $R = \infty$.

2. **Modelos De Gradiente** (De Borst y Muhlhaus[107], 1992; Peerlings et al. [305], 1998; De Borst[49], 2001). Los modelos de gradiente pueden ser considerados como la contraparte diferencial de la formulación integral de los modelos no locales. En vez de tratar con integrales que representen las interacciones espaciales, se toma la micro-estructura en consideración incorporando la influencia de los gradientes (al menos de primer orden) de las variables internas de las relaciones constitutivas. En un modelo de plasticidad, la tensión de fluencia σ_y no sólo dependería de la variable de endurecimiento plástico κ sino también de su gradiente $\nabla^2 \kappa$. En el caso de ablandamiento isótropo, dicha ley se escribe como [49]:

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + H(\kappa + l \nabla^2 \kappa) \quad (2.1.4)$$

siendo σ_{y0} la tensión inicial de fluencia, l es una propiedad de material con unidad de longitud y H el modulo plástico. La variable de endurecimiento plástico κ se define usualmente como una deformación plástica acumulada, la cual se obtiene integrando en el tiempo la norma del tensor de velocidad de deformación. Bajo estados de deformaciones uniaxiales, la variable de endurecimiento κ es igual a la deformación plástica ε_p , por lo que el laplaciano se $\nabla^2 \kappa$ se reduce a una derivada de segundo orden, o sea, ε_p'' . Mientras la tensión plástica sea constante en el espacio, su segunda derivada desaparece, y se reduce a la ley de ablandamiento clásica $\sigma_y = \sigma_{y0} + H(\varepsilon_p)$. Cuando se inicia la localización, dicho término se activa. La superficie de fluencia $\Phi = \sigma - \sigma_y = 0$ implica que dentro de la región plástica la deformación plástica debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\sigma - \sigma_{y0}}{H} = \varepsilon_p + h \varepsilon_p'' \quad (2.1.5)$$

Dependiendo de cómo se proceda a resolver la ecuación anterior, los métodos de gradiente se dividen en *explícitos* e *implícitos*. La implementación numérica de modelos de gradiente explícitos requieren modificaciones radicales en los códigos de elementos finitos. A menudo se requiere emplear elementos finitos de tipo C^1 o elementos mixtos que involucren una interpolación distinta para cada una de sus variables. También aparecen ciertos problemas cuando el proceso plástico tiene lugar en las interfases del contorno. Sin embargo, los nuevos desarrollos muestran que es mas robusto usar un modelo de gradiente implícito. En esencia, los modelos de gradiente implícitos son equivalentes a los modelos no locales salvo que ahora se emplean funciones no locales de peso especiales.

3. **Modelo de Coserrat o Micropolar** (De Borst[48], 1991; De Borst et al. [313], 1993) Este modelo emplea la teoría de la Cosserat⁶ (1909), que aumenta los tres grados de libertad traslacionales de un continuo

⁶Cosserat, E. and Cosserat, F. Théorie des Corps Deformables, Herman, Paris (1909).

agregando tres grados de libertad rotacionales. Esto implica que además del módulo de elasticidad, se introduce un *módulo de flexión* que entra en la descripción del material. Dado que el cociente de módulo de Young y el módulo de flexión tiene dimensión de longitud, este concepto introduce efectivamente una *longitud característica* en la formulación constitutiva. Según De Borst[48], la pérdida de elipticidad en un modelo continuo deja de ser una representación significativa de la realidad física. Una vez tenga lugar el ablandamiento por deformación, se alcanza el límite de la validez de los modelos continuos clásicos. Es aquí donde el uso de los modelos continuos de orden superior, como el modelo de Cosserat, se hace necesario.

El problema con el modelo de Cosserat es que los grados de libertad rotacionales sólo se activan bajo cargas de cizallamiento, por lo que en modo I de fractura, este modelo ya no es aplicable ya que las micro-curvaturas permanecen nulas[107].

4. **Modelo de regularización viscosa** (Wang et al. [387], 1997) Estos modelos se basan en la adición de una tasa de endurecimiento por deformación (visco-plasticidad) que llega a regular la patología de la dependencia de la malla. La escala de longitud visco-plástica es una función de los parámetros de endurecimiento por deformación, la velocidad de deformación y algunos parámetros del modelo constitutivo. El mecanismo básico de regularización viscosa se puede explicar de la siguiente manera: el aumento de la velocidad de deformación hace que el elemento se vuelva de nuevo más rígido, por lo que este fenómeno hace que la deformación no se acumule en un elemento. La regularización viscosa se puede introducir en el modelo constitutivo, ya sea en una forma de *modelos visco-plásticos de sobre-tensiones*⁷ (modelos Perzyna y Duvaut-Leones) o mediante el uso de un modelo de consistencia. Wang[387] mostró que los resultados obtenidos a partir del *modelo de la consistencia* son tan buenos como los resultados de los modelos sobre-tensiones. Sin embargo, el incremento de la viscosidad aumenta la escala de longitud visco-plástica retrasando así la localización de las deformaciones y cambiando la física del problema.
5. **Modelo de regularización numérica** (Bazant, 1976; Oliver[277], 1989). Según Oliver[277], en un caso bidimensional, la fractura puede idealizarse como un caso límite de dos líneas singulares que al ser paralelas forman una banda de ancho finito y que tienden a coincidir una con la otra a media que el ancho tiende a cero. A partir de la energía disipada dentro de la banda se define entonces una expresión analítica de la longitud característica. Esta longitud se expresa como la relación entre la energía disipada por unidad de superficie (energía de fractura) y la energía disipada por unidad de volumen (energía específica) cuya expresión garantiza la objetividad de los resultados con respecto a la malla de elementos finitos.
6. **Modelo basados en remallado** (Zienkiewicz et al. [412, 416], 1995; Díez et al. [120], 2000). Como se comentó con anterioridad, este modelo surgió de la necesidad de resolver parcialmente los problemas de la dependencia de la malla. La idea básica es realizar un remallado adaptativo durante el proceso de cálculo en las zonas donde se concentra las deformaciones. Como resultado, la banda de localización presenta más concentraciones de elementos finitos que en otras zonas de la malla. El problema principal no sólo radica en el coste computacional del remallado mismo, sino que también involucra la interpolación o *transferencia* de los datos de una malla anterior a la nueva malla. Una forma especial de remallado consiste en realizar un refinamiento local adaptativo, en la cual una zona de la malla se

⁷Over-stress viscoplasticity model.

refina, es decir, nuevos elementos se crean a partir de un elemento finito base [53, 270, 331]. La ventaja de usar un refinamiento es que, para elementos simpliciales como triángulos y tetraedros lineales, la interpolación es simple: los nuevos elementos creados en el refinamiento heredan todos los datos contenidos de su elemento padre. La desventaja es que si no se tiene un control en el refinamiento, algunas zonas de la malla pudieran tener elementos con muy mala relación de aspecto.

7. **Modelo basados en la manipulación de las propiedades del material acorde con el tamaño del elemento.** (W.A.M. Brekelmans y J.H.P. Vree [52], 1995). Este método descrito en [52] reduce la sensibilidad de malla con respecto a el comportamiento global de la estructura en estudio. Debido a la manipulación de las propiedades del material, discutible desde el punto de vista físico, la deformación y la distribución local del daño no se simula de forma fiable, siendo la principal desventaja de este procedimiento.
8. **Modelos basados en formulación mixta** (Cervera et al. [69, 73, 74, 75]). Cuando en el método de los elementos finitos se emplean dos o más espacios para aproximar dos o más variables diferentes, se habla entonces de formulación mixta. En algunos casos, estas variables se introducen en la formulación del problema debido a su interés físico y por lo general se relaciona con algunos derivados de la variable original. Por ejemplo, en las ecuaciones de elasticidad, las tensiones pueden ser aproximadas al mismo tiempo que los desplazamientos. La formulación mixta tiene sus inicios en la década de 1960 cuando se hicieron patentes los problemas de incompresibilidad y bloqueo volumétrico en los elementos finitos estándares de bajo orden. Cervera et al. han desarrollado una formulación mixta en *desplazamiento-presión* (\mathbf{u}, p) , *desplazamiento-tensión* $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ y *desplazamiento-deformación* $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon})$ la cual permite aproximar la solución empleando la misma función de interpolación en ambos campos y contrarrestar las restricciones impuestas por Ladyzenskaya-Babuska-Brezzi⁸ mediante técnicas de estabilización. Dicho método se le conoce como métodos mixtos estabilizados. Por consiguiente, el empleo de elementos de bajo orden como triángulos y tetraedros se hace posible. Cervera ha empleado la formulación mixta combinada con un modelo de fisura distribuida para estudiar el fenómeno de la localización de deformaciones en materiales tipo $J2$ y materiales quasi-frágiles. Los resultados numéricos obtenidos muestran la potencia de la formulación mixta para capturar favorablemente la localización de las deformaciones además de eliminar la dependencia de la malla de elementos finitos durante dicho proceso y sin usar algoritmos de rastreo. La limitada popularidad de los elementos mixtos radica en su alto coste computacional debido a los nuevos grados de libertad añadidos⁹. Por otra parte, los sistemas mixtos de ecuaciones con frecuencia son indefinidos por lo que requieren estrategias especiales de resolución de ecuaciones.

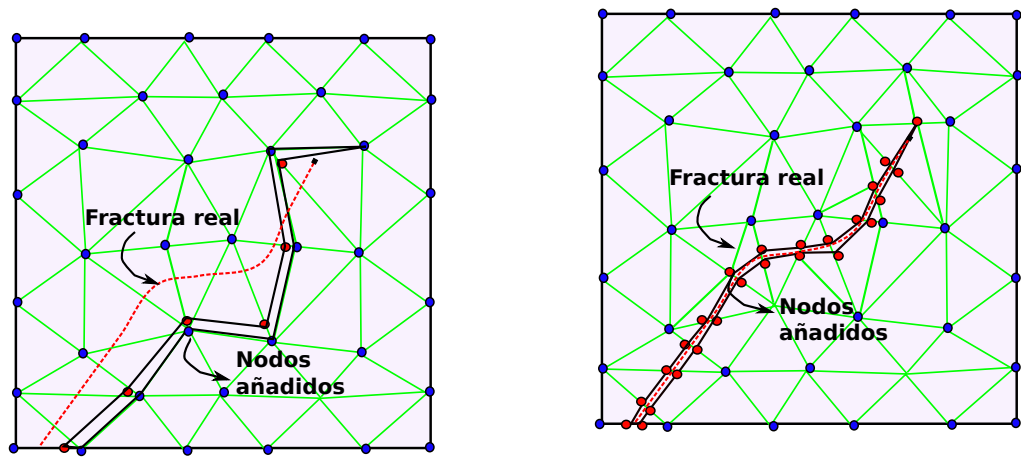
Actualmente los modelos de fisura distribuidas se encuentra implementados en muchos códigos comerciales de elementos finitos con muy pocos cambios respecto a la versión original. Las razones principales para adoptar este enfoque se debe en primer lugar a que este procedimiento es computacionalmente conveniente y la implementación es relativamente simple; y en segundo lugar, en las estructuras se observan a menudo una distribución generalizada del daño y una densa distribución de grietas paralelas.

⁸Cuando el método de Galerkin se aplica a elasticidad casi incompresible o totalmente incompresible en el contexto de un método de elementos finitos mixtos, tiene que evitar la condición Ladyzenskaya-Babuska-Brezzi (condición LBB o condición Inf-Sup) para lograr la solvencia única, convergencia y robustez. Esto impone severas restricciones en la elección de los espacios de soluciones para las incógnitas. Sin equilibrar adecuadamente, la solución mostrará oscilaciones significativas. Esto impide el uso de elementos que emplean iguales e independientes funciones de interpolación en los campos $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon})$, (\mathbf{u}, p) , $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$.

⁹Por ejemplo, en un caso tridimensional, la formulación mixta tensión- desplazamiento $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ tiene 9 grados de libertad por nodos.

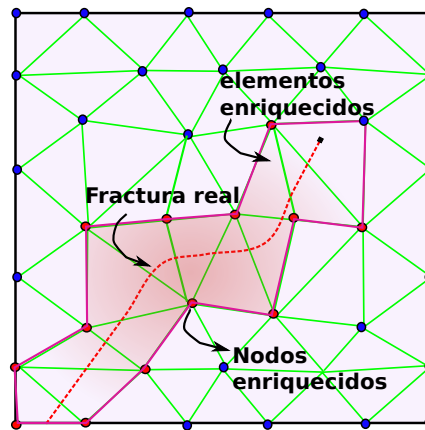
2.1.4. Modelo de Fractura Discreta

Los modelos de fractura discreta se basan en la teoría de la mecánica de la fractura. Esto implica que la propagación y predicción de la dirección de la fractura se basa en un criterio energético. El modelo de fractura discreta representa la fractura como discontinuidad en la malla de elementos finitos como se muestra en la figura 2.6. Dependiendo del esquema empleado, los modelos discretos de fractura pudieran agruparse según cambien o no la topología de la malla, es decir, en aquellos que modelan la discontinuidad de la fractura mediante una función *salto* dentro de la formulación cinemática del elemento (véase figura 2.6c), y en aquellos en que la discontinuidad de la fractura se representa físicamente en la malla de elementos finitos (véase figuras 2.6a y 2.6b). Esta última es la estrategia empleada en esta tesis. La ventaja de este último enfoque es que permite simular procesos de fragmentación de materiales. Otra forma de modelar la fractura discreta es mediante el conocido *Modelo Ficticio de Fractura*. Uno de los primeros registros del



(a) Modelo discreto de fractura sin remallar.

(b) Modelo discreto de fractura con remallado.



(c) Modelo discreto de fractura (sin remallar) con enriquecimiento nodal y/o enriquecimiento elemental y/o enriquecimiento cinemático.

Figura 2.6: Modelos discretos de fractura. (a) Sin remallar (b) con remallado (c) con enriquecimiento cinemático, nodal o elemental.

enfoque discreto de fractura fue reportado a Ngo y Scordelis[274] quienes modelaron la fractura como una separación de los puntos nodales que inicialmente ocupaban la misma posición espacial. Evidentemente la respuesta fue dependiente de la malla de elementos finitos y la fractura solo se formaba a lo largo de los lados del elemento y no dentro del mismo como se puede observar en la figura 2.6a. Por consiguiente, cuando la fractura se propagaba, requería la actualización de la malla creando nuevos nodos pero sin crear nuevos elementos. En otras palabras, solo era necesario realizar un cambio en la conectividad acorde con los nuevos nodos insertados. Como consecuencia, los grados de libertad aumentaban proporcionalmente con la inserción de los nuevos nodos, con lo que el número de ecuaciones a resolver era mayor, que en ocasiones dificultaban la convergencia estática durante los procesos altamente no lineales producidos por la fractura.

Con el propósito de reducir la dependencia de la malla, este modelo fue mejorado realizando la fractura dentro del elemento. Este proceso requería de un remallado adaptable en el cual se introducían nuevos nodos y elementos de manera que los bordes de éstos se alineaban a lo largo de la fractura (véase 2.6b) Este proceso era trivial en $2D$, la migración de dicha idea a $3D$ requería un enorme esfuerzo computacional. Aunque este procedimiento reducía la dependencia de la malla pero sin llegar a eliminarla, era a costa de tiempo de cálculo, siendo necesario efectuar frecuentes remallados con el fin obtener una aproximación razonable de la propagación de la fractura. Remallar es un procedimiento muy costoso y más si se realiza en cada paso de tiempo.

Nilson[163](1967, 1968) fue el primero en considerar un modelo de elementos finitos para representar la propagación la fractura discreta en estructuras de hormigón. Para definir el momento en que se propaga una fisura, se utilizaba inicialmente el criterio de tracción máxima o criterio de Rankine. Sin embargo, rápidamente se reconoció que los elementos finitos estándares no eran apropiados para capturar la singularidad en el campo de tensiones y deformaciones alrededor de la punta de la fractura, lo que hizo que el criterio de tracción máxima no sea confiable. Así se empezaron a utilizar criterios energéticos a partir de la teoría de la Mecánica de Fractura.

Después de aplicar la tecnología de los *elementos finitos singulares* para calcular los factores de intensidad de tensiones con una precisión razonable, el siguiente paso fue modelar la propagación de la fractura utilizando los principios de la mecánica de la fractura. Este trabajo fue iniciado por Ingraffea[341](1977) en estructuras de hormigón y proseguido por Ingraffea y su colaboradores[191, 192, 341]. Estos trabajos se enfocaron principalmente en el proceso de propagación de la fractura discreta a través del calculo automático de la trayectoria de la misma y empleando la técnica de remallado adaptable para modelar/insertar la fractura discreta dentro de la malla de elementos finitos. En la actualidad, las principales dificultades técnicas para el modelado de la propagación fracturas discretas están en $3D$ debido a la complejidad geométrica que trae consigo la inserción de la fractura discreta. En las aplicaciones en $2D$, los algoritmos de propagación y remallado automático han tenido un éxito notorio y continuamente están mejorando.

La fractura en los materiales quasi-frágiles no podía ser descrito con precisión por medio de la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica LEFM. En las proximidades de un extremo de la fisura real, las microfisuras se desarrollaban de tal manera que el material todavía era capaz de transferir las tensiones a través de la zona de fractura. La capacidad de transferencia de la tensión disminuye cuando las microfisuras se unían dando lugar al ablandamiento. Este comportamiento de fractura era diferente de la observada en materiales verdaderamente frágiles como el vidrio que no presentaban ninguna zona de fractura. Debido a que LEFM no era aplicable a estructuras de tamaño normal (sobre todo en estructuras de hormigón ya que la zona de proceso de fractura es relativamente grande en comparación con el tamaño del miembro), Hillerborg et al.

1976 introdujeron el Modelo de Fractura Ficticia (FCM) en la cual la fractura se considera como una zona de ablandamiento por deformación que se modela por fuerzas nodales cohesivas (elementos de la interfaz, primero desarrollados por Goodman, Taylor y Brekke (1968)). Desde entonces, diferentes tipos de elementos de interfaz se han ido desarrollando y empleándose sobre todo en ingeniería geotécnica (Heuze y Barbour 1982 , Desai et al . 1984). Los elementos de interfaz de espesor cero son los más utilizados. En el FCM, la rigidez del elemento de interfaz es una función no lineal de desplazamiento de la apertura de fisura. Al igual que cualquier otro tipo de modelo constitutivo no lineal, los cálculos por FEM con elementos de la interfaz que se comportan según FCM requerían una estrategia de solución no lineal. Para ello se empleaban diversas técnicas como el clásico método Newton-Raphson, la relajación dinámica y los procedimientos de longitud de arco arrojando resultados satisfactorios (Swenson y Ingraffea 1988 , Gerstle y Xie 1992 , Papadrakis 1981 , Underwood 1983 , Baño 1982).

Para determinar la dirección de la fractura , FCM se basa en la suposición muy razonable de que la fractura se propaga cuando la tensión principal a tracción en la punta de la grieta alcanza la resistencia a tracción del material (Petersson 1981, Gustafsson 1985, Hillerborg y Rots 1989, Bocca et al. 1991, y Gerstle Xie 1992). La dirección de propagación de la grieta se supone perpendicular a ésta. El problema con este enfoque es que cuando el FPZ se hace pequeña en comparación con el tamaño del elemento, se pierde la objetividad de los resultados. Por lo tanto, como se comentó con anterioridad, tiene más sentido utilizar un enfoque energético para determinar el inicio de propagación de la fractura. Se han obtenido resultados prometedores mediante el uso del enfoque de *velocidad de liberación de energía* para determinar tanto la dirección y el nivel de carga en la que una grieta se va a propagar (Xie et al. 1995).

Como alternativa, Belytschko et al. (Belytschko y Black, 1999; Moes et al. , 1999; Sukumar et al. , 2000) han propuesto el llamado *Método de los Elementos Finitos Extendidos* (también conocido como X-FEM). La idea principal de X-FEM se muestra en la figura 2.7 simplificado para un problema unidimensional de fractura. Este método plantea la propagación de la fisura en la malla de elementos finitos (sin remallado), añadiendo grados de libertad adicionales en aquellos nodos pertenecientes a los elementos a través del cual pasa la fisura (ver figura 2.6c) donde se resaltan los nodos “enriquecidos”. Estos grados de libertad representan el salto en el campo de los desplazamientos en la dirección perpendicular a la propagación de la fisura, y el campo singular que se desarrolla en la punta de la fisura [90]. Las incógnitas adicionales añadidas por X-FEM no se pueden condensar a nivel de elemento por la que el sistema global de resolución de ecuaciones se tiene que resolver también para los grados de libertad adicionales. La idea base de X-FEM es la descomposición del campo de los desplazamientos \mathbf{u}^h en una parte continua \mathbf{u}^c y una parte discontinua \mathbf{u}^d :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{X}) = \mathbf{u}^c(\mathbf{X}) + \mathbf{u}^d(\mathbf{X}) \quad (2.1.6)$$

La parte continua $\mathbf{u}^c(\mathbf{X})$ es la interpolación estándar de elementos finitos y la información adicional restante se introduce en dicha interpolación a través del enfoque de *partición local unitaria* [252, 366] mediante *enriquecimientos* adicionales en $\mathbf{u}^d(\mathbf{X})$. Por lo tanto, los grados de libertad adicionales se introducen dentro de las funciones de interpolación. Esos grados de libertad adicionales se multiplican con las funciones de forma supuestas enriquecidas. Esto permite el empleo de funciones discontinuas como funciones de enriquecimiento. Además, como en LEFM conoce la solución analítica cerca de la cabeza de la fisura, éstas son en incorporadas en X-FEM como una funciones de enriquecimiento. La aproximación de X-FEM del campo de los desplazamientos con n_c fracturas y m_t puntas de fractura puede escribirse como [311]

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{X}) = \sum_{I \in \mathcal{I}} N_I(\mathbf{X}) \mathbf{u}_I + \sum_{N=1}^{n_c} \sum_{I \in \mathcal{I}_c^N} N_I(\mathbf{X}) \Psi_I(\mathbf{X})^N \mathbf{a}_I^N + \sum_{M=1}^{m_t} \sum_{I \in \mathcal{I}_t^M} N_I(\mathbf{X}) \sum_{K=1}^{N_k} \Phi_{KI}^M \mathbf{b}_{KI}^M \quad (2.1.7)$$

donde \mathcal{S} es el conjunto de nodos en la discretización, \mathcal{S}_t es el conjunto de nodos alrededor de la cabeza de la fractura, \mathcal{S}_c el el conjunto de aquellos nodos asociados a los elementos que han sido atravesados por la fractura; $\Psi_I(\mathbf{X})^N$ y $\Phi_I(\mathbf{X})^N$ son la funciones de enriquecimiento para la fractura y cabeza de la fractura respectivamente y \mathbf{a}_I y \mathbf{b}_{KI} son los grados de libertad adicionales a ser resueltos. Dada la popularidad de este método, X-FEM se ha aplicado principalmente a los problemas de crecimiento de una o varias fracturas. X-FEM es un método que asegura la continuidad del recorrido de la fisura. La continuidad del recorrido de

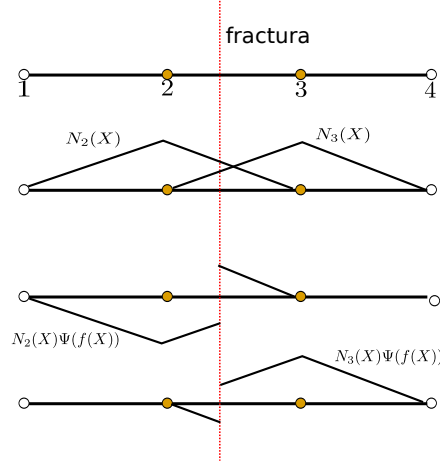


Figura 2.7: X-FEM. Modelo unidimensional de X-FEM para modelar discontinuidades fuertes.

la fisura en problemas tridimensionales es realmente difícil. Por lo general, el recorrido de la fisura se puede representar de forma explícita con segmentos de rectas o planos de fractura[7] o con otras técnicas tales como *level set* [346], que trazan el recorrido de la fisura de una manera más elegante. Sin embargo, como se ha comentado con anterioridad, la integración numérica en X-FEM requiere una atención especial, en particular, alrededor de la punta de la fractura ya que se emplean las funciones de enriquecimiento no polinómicas[311].

Para los elementos completamente atravesados por la fractura, a menudo se elige la función de salto para provocar un campo de desplazamientos discontinuos

$$\Psi_I^N = \text{signo}(f(\mathbf{X})) - \text{signo}(f(\mathbf{X}_I)) \quad (2.1.8)$$

$$f^N(\mathbf{X}) = \text{signo}(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}^N)) \min(\mathbf{X} - \mathbf{X}^N) \quad (2.1.9)$$

donde \mathbf{n} denota el vector normal al plano de fractura y $f^N(\mathbf{X})$ es la función *level set*. Por lo general, la función de enriquecimiento Φ_{KI}^M se elige acorde con la solución analítica en la cabeza de la fractura dada por LEFM

$$\Phi_{KI}^M = \left(\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (2.1.10)$$

donde r es la distancia entre un punto y la cabeza de la fractura y θ el ángulo comprendido entre ellos.

En 1987, Ortiz et al. [293] modificaron la aproximación del campo de las deformaciones para capturar discontinuidades débiles dentro de los elementos finitos con el fin mejorar la resolución de las bandas de corte y obtener una cinemática de deformación como se muestra en la figura 2.8a. En el mismo sentido, Belytschko et al. [31] desarrollaron una formulación que permite la formación de dos discontinuidades débiles dentro del elemento finito (véase figura 2.8b). Dvorkin et al. [118] fueron los primeros en desarrollar un método capaz de modelar con éxito las discontinuidades fuertes en elementos finitos, hoy en día conocido como *Métodos con Discontinuidades Embebidas*. El nombre viene dado por el hecho de que la zona de localización está incrustado

en un solo elemento, véase la figura 2.8c. De esta manera, el crecimiento de la grieta puede ser modelado sin remallado. Esta clase de métodos son mucho más flexibles que los esquemas que permiten discontinuidades sólo en las interfaces de los elementos y elimina la necesidad de un remallado continuo[315].

Los métodos de discontinuidades embebidas tienen en común que la aproximación del campo de los desplazamientos se enriquece con unos parámetros adicionales que capturan el salto dentro del elemento finito. Estos parámetros, llamados comúnmente *enriquecimientos*, son inherentes al elemento fracturado. Unos de los enfoques más populares del método de discontinuidades embebidas es el llamado enfoque de las *discontinuidades fuertes* (ver Simo et al., 1993; Oliver, 1995; Oliver et al., 2004; Oliver y Huespe, 2004). Este enfoque plantea una nueva formulación para elementos finitos con “discontinuidades embebidas” que dependen de unas condiciones estáticas y cinemáticas supuestas. El concepto de *análisis de discontinuidades fuertes* es utilizado entonces como puente entre las aproximaciones continuas y discretas. En este caso, la interpolación estándar de elementos finitos es enriquecida con un término que representa el salto en el campo de los desplazamientos $[[u]]$ a través de una superficie de fallo, capaz de generar valores no acotados en el campo de las deformaciones. En el modelo numérico se utilizan elementos finitos que puedan capturar dichos saltos agregando modos enriquecidos de deformación (Simo y Rifai 1990), los cuales están controlados por grados de libertad adicionales. Es importante destacar que esta formulación necesita el uso de algoritmos de rastreo, que se describirá más adelante, a fin de establecer la trayectoria de la fisura y enriquecer los elementos que se encuentren en dicho camino (ver 2.6c donde se resaltan los elementos enriquecidos). Esto, junto al control explícito de la disipación de energía en la formación de la fisura, representa otro vínculo con la tradición establecida de la mecánica de fractura[90].

La aproximación del campo de los desplazamientos está dada por [340]:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{X}) = \sum_{I \in \mathcal{S}} N_I \mathbf{u}_I + \mathcal{M}_s^e(\mathbf{X}) ([[\hat{\mathbf{u}}^e]]) (\mathbf{X}) \quad (2.1.11)$$

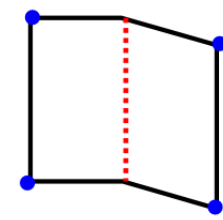
donde \mathbf{u}_I son los desplazamientos nodales y $\hat{\mathbf{u}}^e$ son los enriquecimientos que representan el salto en el campo de los desplazamientos. \mathcal{M}_s^e es una función que se define como

$$\mathcal{M}_s^e = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \forall (e) \notin S \\ H_s - \rho^{(e)} & \forall (e) \in S \\ \rho^{(e)} = \sum_{I=1}^{N_e^+} N_I^+(\mathbf{X}) & \end{array} \right\} \quad (2.1.12)$$

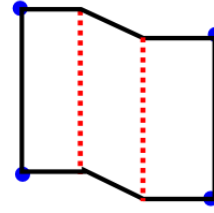
donde H_s es la función salto que actúa sobre la línea de la grieta S y N_e^+ es el número de nodos de elemento (e) que pertenecen al dominio Ω^+ , véase la figura 2.8c. Oliver et al. [286] compararon los elementos con discontinuidades embebidas con X-FEM y demostraron que los métodos de discontinuidades embebidas pueden ser tan precisos como X-FEM. En principio, el método de los elementos con discontinuidades embebidas no requieren continuidad en la trayectoria de la fractura. Sin embargo, algunos investigadores sostienen que este método se vuelve sensible con relación a la orientación de la malla [118]. En adición, los elementos que contienen discontinuidades embebidas presentan bloqueo en el campo de las tensiones. Oliver et al. en [285] exploran algunos tratamientos específicos para afrontar este problema. Los modelos de los discontinuidades fuertes requieren entonces de dos ingredientes claves:

1. Un método capaz de capturar la cinemática de la fractura.
2. Un criterio que determine la orientación y longitud de la fractura.

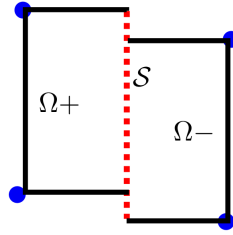
Una nueva metodología dentro de los métodos discontinuidades embebidas fue propuesta por (Cervera, 2008) denominada *Modelos de Fractura Distribuida con Discontinuidades Embebidas* (Smeared-Embedded



(a) Elemento finito con una discontinuidad débil.



(b) Elemento finito con dos discontinuidades débiles.



(c) Elementos finitos con discontinuidad fuerte.

Figura 2.8: Discontinuidades en un elemento finito. (a) una discontinuidad débil (b) dos discontinuidades débiles (c) discontinuidad fuerte.

Continuum Crack Model). Esta asume que los campos de desplazamientos son continuos dentro una determinada banda de localización pero, como en los modelos de discontinuidades embebidas, los campos de las deformaciones se descompone en una parte elástica y otra inelástica, este último debido a la fractura. Se puede considerar este modelo como una forma mejorada del modelo continuo de fisura distribuida. La ventaja de esta metodología es que puede ser implementada en un código no lineal de elementos finitos usando elementos estándares y operando a nivel constitutivo. Además, para evitar la dependencia de la malla, se emplea un modelo *malla fracturada corregida* (Corrected Fractured Mesh, Cervera 2008), en la cual el tensor de deformaciones se vincula con la geometría del elemento fracturado.

Según una clasificación propuesta en Jirásek(2000)[202, 203] existen tres clases de formulaciones con discontinuidades embebidas:

1. *Formulación simétrica estáticamente óptima*. En ella se satisface correctamente la condición de continuidad de tracciones en la discontinuidad interna pero no se puede representar de forma adecuada la condición cinemática. Ejemplos de esta formulación se encuentran en Belytschko et al. (1998) y en Larsson y Runesson (1996), entre otros.
2. *Formulación simétrica cinemáticamente óptima*. La discontinuidad interna está bien reflejada desde el punto de vista cinemático pero lleva a una aproximación errónea de las tracciones en la discontinuidad. (Véase Lofti y Shing (1995)).
3. *Formulación no simétrica estáticamente y cinemáticamente óptima*. En esta formulación, las condiciones estáticas y cinemáticas son satisfechas correctamente. Sin embargo, y al contrario de los dos casos anteriores, la formulación origina una matriz tangente no simétrica. Esta formulación se utiliza en los trabajos de Dvorkin et al. (1990), Simo y Oliver (1994), entre otros.

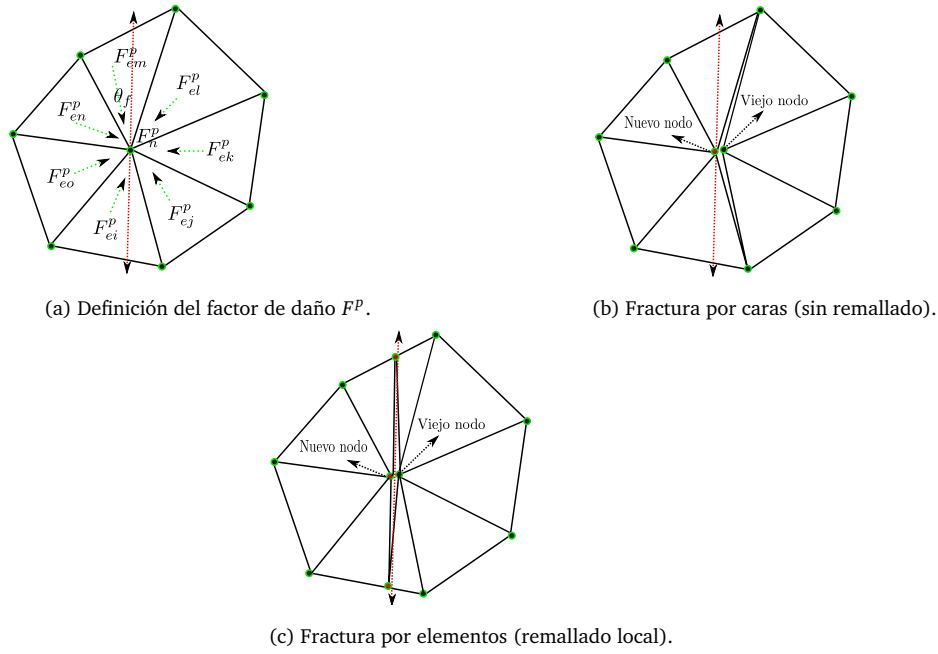


Figura 2.9: Modelos de inserción de fracturas y rotura de elementos. (a) Factor de daño nodal (b) Fractura por caras (sin remallado) (c) Fractura por elementos (remallado local).

PA Klerck, E. J. Sellers y D.R.J Owen(2004) han simulado el proceso de multi-fractura discreta en geo-materiales [223] siguiendo las ideas de Ingraffea et al. además de emplear un remallado local para representar físicamente la fractura dentro de la malla de elementos finitos tal como se muestra en las figuras 2.9b y 2.9c. Su esquema de fractura es “nodal based”, es decir, la inserción de la fractura se hace en un determinado nodo, aprovechando la ventaja de que resulta geoméricamente y computacionalmente conveniente. Los nodos *fracturados* se detectan computando un *factor de daño global* F_n^p , que no es más que el promedio ponderado del daño local F_e^p de una parcela de elementos. Cuando F_n^p excede un factor crítico, en este caso 1, indica la disipación total la energía de fractura. Con frecuencia, suele suceder que durante un paso de tiempo dos o más nodos queden fracturados, teniéndose que tener especial cuidado en el remallado y en la interconexión de las fracturas. Para más realidad física, emplean algoritmos de contacto entre las caras de las fisuras. Al igual que el factor de daño, la dirección de fractura se calcula como el promedio ponderado de las direcciones de deformaciones principales. Este modelo adolece de los problemas de dependencia de la malla, por lo que la dirección de la fractura discreta se ve obligatoriamente condicionada. El estudio de Klerck se enfocó principalmente en agregar dicha tecnología de rotura de elementos al modelo de banda de fractura de Bazant, a modelos no locales y a un modelo de plasticidad propuesto para materiales quasi-frágiles. Sin embargo, aunque sus resultados numéricos poseen una correlación aceptable con algunos ensayos experimentales, era evidente que sus resultados eran dependientes de la malla de elementos finitos, por lo que en la zona de localización empleaba mallas muy tupidas. Además, al emplear la formulación irreducible con el modelo de la plasticidad propuesto para simular la fractura discreta para estados a tracción y compresión[223], sus resultados también presentaban un bloqueo en el campo de tensiones.

Su propuesta de desarrollo de la fractura tiene tres pasos bien diferenciados:

- *Creación de un mapa no local de fallo.* En esta etapa identifican aquellos nodos que se han fracturado.

- *Inserción de la fractura en la malla de elementos finitos* . Se crean los nuevos nodos y las conectividades elementales acorde con la dirección de fractura. El criterio de Rankine resulta suficiente si el material quasi-frágil es cargado sólo por tensiones a tracción, sin embargo no puede representar fielmente el comportamiento bajo condiciones triaxiales de carga. Se toma la dirección ortogonal a la tensión principal como dirección de propagación de la fractura aunque esta suposición es sólo aplicable para modo 1 de fractura. Observe que la *longitud de fractura* traspasa dos elementos (ya que la fractura es alrededor de una parcela).
- *Actualizar la malla de elementos finitos*. (remallado) Ya con los nuevos nodos y conectividades se crean los nuevos elementos. Toda la parcela de los elementos adyacentes al nodo son reinicializados, es decir, tras la disipación total de la energía de fractura estos elementos regresan al estado elástico original sin daño alguno, lo cual es físicamente cuestionable.

Por último, el Método de Elementos Discretos (DEM) comienzan a ganar popularidad en el modelado discreto de la fractura. El comportamiento del material puede tratarse numéricamente con modelos combinados de muelles, amortiguadores y deslizadores como se muestra en la figura 2.10a que siguen una ley de comportamiento bien definidos y sin necesidad de usar modelos constitutivos complejos como en la mecánica de los medios continuos. La fractura se modela entonces como una *descohesión* entre las partículas del medio como se muestra en la figura 2.10b donde se han resaltado los elementos discretos que se han separado. Otra ventaja de este método es el empleo de figuras geométricas simples como círculos y esferas, computacionalmente conveniente cuando se quiere estudiar la mecánica del contacto entre partículas una vez que éstas se han separado. Sin embargo, las propiedades reales del material tienen que ser calibradas a fin de obtener una correlación aceptable con los resultados experimentales.

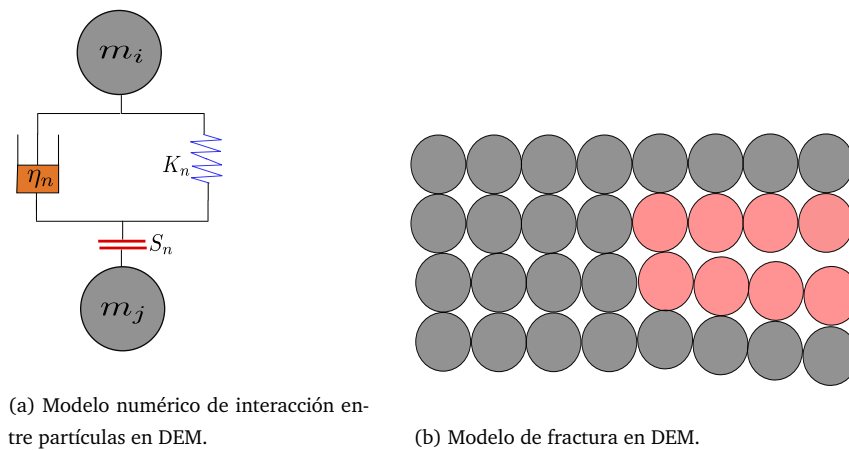


Figura 2.10: Método de los Elementos Discretos. (a) Modelado numérico de interacción entre partículas. (b) Proceso de fractura en DEM.

2.1.5. Modelo de Fisura Distribuida vs Modelo de Fisura Discreta

Desde el comienzo del modelado de la fractura, el concepto *discreto* y el concepto *difuso* o distribuido han sido objeto de mucha controversia. El concepto discreto se ajusta a nuestra concepción natural de la fractura ya que generalmente identificamos fractura como una verdadera discontinuidad geométrica. El modelo

de fractura discreta está orientado a la simulación de la iniciación y propagación de la fractura. Por el contrario, una representación difusa pudiera resultar más realista teniendo en cuenta que en materiales como el hormigón se forman *bandas de fisuras* o nucleación de las microfisuras. El modelo de fisura distribuida captura el proceso de deterioro del material a través de una relación constitutiva en la cual la fractura se encuentra difuminada sobre el continuo.

Los métodos de fractura discreta traza el fallo en un número finito de interfaces[241]. Su propagación requiere, en el caso general, de continuos remallados con el fin de avanzar en la configuración de la fractura. (véase figura 2.6b). El remallado no es necesario si la ruta de la grieta se conoce de antemano, o si las grietas son de algún modo pre-introducidas. En cualquier caso, esta información se desconoce, salvo los resultados experimentales realizados en laboratorios. En los métodos de remallado, el modelo de elementos finitos se reconstruye (cuando se inserta la fractura) de manera que las caras o bordes de los elementos se ajusten a la discontinuidad. Los nodos situados en estas caras se duplican y se distribuyen a ambos lados de la discontinuidad, de modo que la aproximación puede ser totalmente discontinua a través de la grieta. Sin embargo, en aplicaciones tridimensionales, todavía existen ciertas dificultades numéricas para que los malladores puedan ser eficientemente capaces de generar fractura tridimensional. Entre las desventajas de usar un algoritmo de remallado para el modelado discreto de la fractura podemos mencionar[197]:

1. Para problemas no lineales con dependencia de la trayectoria se requiere proyectar los resultados entre diferentes mallas.
2. En ocasiones, el historial de determinados puntos de la malla es difícil de obtener.
3. La gestión de datos se hace más difícil debido a remallados sucesivos.

Sin embargo, esta metodología ha alcanzado un alto estado de madurez. Por ejemplo, Ingraffea et al. han aplicado esta metodología al crecimiento de grietas en tres dimensiones. No obstante, la aplicación de la fractura a problemas tridimensionales y a fragmentación es abrumadoramente difícil. El crecimiento de varias grietas que interactúan plantea un reto importante en el remallado automático y en la proyección de las variables internas. En esta tesis hemos apostado por la técnica de *refinamiento local adaptativo* con la ventaja de que la proyección de las variables es trivial. Por otro parte, aunque los modelos que emplean elementos de interfases (como el Modelo Ficticio de Fractura que fueron populares en el modelado discreto en la fractura en el hormigón) requieren altos números de nodos y un número pre-establecido de los caminos de fractura.

Los Modelos de Discontinuidades Embebidas y el Modelo de Elementos Finitos Extendidos enriquecen el elemento finito estándar con funciones de formas discontinuas, aunque estos enriquecimientos no son equivalentes. Estos modelos no requieren remallado, pero sí de un algoritmo de rastreo para *señalar* aquellos elementos fracturados y enriquecer la cinemática de esos elementos, ya sean enriqueciendo los nodos del elemento o el elemento mismo (véase figura 2.6c). En caso de X-FEM se requieren formas especiales de integración. Hay que resaltar que sin algoritmos de rastreo, estos métodos adolecen de los problemas de dependencia de la malla. No obstante, dentro del modelado discreto de fractura sin remallar, son los métodos más prometedores.

La contraparte del Modelo Discreto de Fractura es el Método de Fractura Distribuida, en la cual asume que un sólido fracturado sigue siendo *continuo*. El Método de fisura distribuida es un método de regularización que introduce una longitud característica dentro de la discretización. Este enfoque, introducido por

Rashid[323], resulta fácil de implementar en un código estándar de elementos finitos debido a que los elementos finitos usualmente se formulan en el espacio de tensión-deformación; tienen mucha preferencia debido a simplicidad y no requieren de remallado. Sin embargo, estos métodos no son capaces de representar correctamente la cinemática de la fractura por lo que se requiere del uso de mallas muy tupidas para modelizar el salto en el campo de desplazamientos. Si bien describen con una precisión razonable la fractura y su propagación, el ablandamiento del material conduce a una fuerte dependencia de la malla y a la disipación nula de energía en caso de tomarse en cuenta los aspectos energéticos de la Mecánica de la Fractura. El ablandamiento por deformación conduce a un problema de contorno mal condicionado[311] que deriva en algunas dificultades numéricas sobre todo de convergencia. Bazant y Belytschko[24] demostraron que las deformaciones se localizan en una entidad geométrica de medida nula: En 1D la localización se produce en un punto, en 2D en una línea y en 3D en una superficie. Ellos además demostraron que la disipación de energía se aproxima a cero (en caso de no tomarse en cuenta los aspectos energéticos) a medida que aumenta la discretización en la malla de EF dando resultados incoherentes. La objetividad de modelos de fisura distribuida pueden ser mejorados usando algoritmos de rastreos[66, 74] o mediante una formulación mixta (Cervera et al.[73]).

Las diferencias sustanciales entre el Modelo Discreto de Fractura y el Modelo Difuso de Fractura pueden observarse en la figura 2.11. Las figuras 2.11a y 2.11c corresponden al modelo clásico estándar (irreducible) y mixto de fractura respectivamente. En el modelo distribuido de fractura utilizando una formulación irreducible, el campo de los desplazamientos es continuo entre los elementos, mientras que el campo de las deformaciones es discontinuo. Debido a esto, para una discretización dada, la resolución óptima de la fractura implica que la relación $\beta = \frac{b}{h}$ igual a la unidad, es decir, la banda de localización de la deformación sólo atraviesa un elemento. Observe que el Modelo Mixto de Fractura implica que $\beta > 1$ y $h > b$, lo que a su vez implica que la localización de la deformación afecta a más de un elemento finito. Por otra parte, en el modelo discreto, el salto del desplazamiento es discontinuo, razón por la cual, modelos como X-FEM, discontinuidades fuertes u otros modelos con discontinuidades embebidas tratan de modelar este efecto de salto mediante una función de discontinuidad dentro del medio continuo.

2.1.6. Otros Modelos de Fractura

Otras alternativas del modelado discreto de fractura se han desarrollado paralelamente a los modelos anteriormente expuestos. Entre algunos de los métodos que podemos citar están *El Método de Erosion de Elementos* (Element Erosion)[207], *Métodos de Separación por Interfases* (Interelement-Separation Methods)[56], *Método de Segmentos Cohesivos y Fractura Nodal* (Cohesive Segment Method and Cracking Node Fracture)[326, 327, 361], *Métodos libres de malla* (MeshFree Methods)[320] y su variante *Métodos libre de malla extendidos* (Extended MeshFree Method)[135], *El Método del Nodo Fantasma* (Phantom Node Method)[168], *Métodos de Visibilidad* (Visibility Method)[317], *El Método de Difracción* (The Diffraction Method)[367], *El Método de Transparencia* (The Transparency Method)[291], *Método de partículas fracturadas* (Cracking Particles Method)[318], *Método de elementos de contorno*[6], entre otros. Escapa del objetivo de este trabajo entrar en detalles particulares de cada uno de estos métodos, por lo que invitamos al lector a indagar en las referencias mencionadas. Un resumen de todo estos métodos pueden encontrarse en la referencia [315].

2.1.7. Algoritmos de Rastreo

Los métodos que aseguran la continuidad de recorrido de la fractura como X-FEM y discontinuidades fuertes requiere la representación de la superficie fractura y de algoritmos de rastreo para seguir la trayectoria de la fractura. Estos algoritmos, si bien son relativamente fáciles de implementar en problemas bidimensionales, su extensión a 3D no es trivial. La topología de la superficie de la fractura se representa explícitamente por los segmentos planos de fractura o implícitamente por las funciones de ajuste de nivel (level set). Los tres enfoques principales para realizar el rastreo de la fractura son [319]:

1. **Métodos Locales:** En los métodos locales, se alinea la superficie de la fractura con respecto a su vecindad. Estos algoritmos se caracterizan por el corte recursivo de elementos. Sin embargo, estos métodos tienen ciertas dificultades para asegurar la continuidad de la fractura en 3D y no son adecuados para el modelado curvo de fractura[208]. Estas técnicas fueron aplicadas por Gasser y Holzapfel[146] y Areias y Belytschko[7].
2. **Métodos Globales:** La idea básica de este procedimiento es definir un problema de Poisson que se resuelve en cada paso de tiempo del problema mecánico, el cual tiene que cumplir las siguientes condiciones:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_0 = 0 \quad (2.1.13)$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son dos campos vectoriales y \mathbf{n}_0 es el vector normal al plano de fractura. La familia de superficies que envuelve el campo vectorial \mathbf{a} y \mathbf{b} se describen mediante una ecuación diferencial laplaciana el cual tiene que cumplir la siguiente condición,

$$\mathbf{a} \cdot \nabla_0 T = \nabla_0 T \cdot \mathbf{a} = 0 \text{ en } \Omega_0 \quad (2.1.14)$$

$$\mathbf{b} \cdot \nabla_0 T = \nabla_0 T \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ en } \Omega_0 \quad (2.1.15)$$

La desventaja de este método es lo costoso que resulta, pues se requiere de la resolución un sistema de ecuaciones en cada paso de tiempo del problema mecánico. Amplios detalles pueden encontrarse en Cervera et al. [68, 76].

3. **Métodos de ajuste de nivel (Level Set):** El método de ajuste de nivel (Level Set) es un esquema numérico desarrollado por Osher y Sethina[294]. Su objetivo es modelar el movimiento de las interfaces que se propagan ortogonalmente a la superficie y se han empleado recientemente para el modelado bi y tridimensional de la fractura. La actualización de la interfaz requiere la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, lo que hace que el método sea atractivo para solucionar problemas de la mecánica de fluidos. Según Ventura et al. [381], el método original no es muy adecuado para rastrear la fractura por tres razones:

- a) Las isolíneas de nivel cero deben actualizarse detrás del frente de la grieta para tener en cuenta el hecho de una vez el punto material está fracturado, siga fracturado.
- b) La superficie de fractura es una superficie abierta que se extiende durante la propagación de la fractura. Se requiere la introducción de otra función de ajuste de nivel a fin de determinar unívocamente la posición de un punto material con respecto a la superficie de fractura.
- c) Las funciones de ajuste de nivel no se actualizan con la velocidad de la interfaz en la dirección normal, por lo que la ecuación de Hamilton-Jacobi no es aplicable. Otro inconveniente de este

método es que la representación de ajuste de nivel requiere funciones de una dimensión mayor que la dimensión de la interfaz, lo que conduce a altos costes de almacenamiento y de cálculo[146].

2.1.8. Criterios de Fractura

Los métodos de fractura requiere de un criterio de fractura para determinar si una grieta se propaga o tendrá un proceso de nucleación. Por otra parte, un criterio de fractura debe proporcionar la orientación y la *longitud* de fractura, así como la ramificación o no de la fractura y la coalescencia de las mismas. Los métodos que aseguren la continuidad de recorrido de la fractura necesitan distinguir entre la nucleación y propagación de las fracturas. En problemas dinámicos, la detección de ramificación de las fracturas es tremendamente difícil.

Diferentes criterios de fractura, que a continuación se detallan, se han propuesto para obtener la orientación de la fractura:

1. **Criterio basado en la mecánica de fractura.** Hay cuatro criterios de fractura que se utilizan dentro de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica: a) Criterio de máxima tensión principal o criterio de Rankine, b) Criterio de la densidad de energía de deformación mínima[351], c) Criterio de máxima liberación energética[375] y d) Criterio de K_{II} [150].

El criterio de tensión circunferencial máxima $\sigma_{\theta\theta}$, asume que una fractura se propaga en la dirección ortogonal a esta tensión circunferencial, cuando ésta supera un umbral crítico $\sigma_{\theta\theta}^c$. En el modo I de fractura, este umbral está dado por $\sigma_{\theta\theta}^c = \frac{K_I^c}{\sqrt{2\pi r}}$ siendo K_I^c la tenacidad del material.

El criterio de densidad de energía de deformación mínima se basa en el factor crítico de energía de deformación S_r^c . Se supone que este factor es un parámetro del material y se puede utilizar como una medida de la tenacidad a la fractura bajo condiciones de modo mixto de fractura. Este criterio es un criterio local, ya que la fractura se produce cuando la densidad de energía S en un elemento de volumen cerca de la punta de la grieta alcanza un valor crítico, mientras que la teoría de la mecánica clásica de fractura se basa en el equilibrio energético global. Más detalles pueden encontrarse en [351]. En el criterio de máxima liberación energética, la fractura se propaga en la dirección definida por un ángulo $\alpha = \alpha_c(\sigma)$, donde $\alpha_c(\sigma)$ tiene que satisfacer las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha} \big|_{\alpha=\alpha_c(\sigma)} = 0 \quad (2.1.16)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \alpha^2} \big|_{\alpha=\alpha_c(\sigma)} \leq 0 \quad (2.1.17)$$

donde \mathcal{G} es la velocidad de liberación de energía. La propagación de fractura ocurre cuando se alcanza un estado tensional crítico $\sigma = \sigma_c$ que equivale a decir que $\mathcal{G}(\sigma_c, \alpha_c(\sigma)) = \mathcal{G}_g$ y \mathcal{G}_g es un parámetro del material.

2. **Criterio de Rankine.** Para un material tipo Rankine, una fractura se introduce cuando la tensión principal de tracción alcanza la resistencia a tracción uniaxial. La grieta se inicia perpendicular a la dirección de la tensión principal de tracción. El criterio de Rankine es aplicable a materiales frágiles y quasi-frágiles y funciona bien para modo I de fractura.
3. **Criterio de energía.** La orientación de la grieta puede obtenerse a través de minimización de la energía global. Para diferentes orientaciones de fractura, se computa la energía global y la fractura se propaga

en la dirección donde la energía global tiene su mínimo. Este criterio fue empleado en el contexto de X-FEM por Meschke y Dummerstorf [253]. Este criterio de fractura puede expresarse como:

$$\mathcal{F} = \int_{\Omega} W(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \mathcal{G}_t d\Gamma \quad (2.1.18)$$

donde \mathcal{G}_t es la dureza superficial; es decir, la energía superficial necesaria para crear una nueva superficie de grieta y W es el trabajo realizado por el sólido.

4. **Pérdida de estabilidad del material.** La fractura es un fenómeno causado por la inestabilidad de material. Una definición clásica de la estabilidad del material se basa en la denominada condición de Legendre-Hadamard [86], la cual establece que para cualquier par de vectores \mathbf{n} y \mathbf{t} se tiene que satisfacer la siguiente desigualdad:

$$\Theta = \min_{\mathbf{n}, \mathbf{t}} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t}) : \mathbf{A} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t}) \geq 0 \quad (2.1.19)$$

donde $\mathbf{A} = \mathbf{C}_t + \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\delta}$ y \mathbf{C}_t es el tensor constitutivo tangente. En el caso de 2.1.19 no se cumpliera, el material pierde estabilidad y el vector \mathbf{n} define la dirección de propagación y \mathbf{t} es la polarización de la onda. Esta condición asegura que la velocidad de propagación de las ondas en un sólido sigue siendo real. Ocasionalmente la condición de Hadamard se le denomina condición elipticidad fuerte de la relación constitutiva. La pérdida de elipticidad o la pérdida de estabilidad del material se determina mediante la minimización Θ con respecto a \mathbf{n} y \mathbf{t} ; si Θ es negativo para cualquier combinación de \mathbf{n} y \mathbf{t} , el material ha perdido la estabilidad en ese punto material. En 2D, Θ puede expresarse como una función de los dos ángulos θ y ϕ , donde $\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ y $\mathbf{h} = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}$.

Por lo tanto, en base a la expresión 2.1.19, para un momento dado en un determinado punto material del sólido se tiene que:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \quad (2.1.20)$$

donde \mathbf{Q} es el tensor acústico. Se dice entonces que un punto material es estable siempre que el valor propio mínimo de \mathbf{Q} sea estrictamente positivo, e inestable si ocurre lo contrario. Esta condición es totalmente equivalente a 2.1.19. La dificultad que surge en el análisis del tensor acústico es que para materiales isotrópicos surgen dos posibles direcciones \mathbf{n} de fractura en la cual una de ellas tiene que elegirse, lo que hace que el criterio de pérdida de estabilidad sea un poco ambiguo. Por otra parte, en tres dimensiones, la normal \mathbf{n} depende de dos ángulos, por lo que el procedimiento de encontrar el valor propio mínimo de \mathbf{Q} puede llegar a ser computacionalmente costoso.

5. **El criterio de elipticidad estricto** (The strict ellipticity criterion). Belytschko et al. [33] sugirieron este criterio dado lo costoso del método anterior en el cual se requiere que:

$$\dot{\mathbf{F}} : \mathbf{A} : \dot{\mathbf{F}} > 0 \quad \forall \dot{\mathbf{F}} \quad (2.1.21)$$

Belytschko señala que se trata de un criterio más estricto, pero computacional más barato que el criterio anterior. Sin embargo, este método no proporciona la orientación de la grieta. Más detalles de este procedimiento en [33].

2.1.9. Conclusiones

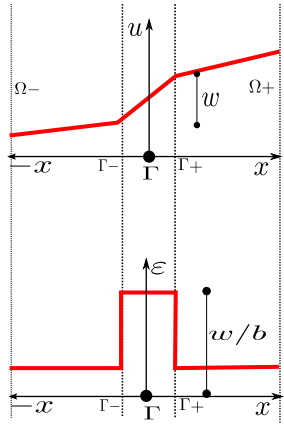
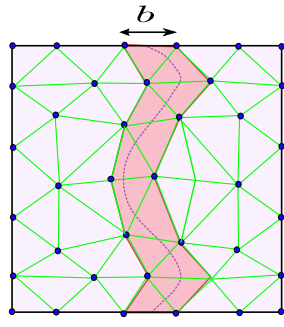
En los últimos años se ha dedicado un esfuerzo considerable en el desarrollo de modelos numéricos para simular el comportamiento de fractura de materiales quasi-frágiles sobre todo en aquellos materiales

utilizados en las estructuras de ingeniería civil como el hormigón. Tradicionalmente, los métodos numéricos de fractura basados en el método de elementos finitos (FEM) se clasifican en dos grupos: El Modelo de Fisura Distribuida y El Modelo de Fisuras Discretas. Por otra parte, algunos autores incluyen un tercer grupo: “El Método de Celosías”[342].

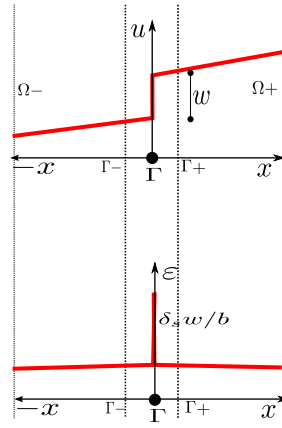
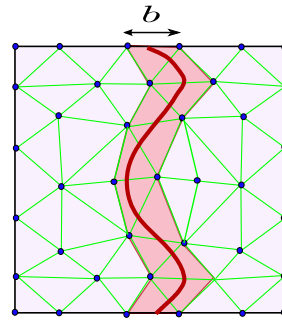
Con los años, se han expresado fuertes opiniones en torno a los modelos discretos y difusos de fractura. Aunque históricamente estos enfoques han sido considerados como modelos aparentemente contrapuestos, la evolución reciente de la mecánica computacional han reducido la brecha entre estas formulaciones. Cada uno de ellos tiene su propio campo de aplicación: el modelo discreto de fractura se emplea habitualmente en el modelado de una o varias grietas dominantes, mientras que los modelos fisura distribuida simulan patrones difusos de fractura que surgen debido a la heterogeneidad del material[160].

Actualmente los modelos discretos de fractura se basan en tecnologías de elementos que incorporan en su cinemática funciones discontinuas para el modelado de la grieta. Como resultado, se evita la necesidad de sucesivos remallados e interpolación de variables entre mallas. Entre estos enfoques podemos mencionar el de Discontinuidades Fuertes[278] y el Método de elementos finitos extendidos[256].

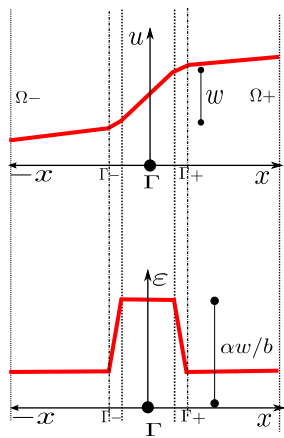
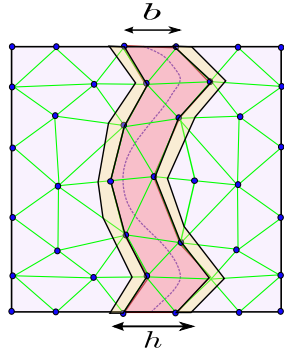
Por otra parte, el objetivo de este capítulo era dar a conocer, al menos en un enfoque global, el bien conocido Estado de Arte de la fractura. Este campo está siempre en una continua evolución y desarrollo dado el interés que representa este fenómeno que llamamos fractura. No es de extrañar que innumerables fuentes, procedimientos y estrategias se hayan desarrollado a lo largo de los años. Sin embargo ningún procedimiento numérico es definitivo. Cada uno de ellos es aplicable a ciertos tipos de problemas proporcionando una manera diferente de ver y entender la fractura. Es como en su momento había dicho Richard Hamming: *El propósito de la computación es la comprensión, no los números.*



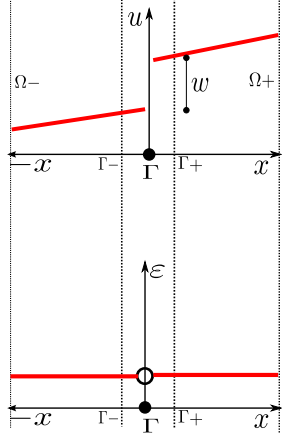
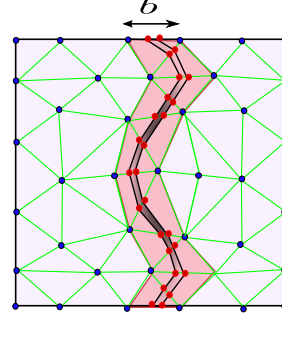
(a) Modelo de fractura distribuida.



(b) Modelo X-FEM y discontinuidades fuertes.



(c) Modelo difuso mixto de fractura.



(d) Modelo discreto de fractura.

Figura 2.11: Modelo de fractura. Desplazamientos y deformaciones en el modelo difuso y discreto de fractura.

Solución explícita y problemas de interacción de superficies

La ciencia avanza a pasos, no a saltos.

Thomas B. Macaulay

3.1. Integración explícita de la ecuación del movimiento

3.1.1. Introducción

En problemas donde los efectos inerciales son relevantes, es decir, cuando las fuerzas internas y las fuerzas aplicadas son comparables con las fuerzas inerciales, se requiere un esquema de integración en el tiempo para resolver la ecuación del movimiento. La estabilidad y la precisión son las características más relevantes de estos esquemas de integración en el tiempo.

Los principales métodos integración temporal se dividen en dos categorías: *Métodos Explícitos* y *Métodos Implícitos*. Los métodos implícitos permiten un mayor paso de tiempo, pero requiere la solución de un sistema de ecuaciones por cada paso de tiempo¹, en el cual el rendimiento computacional se ve afectado[169]. No obstante, los esquemas de integración que pertenecen a la familia de los métodos implícitos son incondicionalmente estables no solamente en problemas lineales, sino también en problemas no lineales. A la inversa, los métodos explícitos son condicionalmente estables con respecto a la linealidad o no linealidad del problema, por lo que si el paso de tiempo excede un valor crítico, la solución crecerá ilimitadamente o divergirá. Este límite crítico es conocido como límite de Courant, o sea, el tiempo necesario para que la onda del sonido cruce un elemento en la malla de elementos finitos. En general, los métodos explícitos son adecuados para el estudio de estructuras sometidas a una alta tasa de deformación la cual exige pequeños incrementos de paso de tiempo. En adición, este método es fiable para los problemas que involucren impacto-contacto. Para aprovechar al máximo una formulación explícita se lleva a cabo una diagonalización de la matriz de masa del sistema, que se conserva durante todo el cálculo, de tal manera que la solución se puede obtener sin resolver ningún sistema de ecuaciones[124], a no ser que cambie la topología de la malla, por ejemplo, cuando se refina o se inserta una fractura en la misma, por lo que hay que recalcular dicha matriz nuevamente.

Para resolver la ecuación de movimiento se requiere encontrar los valores de los desplazamientos $u(t)$

¹De hecho, en problemas altamente no lineales, en un mismo paso de tiempo se requiere resolver el sistema de ecuaciones tantas veces sea necesaria hasta alcanzar la convergencia requerida. Además tienen que ser combinados con los procedimientos de linealización (por ejemplo, el procedimiento de Newton-Raphson).

, las velocidades $\dot{\mathbf{u}}(t)$ y las aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ en algún intervalo de interés \mathbb{I} para un tiempo t . Dividamos este intervalo en una serie de subintervalos² tal que:

$$\mathbb{I} = [0, T] = \cup_{n=0}^{N-1} [t_n, t_{n+1}] \quad (3.1.1)$$

donde n es el índice del paso de tiempo y N es el número total de incrementos y T es el tiempo final asumido para completar la simulación. El problema es encontrar los valores de los desplazamientos $\mathbf{u}(t_{n+1})$, las velocidades $\dot{\mathbf{u}}(t_{n+1})$ y las aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}(t_{n+1})$ en el tiempo t_{n+1} conociendo los valores previos convergidos de los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones del paso anterior, esto es $\mathbf{u}(t_n)$, $\dot{\mathbf{u}}(t_n)$ $\ddot{\mathbf{u}}(t_n)$ respectivamente.

Muchos algoritmos de integración de paso a paso han sido propuestos para este problema incremental. Entre ellos, el más conocido es el esquema temporal de integración de Hilber-Hughes-Taylor (HHT)[20]. Este algoritmo, que se expresa en términos de $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ en el intervalo del paso de tiempo de $[t_n, t_{n+1}]$, se puede escribir como³:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_{n+\alpha}) &= \mathbf{f}^{ext}(t_{n+\alpha}) \\ \mathbf{u}_{n+\alpha} &= \alpha\mathbf{u}_{n+1} + (1-\alpha)\mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}[(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}] \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}] \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

donde α , β y γ son parámetros que definen la estabilidad del sistema y la precisión del método. En particular, cuando $\alpha = 1$, el algoritmo se reduce a los clásicos métodos de integración estudiados por Newmark. Sin embargo, pueden existir diversos de algoritmos dependiendo de la selección de los parámetros de estabilidad. Dentro de esta familia, dos algoritmos en especial son empleados con frecuencia:

1. La regla del Trapecio($\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$). Este algoritmo posee una precisión cuadrática y es incondicionalmente estable para problemas lineales, es decir; que el radio espectral de este integrador se mantiene menor que la unidad en módulo para cualquier valor de Δt , por lo que es un método implícito.
2. Diferencias Centrales($\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$). Este algoritmo posee una precisión cuadrática y es condicionalmente estable, lo que significa que la estabilidad sólo se garantiza cuando Δt es menor que cierto valor crítico⁴ $\Delta t < \Delta t_c^{cr}$. Pertenecce a la familia de los métodos explícitos y está basado en el hecho de que la respuesta en el tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ se evalúa a partir de la ecuación de equilibrio dinámico escrita en el tiempo t_n . Si las matrices de masa \mathbf{M} y amortiguamiento \mathbf{D} se asumen diagonales la solución del problema se simplifica notablemente.

La elección de un esquema u otro, dependerá sobre todo, del tipo de problema a tratar. Además, el tamaño del paso de tiempo depende en gran medida del proceso físico que se quiera simular. El uso de grandes pasos de tiempo⁵ es apropiado cuando la respuesta de la estructura se rige por los modos de baja frecuencia,

²En problemas cuasi-estáticos se suele también dividir el intervalo de tiempo en subintervalos tal que la solución en el paso t_{n+1} depende del paso t_n . Este procedimiento se conoce en la literatura como Método Incremental de Fuerzas.

³En la ecuación 3.1.2, $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_{n+\alpha})$ significa que las fuerzas internas es función de de los desplazamientos $\mathbf{u}_{n+\alpha}$. No debe confundirse con un producto punto de vectores, salvo indicación contraria.

⁴Cuando se presentan problemas que involucran impacto y contacto, la estabilidad también Δt dependerá del método que se use para simular tales efectos. Siempre se tomará el menor valor de Δt .

⁵El paso de tiempo en un esquema explícito mucho menor que el paso de tiempo de un esquema implícito.

por lo que conviene emplear métodos implícitos de integración. Para intervalos de tiempo pequeños, lo más conveniente es integrar la ecuación de movimiento con un método explícito ya que se puede analizar y estudiar problemas que involucren modos altos de frecuencias debido a impactos, colisiones, choques de ondas, explosiones, en fin, aquellos procesos que puedan excitar las frecuencias altas del sistema.

3.1.2. Método de diferencias centrales

Dentro de los esquemas explícitos, uno que goza de mucha popularidad es el Método de las Diferencias Centrales. Se basa en una aproximación mediante diferencias finitas⁶ de la derivadas temporales del desplazamiento (velocidad y aceleración). Muchos investigadores, por ejemplo, Belytschko[32], Dokainish y Subbaraj[113], Ou y Fulton[124], por mencionar algunos, han investigado las propiedades de este método. G.H Hulbert y J. Chung[188] comentaron la importancia de la disipación numérica en los métodos explícitos.

La forma semi-discreta de la ecuación del movimiento en el tiempo t_n esta dada por⁷:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t_n) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t_n) = \mathbf{f}^{ext}(t_n) - \mathbf{f}^{int}(t_n) \quad (3.1.3)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa del sistema, \mathbf{D} es la matriz de amortiguamiento, \mathbf{f}^{ext} y \mathbf{f}^{int} son los vectores de fuerzas externas e internas del sistema respectivamente. Como se verá más adelante, si se asume que la matriz de masa \mathbf{M} y la matriz de amortiguamiento \mathbf{D} son matrices diagonales, la factorización de alguna suma entre \mathbf{D} y \mathbf{M} es trivial. La no linealidad del sistema entran a través de los vectores \mathbf{f}^{ext} y \mathbf{f}^{int} en el lado derecho de la ecuación.

Las fuerzas internas y el residuo se expresan como⁸:

$$\mathbf{f}^{int}(t_n) = \mathbf{f}_n^{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (3.1.4)$$

$$\mathbf{RHS}(t_n) = \mathbf{f}^{ext}(t_n) - \mathbf{f}^{int}(t_n) \quad (3.1.5)$$

En el esquema de diferencias centrales, las velocidades $\dot{\mathbf{u}}(t_n) = \dot{\mathbf{u}}_n$ y las aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}(t_n) = \ddot{\mathbf{u}}_n$ en el tiempo t_n se aproximan mediante la fórmula de diferencias finitas centradas:

$$\dot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.1.6)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{\Delta t^2} \quad (3.1.7)$$

Sin embargo, estas ecuaciones sólo son válidas para valores constantes de Δt . Una forma alternativa de expresar las velocidades es en función de incrementos intermedios. Observando la figura 3.1, definiremos

⁶La derivada temporal de una función cualquiera $\Theta(t)$ se puede aproximar mediante diferencias finitas centradas como $\frac{\partial \Theta}{\partial t} \approx \frac{\Theta_{n+1} - \Theta_{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial t^3} + O(\Delta t^2)$.

⁷La notación de $\bullet(t_n) = \bullet_n$ será usada indistintamente, refiriéndose a un valor evaluado o dado en t_n .

⁸En la ecuación 3.1.5 \mathbf{RHS} es el vector residual que contiene la diferencia entre las fuerzas externas y las fuerzas internas. El nombre se ha tomado de sus siglas en inglés de "Right Hand Side". Nótese que se utiliza la notación de Voigt y \mathbf{B} es la matriz de las derivadas de las funciones de forma.

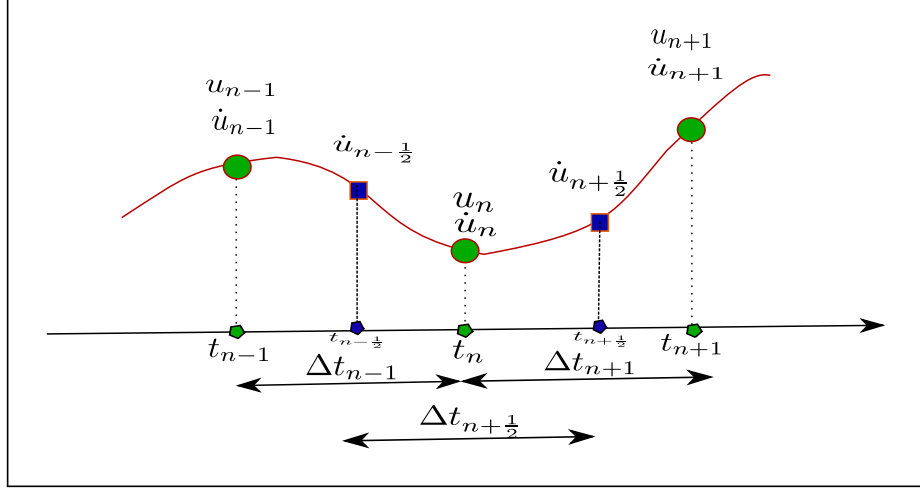


Figura 3.1: Esquema de Integración de Diferencias Centrales.

tiempo intermedio $t_{n+\frac{1}{2}}$ y paso de tiempo intermedio $\Delta t_{n+\frac{1}{2}}$ como:

$$t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{t_{n+1} + t_n}{2} \quad (3.1.8)$$

$$t_{n-\frac{1}{2}} = \frac{t_n + t_{n-1}}{2} \quad (3.1.9)$$

$$\Delta t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t_n + \Delta t_{n+1}}{2} \quad (3.1.10)$$

Las velocidades intermedias se definen de la siguiente manera:

$$\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t_{n+1}} \quad (3.1.11)$$

$$\dot{u}_{n-\frac{1}{2}} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t_n} \quad (3.1.12)$$

Fijándose en la figura 3.1 y con las ecuaciones 3.1.11 y 3.1.12, las velocidades y las aceleraciones en el tiempo t_n también pueden expresarse en función de las las velocidades intermedias $\dot{u}_{n+\frac{1}{2}}$ como:

$$\dot{u}_n = \frac{u_{n+\frac{1}{2}} - u_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t_{n+\frac{1}{2}}} = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t_{n+\frac{1}{2}}} = \frac{\Delta t_{n+1}\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} + \Delta t_n\dot{u}_{n-\frac{1}{2}}}{2\Delta t_{n+\frac{1}{2}}} \quad (3.1.13)$$

$$\ddot{u}_n = \frac{\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{u}_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t_{n+\frac{1}{2}}} \quad (3.1.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.1.13) y (3.1.14) en (3.1.3), obtenemos el vector de velocidad intermedia $\dot{u}_{n+\frac{1}{2}}$

$$M\left(\frac{\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{u}_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t_{n+\frac{1}{2}}}\right) + D\left(\frac{\Delta t_{n+1}\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} + \Delta t_n\dot{u}_{n-\frac{1}{2}}}{2\Delta t_{n+\frac{1}{2}}}\right) = \mathbf{RHS}_n \quad (3.1.15)$$

El cual despejando para $\dot{u}_{n+\frac{1}{2}}$ queda finalmente:

$$\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} = [2M + \Delta t_{n+1}D]^{-1}[(2M - \Delta t_n D)\dot{u}_{n-\frac{1}{2}} + 2\Delta t_{n+\frac{1}{2}}\mathbf{RHS}_n] \quad (3.1.16)$$

Una vez encontrados los valores de las velocidades intermedias se procede al cómputo de los desplazamientos en el paso t_{n+1} , el cual viene dado por la ecuación 3.1.11:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t_{n+1}\dot{u}_{n+1} \quad (3.1.17)$$

Finalmente empleando la ecuación (3.1.17), se computa los valores actuales de de las fuerzas internas para el siguiente paso de tiempo:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{int} = \mathbf{f}^{int}(t_{n+1}) = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_{n+1}) \quad (3.1.18)$$

A fin de iniciar de manera consistente la integración numérica de la ecuación de equilibrio dinámico, este esquema requiere de algunas consideraciones especiales. Nótese que para obtener los valores de $\mathbf{u}(t_{n=1}) = \mathbf{u}_1$, es necesario no sólo conocer los valores \mathbf{u}_0 sino también los \mathbf{u}_{-1} . Este último puede obtenerse conocidas las condiciones iniciales de desplazamiento, velocidad y aceleración, a partir de las ecuaciones (3.1.6) y (3.1.7), en otras palabras:

$$\dot{\mathbf{u}}_0 = \frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{-1}}{2\Delta t} \quad (3.1.19)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \frac{\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{-1}}{\Delta t^2} \quad (3.1.20)$$

De donde despejando para \mathbf{u}_{-1} se obtiene:

$$\mathbf{u}_{-1} = \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{u}_0 \quad (3.1.21)$$

Obsérvese que \mathbf{u}_{-1} depende solamente de las condiciones iniciales de desplazamiento, velocidad y aceleración. Es importante señalar que para aquellos nodos en donde exista un grado de libertad restringido, los valores de las velocidades y las aceleraciones serán nulas⁹.

3.1.3. Diagonalización de las matrices \mathbf{M} y \mathbf{D}

En un análisis dinámico se pueden emplear dos tipos de matrices de masas: *la matriz de masa consistente* y *la matriz de masa concentrada*¹⁰. Emplear la matriz de masa consistente es más conveniente para elementos sometidos a esfuerzos de flexión y excita las frecuencias altas del sistema haciendo que se emplee pasos de tiempo Δt más bajos. En consecuencia, se requieren más pasos de tiempo para obtener una descripción detallada de la respuesta dinámica del problema. La matriz de masa concentrada produce, en contraste con la matriz de masa consistente, una frecuencia más baja, lo que permite usar incrementos de tiempos más altos. Es por tanto que en un esquema explícito se prefiere hacer uso de esta matriz además de ahorrarse el coste computacional que supondría la inversión de la misma.

Debido a que un esquema explícito requiere incrementos de tiempo inferior al tiempo crítico, se hace necesario tener un número finito de pasos que garantice una descripción de la solución acorde con los deseos del analista. Como en cada paso de tiempo se tiene que resolver la ecuación (3.1.16), no tiene sentido invertir la suma de matrices, ya que sería un gran coste computacional. Nótese que esta ecuación está completamente acoplada cuando se utiliza una matriz de masa y amortiguamiento consistente. Una manera más efectiva será si la matriz de masa \mathbf{M} es diagonal y la matriz de amortiguamiento \mathbf{D} es la de Rayleigh, con el coeficiente que afecta a la matriz de rigidez nulo, es decir

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} \quad (3.1.22)$$

⁹Cuando se quiere aplicar una velocidad constante en un intervalo de tiempo \mathbb{I} , se impone un desplazamiento, puesto que ésta es la variable principal. No obstante, se puede cambiar de manera conveniente el esquema de integración de manera que las velocidades sean la variable principal, y los desplazamientos sean la variable secundaria

¹⁰En inglés se conoce como *lumped mass matrix*.

con lo que se obtiene un sistema completamente desacoplado. Gregory M. Hulbert y Jintai Chung[188] recomiendan que utilizar una matriz de masa y amortiguamiento físico no diagonal es inapropiado para un esquema explícito, ya que elimina las ventajas computacionales que este mismo esquema posee. Una alternativa para el tratamiento de la amortiguación física de forma explícita sería mediante el empleo de un algoritmo predictor-corrector. También se puede utilizar implícitamente una matriz de amortiguamiento no diagonal sin que afecte la eficiencia de método.

En este trabajo se adopta la técnica de concentrar la masa del elemento en sus nodos¹¹. Muchos programas comerciales de elementos finitos (NASTRAN, ABAQUS, etc) ya tienen integrado este tipo de técnica, sobre todo aquellos que se especializan en análisis y diseño sísmico de estructuras como ETABS, SAP2000¹², por decir algunos. Dicho de otra manera, para elementos lineales, esta técnica está dada por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{M} = \mathbb{E}_{e=1}^{elem} \sum_{i=1}^{nnode} \sum_{j=1}^{nnode} \int_{\Omega_e} \delta_{ij} \rho_e \mathbf{N}_i^T [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3 \dots \mathbf{N}_{nnode}] d\Omega \quad (3.1.23)$$

entendiéndose \mathbb{E} como operador de ensamblaje empleando en los elementos finitos, el mismo que se emplea para ensamblar la matriz de rigidez del sistema. Nótese que el mismo resultado se podría obtener a partir de la matriz de masa consistente del elemento: sumando los términos de la fila de la matriz de masa y asignándolo posteriormente a su diagonal principal. Es decir, $M_{jj} = \sum_{i=1}^{nnode} M_{ji}$. La matriz resultante no es más que la distribución proporcional de la masa del elemento finito por cada grado de libertad traslacional del nodo. Hay que prestar especial cuidado a aquellas formulaciones de elementos finitos de mayor orden, ya que se pueden aparecer términos de masa negativos. Nótese además que si \mathbf{M} es diagonal, por la ecuación 3.1.22 \mathbf{D} también lo será.

Considere un elemento triangular lineal de tres nodos Ω^e , con espesor t y área A . Su matriz de masa consistente será:

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j d\Omega_e$$

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho A t}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.1.24)$$

La matriz de masa diagonal es:

$$\bar{\mathbf{M}}^e = \int_{\Omega^e} \delta_{ij} \rho \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j d\Omega_e, \text{ para } i, j = 1 \dots 3$$

$$\bar{\mathbf{M}}^e = \rho A t \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (3.1.25)$$

3.1.4. Desacoplamiento de las ecuaciones de equilibrio

Con la matriz de masa y la matriz amortiguamiento diagonal, el sistema de ecuaciones en (3.1.16) queda completamente desacoplada y por lo tanto no hay necesidad de invertir la suma de matrices en vueltas. Basta con recorrer cada nodo i del sistema discreto y computar el vector de velocidades intermedia

¹¹ Este método es conocido en la literatura como *nodal mass lumping technique*.

¹² <http://www.csiamerica.com/>

$\dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}}^i$ y seguidamente computar los valores de los desplazamientos \mathbf{u}_{n+1}^i .

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}}^i = \frac{(2M_{ii} - \Delta t_n C_{ii})\dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}}^i + 2\Delta t_{n+\frac{1}{2}} \mathbf{RHS}_i^n}{2M_{ii} + \Delta t_{n+1} C_{ii}} \quad (3.1.26)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^i = \mathbf{u}_n^i + \Delta t_{n+1} \dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}}^i \quad (3.1.27)$$

Para el próximo paso de tiempo se calculan nuevamente las fuerzas internas de los elementos \mathbf{f}_{n+1}^{int} y el residuo \mathbf{RHS}_{n+1} repitiendo el ciclo hasta terminar el proceso. Algunos investigadores prefieren empezar el análisis calculando en primer lugar las aceleraciones, y luego integrar el tiempo para obtener las velocidades y los desplazamientos. No obstante, la forma en que se ha hecho en este trabajo es completamente análoga y produce virtualmente los mismos resultados.

3.1.5. Estabilidad del esquema de diferencias centrales

El objetivo de integrar numéricamente la ecuación de equilibrio dinámico es evaluar una aproximación razonable de la respuesta dinámica de la estructura en consideración[20]. Un esquema explícito de integración emplea un paso de tiempo Δt que debe seleccionarse de tal manera que asegure la calidad del resultado y la estabilidad del método. La estabilidad no sólo se refiere a la amplificación artificial del error a medida que el tiempo $t \rightarrow \infty$, sino también que el error por redondeo no crece en el proceso de integración. Por lo tanto, la estabilidad se enfoca en cómo evoluciona el error dentro del método y se garantiza cuando el paso de tiempo es lo suficientemente pequeño para integrar con precisión la respuesta en las frecuencias más altas del sistema¹³. Esta es la mayor desventaja del método, ya que el tiempo crítico depende de la discretización, básicamente de la menor distancia entre dos nodos, lo cual puede hacer el proceso de integración temporal lento.

Para analizar la estabilidad del método DC y dada la relación que existe entre los métodos de superposición modal y los métodos de integración directa, considere un cambio de base en el campo de los desplazamientos en la ecuación (3.1.3) mediante el siguiente problema valores propios generalizados:

$$\mathbf{K}\Phi = \Lambda \mathbf{M}\Phi \quad \forall \Lambda \in \{0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_3^2 \dots \leq \omega_n^2\} \quad (3.1.28)$$

siendo ω_i la frecuencia circular y ϕ_i los vectores propios o modos de vibración libre del sistema. Reescribiendo los desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ como:

$$\mathbf{u}(t) = \Phi \mathbf{x}(t) \quad (3.1.29)$$

donde $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n]$ es la matriz que contiene los vector de los valores propios, normalmente llamada matriz modal y $\mathbf{x}(t)$ son los desplazamientos generalizados que sustituyendo en la ecuación (3.1.3) se obtiene¹⁴:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{x}}(t) + \Phi^T \mathbf{D} \Phi \dot{\mathbf{x}}(t) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{x}(t) = \Phi^T \mathbf{f}^{ext} \quad (3.1.30)$$

Se puede introducir condición de ortogonalidad respecto a la matriz de masa \mathbf{M} y respecto a la rigidez \mathbf{K} , por medio de las siguientes expresiones (Newmark y Rosenblueth 1971, Barbat 1982, Clough y Penzien 1993).

$$\begin{aligned} \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j &= 0 & i &\neq j \\ \phi_i^T \mathbf{K} \phi_j &= 0 & i &\neq j \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

¹³Un esquema de integración es incondicionalmente estable si la solución para cualquier condición inicial dada no crece sin límite para cualquier valor de Δt , en particular cuando $\Delta t > T$. El método es estable sólo cuando Δt es menor que un cierto valor, llamado límite de estabilidad o límite de Courant.

¹⁴Nótese que la ecuación 3.1.30 una vez realizada la sustitución correspondiente se multiplica por Φ^T .

Las condiciones de normalidad y de ortogonalidad 3.1.31 pueden expresarse como una única condición de ortonormalidad respecto a la matriz de masa y de rigidez:

$$\begin{aligned}\Phi^T M \Phi &= I \\ \Phi^T K \Phi &= \Lambda\end{aligned}\quad (3.1.32)$$

donde I es la matriz identidad y $\Lambda = \text{diag}[\omega_i^2]$ es una matriz diagonal llamada *matriz espectral*. Si se asume una matriz de amortiguamiento proporcional, entonces D se puede construir de modo que:

$$\Phi^T D \Phi = \Upsilon = \text{diag}[2\omega_i \xi_i] \quad (3.1.33)$$

siendo ξ_i una fracción del amortiguamiento al crítico para el i -ésimo modo de vibración. Para el caso del amortiguamiento de Raleigh $D = \alpha M + \beta K$, α y β deben seleccionarse tal que $\phi_i^T D \phi_i = 2\xi_i \omega_i$. Por lo tanto, la ecuación 3.1.30 puede ser remplazada por:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + \Upsilon \dot{\mathbf{x}}(t) + \Lambda \mathbf{x}(t) = \Phi^T \mathbf{f}^{ext} \quad (3.1.34)$$

La ecuación 3.1.34 consiste en un número n de ecuaciones diferenciales totalmente desacopladas que pueden ser resueltas usando la integral de Duhamel o alternativamente algunos de los métodos de integración directa. Nótese que si el sistema de ecuaciones 3.1.34 se integra con el mismo Δt , el método de superposición modal y el método de integración directa son equivalentes, por lo que la estabilidad del método de Diferencias Centrales se estudiaría empleando un único Δt . En este sentido, las variables a considerar para la estabilidad son Δt , ω_i y ξ_i . Debido a que el sistema de ecuaciones que tenemos en 3.1.34 son similares, basta con estudiar una de ellas:

$$\ddot{x}(t) + 2\omega\xi\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = r \quad (3.1.35)$$

el cual corresponde a la ecuación de movimiento para un grado de libertad. Aproximando las velocidades y las aceleraciones en el tiempo t mediante diferencias centradas se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{x(t + \Delta t) - x(t - \Delta t)}{2\Delta t} \\ \ddot{x}(t) &= \frac{x(t + \Delta t) - 2x(t) + x(t - \Delta t)}{2\Delta t^2}\end{aligned}\quad (3.1.36)$$

Sustituyendo 3.1.36 en 3.1.35 y resolviendo para $x(t + \Delta t)$ se obtiene:

$$x(t + \Delta t) = \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \xi \omega \Delta t} x(t) - \frac{1 - \xi \omega \Delta t}{1 + \xi \omega \Delta t} x(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{1 + \xi \omega \Delta t} r(t) \quad (3.1.37)$$

La ecuación 3.1.37 puede reescribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} x(t + \Delta t) \\ x(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \Delta t) \end{bmatrix} + Lr \quad (3.1.38)$$

siendo A y L las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \xi \omega \Delta t} & -\frac{1 - \xi \omega \Delta t}{1 + \xi \omega \Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & -b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.39)$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{1 + \xi \omega \Delta t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.40)$$

Para garantizar la estabilidad del esquema explícito de DC, es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Para todos los valores propios distintos de la matriz \mathbf{A} , el radio espectro ¹⁵ ρ de la misma tiene que ser menor o igual que 1; es decir; $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$.
2. Si la matriz \mathbf{A} posee múltiples valores propios, cada uno de ellos (en módulo) tiene que ser menor que la unidad.

Las condiciones anteriores se pueden expresar matemáticamente como:

$$\|\mathbf{A}\| \leq \text{const.} \quad \forall m \equiv \{\rho(\mathbf{A}) \leq 1, \lambda_1 \neq \lambda_2\} \vee (o) \quad \{\rho(\mathbf{A}) < 1, \lambda_1 = \lambda_2\} \quad (3.1.41)$$

siendo $\lambda_{i=1,2}$ los valores propios de \mathbf{A} . Puesto que esta matriz es no simétrica, los autovalores pueden ser reales o complejos. A partir del análisis de autovalores obtenemos la siguiente ecuación característica:

$$(2a - \lambda)(-\lambda) + b = 0 \quad (3.1.42)$$

donde las raíces de esta ecuación cuadrática $\lambda_{i=1,2}$ son los valores propios del sistema:

$$\lambda_{i=1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - b} \quad (3.1.43)$$

Nótese que los autovalores son conjugados complejos si $a^2 < b$, reales e iguales si $a^2 = b$ y reales y distintos si $a^2 > b$. Dado que la matriz \mathbf{K} es simétrica y \mathbf{D} es diagonal, los valores de ξ, ω son positivos, interesa solamente aquellos valores tal que $a^2 \geq b$. Por lo tanto, con tal de cumplir las condiciones 3.1.41, se procede a la resolución de la siguiente inecuación con valor absoluto:

$$|a \pm \sqrt{a^2 - b}| \leq 1 \quad (3.1.44)$$

La inecuación anterior define una región en el espacio real en el que el sistema de diferencias centradas es estable y cuyos contornos están delimitados por la parábola $a^2 \geq b$ y las rectas $1 + 2a + b \geq 0$ y $1 - 2a + b \geq 0$ en el intervalo de $-1 \leq a \leq 1$ y $-1 \leq b \leq 1$ (véase figura 3.2). Manejando adecuadamente estas desigualdades, podemos reescribirla de la manera siguiente:

$$a^2 \leq \frac{1}{4}(b + 1)^2 \quad -1 \leq b \leq 1 \quad (3.1.45)$$

Sustituyendo los valores $a = \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{2 + 2\xi \omega \Delta t}$ y $b = \frac{1 - \xi \omega \Delta t}{1 + \xi \omega \Delta t}$ en 3.1.45, el paso de tiempo crítico para la estabilidad del esquema de diferencias centrales con amortiguamiento proporcional se escribe:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} \leq \frac{2}{\omega} \quad (3.1.46)$$

Nótese además que 3.1.45 se había deducido a partir de un modelo con un sólo grado de libertad, por lo que para modelos con varios grados de libertad ω será la frecuencia más alta del sistema. El valor de Δt se expresa entonces como:

$$\Delta t = \frac{2}{\omega_{max}} \quad (3.1.47)$$

Este límite es a menudo llamado límite de estabilidad de Courant. La frecuencia ω_{max} , la mayor frecuencia del sistema, está sometida a errores de discretización, por lo que su valor interesa únicamente a efectos de estabilidad numérica. Es decir, interesa hallar ω_{max} correspondiente a la discretización realizada y no la correspondiente a la estructura real. Fundamentalmente hay dos formas de hallar ω_{max} . La primera consiste en hallar la mayor frecuencia propia del sistema discreto. La segunda, es tener en cuenta que la mayor frecuencia

¹⁵El radio espectro de una matriz \mathbf{Z} se define como $\rho(\mathbf{Z}) = \max |\lambda_i|$.

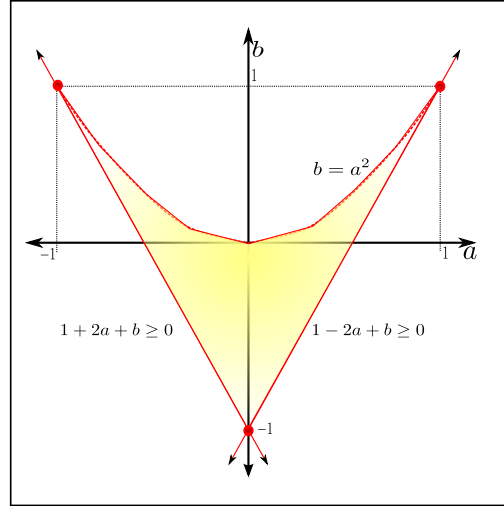


Figura 3.2: Región de estabilidad del esquema de DC.

del sistema discreto es menor que la máxima frecuencia de cada uno de los elementos finitos considerados individualmente. La frecuencia ω_{max} puede ser estimada, al menos en una manera conservativa en sistemas lineales, como:

$$\omega_{max} \approx (2 \frac{c}{h_e})_{max} \quad (3.1.48)$$

en donde c y h_e son la velocidad del sonido dentro del sólido y la longitud característica del elemento respectivamente. Combinando (3.1.47) y (3.1.48) encontramos que:

$$\Delta t \leq (\frac{h_e}{c})_{min} \quad (3.1.49)$$

Dicho de otra manera, el paso de tiempo no puede ser mayor que el tiempo que dura la velocidad de onda del sonido en traspasar un elemento finito. De hecho, esta la principal razón del por qué los esquemas explícitos son más apropiados para tratar problemas que involucren altas frecuencias.

3.1.6. Amortiguamiento numérico

En algunos sistemas es preciso realizar algunas hipótesis simplificadoras en la matriz de amortiguamiento, a fin de obtener una representación numérica razonable de las propiedades de amortiguamiento de la estructura [398]. Una de estas hipótesis, propuesta por Clough y Mojtahedi en 1976, consiste en suponer que existe un mecanismo de pérdida de energía homogéneo en toda la estructura. En tal caso, puede desarrollarse una matriz de amortiguamiento que cumpla las condiciones de ortogonalidad respecto a la matriz modal. Estas condiciones definen el *amortiguamiento proporcional* (Warburton y Soni 1977).

Un tipo muy común de amortiguamiento proporcional empleado en análisis no lineal es asumir que la matriz de amortiguamiento es una combinación lineal de la matriz de rigidez y de masa. O sea que:

$$\mathbf{D} = \beta \mathbf{K} + \alpha \mathbf{M} \quad (3.1.50)$$

Este amortiguamiento es conocido en la literatura como matriz de amortiguamiento de Rayleigh. En un análisis de superposición modal, la matriz de amortiguamiento debe tener la siguiente propiedad para que las

ecuaciones modales del sistema estén desacopladas:

$$\begin{aligned}\phi_i D \phi_i &= \phi_i \beta K \phi_i + \phi_i \alpha M \phi_i = 2\omega_i \xi_i \\ \phi_i D \phi_j &= 0, \forall i \neq j\end{aligned}\quad (3.1.51)$$

La ecuación 3.1.51 puede reescribirse entonces como:

$$2\omega_n \xi_n = \alpha + \beta \omega_n^2 \quad (3.1.52)$$

Es evidente que el amortiguamiento modal sólo afecta dos frecuencias, i y j ; es decir, resolver β y α con el siguiente sistemas de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (3.1.53)$$

donde ξ_i y ξ_j es el factor de amortiguamiento al crítico para las frecuencias ω_i y ω_j respectivamente. Nótese además que la matriz de rigidez K no se ensambla en un esquema explícito y por lo tanto se requiere de una simplificación de la matriz de amortiguamiento de Rayleigh. Basta con omitir o anular el factor β que multiplica a dicha matriz. No obstante, podemos introducir dicho amortiguamiento como un conjunto de fuerzas viscosas f_v^e , es decir:

$$f_v^e = \beta K^e \dot{u}^e \quad (3.1.54)$$

donde K^e y \dot{u}^e es la matriz de rigidez local y la velocidad del elemento finito respectivamente.

Asumir un amortiguamiento proporcional a la matriz masa implica la existencia de amortiguadores que físicamente son imposibles en una estructura. El uso de una amortiguación proporcional a la rigidez tiene el efecto de aumentar el amortiguamiento en los modos altos de vibración la estructura para la cual no hay justificación física. Esta forma de amortiguación puede dar lugar a errores significativos para problemas de contacto, problemas de interacción suelo-estructura, entre otros. Por lo tanto, el uso del amortiguamiento de Rayleigh es difícil de justificar para la mayoría de los análisis, sin embargo, continúa siendo utilizado dentro de muchos programas comerciales para aproximar el comportamiento en las estructuras. La disipación de energía en las estructuras reales es mucho más compleja y tiende a ser proporcional a los desplazamientos más que proporcional a la velocidad, la cual tiene poca justificación teórica o experimental y produce un modelo matemático que viola el equilibrio dinámico[390].

3.2. Mecánica del contacto

3.2.1. Introducción

Los problemas de contacto-impacto pueden considerarse como un problema de contorno inicial puesto que las ecuaciones de gobierno pertenecen al dominio espacial y temporal. Las técnicas de resolución de problemas de contacto se formulan empleando formulaciones variacionales generalmente basados en el método de Galerkin. Asumiendo total ausencia de los efectos viscosos y friccionales y haciendo uso del teorema de la divergencia, el método de Galerkin conduce al siguiente la forma débil de la ecuación de Cauchy¹⁶:

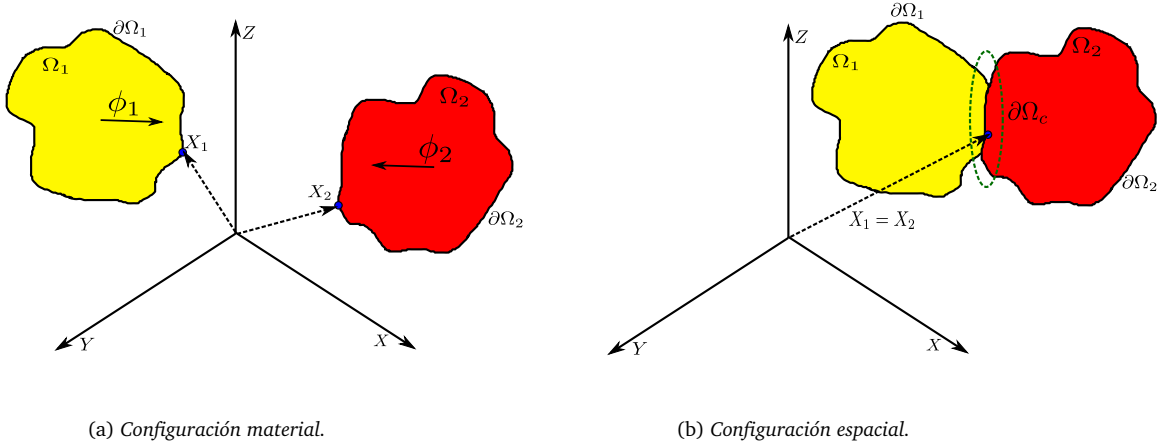


Figura 3.3: Contacto entre dos cuerpos Ω_1 y Ω_2 .

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega - \int_{\partial\Omega_q} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma - \overbrace{\int_{\partial\Omega_c^A} \bar{t}_{ci}^A \delta u_i d\Gamma + \int_{\partial\Omega_c^B} \bar{t}_{ci}^B \delta u_i d\Gamma}^{\text{Fuerzas de Contacto}} = 0 \quad (3.2.1)$$

siendo $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\bar{t}_i = \sigma_{ji} n_j$ las tracciones sobre el contorno $\partial\Omega^q = \partial\Omega_1^q \cup \partial\Omega_2^q$ y $\bar{t}_{ci}^{1,2} = \sigma_{cj} n_j$ las fuerzas de contacto sobre los contornos $\partial\Omega_1^c$ y $\partial\Omega_2^c$ y δu_i los desplazamientos virtuales. Las variables \ddot{u}_i , b_i y ρ son las aceleraciones, las fuerzas másicas y la densidad respectivamente. La expresión discreta de esta ecuación se realiza mediante las funciones de interpolación empleadas en el análisis por elementos finitos:

$$\delta u_i^a \left(\ddot{u}_i \int_{\Omega} \rho N_a N_b d\Omega - \int_{\Omega} N_a b_i d\Omega + \int_{\Omega} N_{a,j} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\partial\Omega_q} N_a \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\partial\Omega_c^1} N_a \bar{t}_{ci}^1 d\Gamma - \int_{\partial\Omega_c^2} N_a \bar{t}_{ci}^2 d\Gamma \right) = 0 \quad (3.2.2)$$

donde N_a y N_b son las funciones de forma. Para cualquier desplazamiento arbitrario δu_i^a , el término dentro del paréntesis de la ecuación (3.2.2) tiene que ser nulo. En consecuencia, la ecuación de movimiento toma la siguiente forma semi-discreta:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}^{int} = \mathbf{f}^{ext} + \mathbf{f}^{mas} + \mathbf{f}^{cont} \quad (3.2.3)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa, \mathbf{u} son los desplazamientos nodales y \mathbf{f}^{int} , \mathbf{f}^{ext} , \mathbf{f}^{mas} , \mathbf{f}^{cont} son los vectores de fuerza interna, externa, másicas y de contacto respectivamente. Esta ecuación es nuestro punto de partida

¹⁶Para simplicidad de las notaciones nos limitaremos a dos cuerpos en contacto Ω_1 y Ω_2 . Nótese además que $\delta u_{i,j} = \frac{\delta u_i}{dx_j}$

para tratar los problemas que involucran contacto-impacto. Obsérvese que esta ecuación es idéntica a 3.1.3 salvo que ahora se toman en cuenta las fuerzas de contacto. Debido a su importancia, la mecánica del contacto ha recibido una amplia atención en muchos campos de la ingeniería, la industria automovilística, procesos industriales, entre otros. Los problemas de contacto son notoriamente difíciles por la fuerte no linealidad con la que está asociada. Dado el coste computacional de los esquemas implícitos, se prefiere en muchas ocasiones la integración explícita de la ecuación de equilibrio dinámico.

El tratamiento numérico de problemas de contacto requiere la formulación de relaciones cinemáticas, restricciones (constraints), modelos constitutivos (para describir los procesos de fricción en las superficies de los cuerpos en contacto) y ecuaciones variacionales, de manera que satisfagan en el sólido las ecuaciones de momento balance y las condiciones de contorno. Las restricciones actúan para impedir la penetración entre los cuerpos y establecer cualquier ley de fricción que gobierne la respuesta tangencial. Estas restricciones se caracterizan por su no linealidad extrema y requieren una global interacción de los grados de libertad, lo que dificulta en gran medida su implementación computacional y sobre todo la convergencia en sistemas implícitos.

Igualmente importante, especialmente en aplicaciones de gran escala, es calcular la proyección al punto más cercano¹⁷, un componente esencial para definir las restricciones cinemáticas dadas por el contacto. Este cálculo es de naturaleza global e involucra la interacción de múltiples cuerpos[173]. Los algoritmos de búsqueda de contactos pueden consumir fácilmente más de la mitad del tiempo requerido en una simulación, por lo que hoy día se está prestando atención en mejorar la eficiencia de estos algoritmos sobre todo aprovechando las ventajas de la programación en paralelo. Entre los algoritmos de búsqueda que se proponen en la literatura, están los algoritmos de búsqueda binaria[246], *bucket searching*[172], *pinball contact*[34], *surface tracking*[166], entre otros.

En esta sección abordaremos en una forma global, la base de la cinemática y la cinética de los problemas de contacto, su planteamiento matemático, las ideas físicas necesarias para escribir las restricciones que gobiernan en las superficies de contacto, descripción de dos de los métodos que usualmente se utilizan para aplicar tales restricciones y su implementación numérica en un esquema explícito. Como parte del trabajo de esta tesis se ha desarrollado un algoritmo de búsqueda de contactos basado en *objetos*, la cual su principal ventaja frente a otros algoritmos es la posibilidad de operar con cualquier tipo de geometría. El objeto principal de tener un algoritmo de contacto es la posibilidad de simular los procesos de contacto en la mecánica de la fractura. Con el fin de profundizar más en temas de la mecánica del contacto, se recomienda revisar la literatura especializada en temas de contacto [234, 391, 411].

3.2.2. Descripción del problema de contacto. Definiciones generales

El algoritmo que se explicará a continuación es aplicable para cualquier número de cuerpos, no obstante nos limitaremos a dos cuerpos en contacto para simplicidad de las notaciones. El problema del contacto se define como un problema de contorno inicial donde cada cuerpo está sujeto a las condiciones de contacto y a las ecuaciones constitutivas del material. Considere el movimiento φ_1 y φ_2 de dos cuerpos deformables (ocupando un volumen y una superficie Ω_α y $\partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ respectivamente) en rumbo de colisión para algún instante de tiempo t (véase figura 3.3). Una vez que éstos entren en contacto, los puntos X_1 y X_2 definidos en la configuración inicial pasan a ocupar durante el proceso de deformación la misma posición en la configuración espacial, es decir $\varphi_2(X_2) = \varphi_1(X_1)$. El conjunto de todos los puntos en contacto en el contorno de estos dos

¹⁷El cálculo de la proyección se refiere a menudo como algoritmos de búsqueda o detección de contactos.

cuerpos se denotará como $\partial\Omega_\alpha^c$.

Por lo general, se lleva a cabo dos pasos para detectar si existe o no el contacto entre dos cuerpos. En primer lugar se realiza una búsqueda global de todos los posibles pares de contactos y después se definen las relaciones cinemáticas locales que describen la interacción. La búsqueda de contactos será tratado ampliamente en la sección siguiente junto con el algoritmo de búsqueda desarrollado. En la formulación continua, las relaciones cinemáticas son necesarias para formular las restricciones de contacto. Existen dos aproximaciones clásicas para la cinemática de contacto en la cual se permite o no la penetración entre los cuerpos en contacto. La condición *impenetrabilidad* es importante para la definir la velocidad tangencial en la interfaz de contacto, necesaria para formular problemas de fricción. De acuerdo con los principios básicos de la mecánica de los medios continuos, las condiciones del contacto pueden ser descritas como sigue:

1. *Condición Geométrica*¹⁸: En problemas de interacciones entre distintos cuerpos, éstos tienen cumplir la condición de impenetrabilidad. Para el caso de dos cuerpos en contacto, esta condición puede ser escrita como sigue:

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = 0 \text{ y } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = 0 \quad (3.2.4)$$

Para problemas que envuelven grandes desplazamientos y deformaciones, la condición de impenetrabilidad es altamente no lineal y por lo general no puede ser expresada como una ecuación algebraica o diferencial. La dificultad surge porque en un movimiento arbitrario resulta complicado anticipar cuales puntos estarán en contacto. Resulta entonces conveniente expresar la condición de impenetrabilidad en forma incremental en cada paso del cálculo numérico[32] y se aplica a aquellas zonas en que los cuerpos Ω_1 y Ω_2 están en contacto, es decir; aquellos puntos que están sobre el contorno $\partial\Omega_c$. Matemáticamente esta condición puede ser reescrita mediante la siguiente inecuación:

$$\gamma_N(\mathbf{X}, t) = (\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2) \cdot \mathbf{n}_1 \leq 0 \quad (3.2.5)$$

donde $\gamma_N(\mathbf{X}, t)$ es la velocidad de penetración entre los cuerpos Ω_1 y Ω_2 . La ecuación (3.2.5) limita la tasa penetración para cualquier punto sobre la superficie del contacto, lo que significa que cuando dos cuerpos se encuentran en contacto, éstos deberán permanecer en contacto ($\gamma_N(\mathbf{X}, t) = 0$) o separarse ($\gamma_N(\mathbf{X}, t) < 0$).

2. *Condición Cinemática*: Esta condición limita las velocidades ($\dot{\mathbf{u}}_1$ y $\dot{\mathbf{u}}_2$) en aquellos puntos sobre la superficie de contacto tal que cumplan la condición de impenetrabilidad, o sea que:

$$\dot{\mathbf{u}}^1 \cdot \mathbf{n}_1 + \dot{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (3.2.6)$$

La ecuación (3.2.6) introduce discontinuidades en el historial de las velocidades. Antes del contacto, las velocidades normales no son iguales, mientras que con posterioridad al impacto, los componentes de la velocidad normal deben cumplir con la restricción dada por (3.2.6). Estas discontinuidades en el tiempo complican la integración temporal de la ecuación discreta del movimiento[32].

3. *Condición Cinética o Condición Tracción*: Las condiciones de tracción deben satisfacer las ecuaciones de momento-balance en la superficie de contacto[385]. Esto requiere que la suma de las tracciones en los dos cuerpos en contacto se anulen:

$$\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 = 0 \quad (3.2.7)$$

¹⁸En otras fuentes bibliográficas, la condición geométrica es llamada a menudo como condición de impenetrabilidad.

Las tracciones en las superficies de dos cuerpos están gobernadas por la ley de Cauchy

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{t}_2 &= \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}_2 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Las tracciones normales se definen por:

$$\begin{aligned} t_1^N &= \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \\ t_2^N &= \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Las condiciones de equilibrio de momento sobre las tracciones normales se obtienen a partir del producto escalar de la ecuación (3.2.7) con el vector normal unitario \mathbf{n}_1 , el cual da como resultado:

$$t_1^N + t_2^N = 0 \quad (3.2.10)$$

Si se considera que no existen fuerzas adhesivas en la dirección normal de las fuerzas de contacto, estas tracciones de contacto son de compresión, de manera que:

$$t^N = t_1^N(\mathbf{x}, t) = -t_2^N(\mathbf{x}, t) \leq 0 \quad (3.2.11)$$

3.2.3. Contacto normal y contacto tangencial

3.2.3.1. Contacto normal

Asuma el contacto inminente entre dos cuerpos Ω_1 y Ω_2 tal como se muestra en la figura 3.3b. En tal caso, la condición de impenetrabilidad definida en las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.5) puede expresarse como:

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{n}_1 \geq 0 \quad (3.2.12)$$

donde \mathbf{x}_α para $\alpha = 1, 2$ son vectores posición de un punto del cuerpo Ω_α : $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{X}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha$ en la configuración espacial o actualizada. El vector \mathbf{n}_1 es el vector unitario normal saliente $\partial\Omega_1$. Asumiendo que al menos localmente la superficie del contacto encierra una región convexa, podemos relacionar cualquier punto \mathbf{x}_2 en $\partial\Omega_2^c$ un punto $\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}(\xi_1)$ en $\partial\Omega_1^c$ mediante un problema de minimización de distancia:

$$\hat{d}(\xi_1, \xi_2) = \|\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1\| = \min_{\mathbf{x}_1 \in \partial\Omega_1^c} \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1(\xi)\| \quad (3.2.13)$$

La distancia \hat{d} se emplea para determinar la proyección más cercana y $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ denota la parametrización de la superficie del contacto $\partial\Omega_c$ mediante coordenadas convectivas (véase figura 3.4). Para una descripción más detallada de las coordenadas conectivas véase Wriggers y Miehe (1992), Wriggers y Miehe (1994) y Laursen y Simo(1993). El punto $\bar{\mathbf{x}}_1(\xi_1, \xi_2)$ se calcula a partir de la minimización de la función de distancia¹⁹:

$$\frac{\partial \hat{d}(\xi_1, \xi_2)}{\partial(\xi_\alpha)} = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1(\xi_1, \xi_2)}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1(\xi_1, \xi_2)\|} \cdot \frac{\partial(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1(\xi_1, \xi_2))}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = 0 \quad (3.2.14)$$

La solución de la ecuación (3.2.14) requiere ortogonalidad del primer y segundo término. Nótese que el primer término tiene la misma dirección que el vector normal \mathbf{n}_1 en el punto mínimo $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ y el segundo

¹⁹La derivada de una función escalar con valor absoluto se define como $\frac{d|F(x)|}{dx} = \frac{F(x)}{|F(x)|} F'(x)$. Nótese que esta definición se puede extenderse fácilmente a funciones vectoriales.

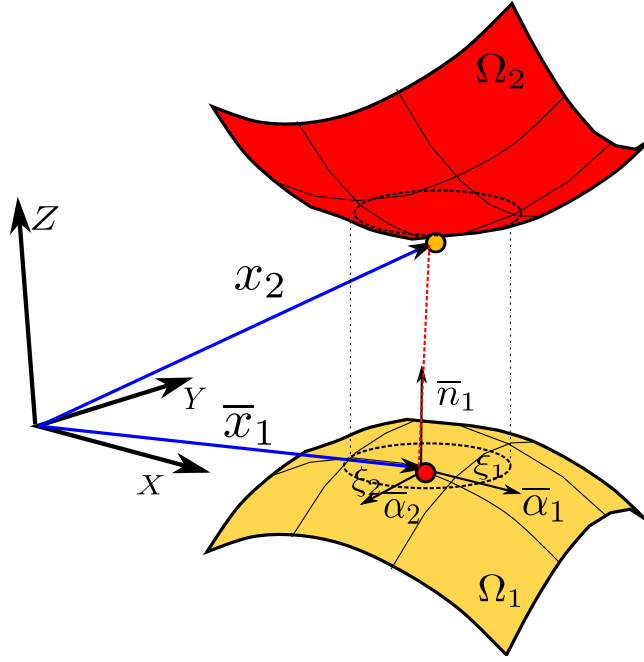


Figura 3.4: Concepto de proyección al punto más cercano.

término es un vector tangente \mathbf{a}_1^η en dicho punto. Así pues, la condición $-\mathbf{n}_1(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \cdot \mathbf{a}_1^\eta(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) = 0$ significa que el punto actual $\mathbf{x}_1(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ es la proyección ortogonal del punto \mathbf{x}_2 sobre la superficie $\partial\Omega_1^c$.

El vector normal unitario saliente en la superficie $\partial\Omega_1^c$ evaluado en el punto de mínima distancia $\bar{\mathbf{x}}_1(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ se expresa como:

$$\bar{\mathbf{n}}_1(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) = \frac{\bar{\mathbf{a}}_1^1 \times \bar{\mathbf{a}}_1^2}{\|\bar{\mathbf{a}}_1^1 \times \bar{\mathbf{a}}_1^2\|} \quad (3.2.15)$$

donde los $\bar{\mathbf{a}}_1^\eta$ son los vectores tangentes en el punto $\bar{\mathbf{x}}_1(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$. El vector normal $\bar{\mathbf{n}}_1$ también se puede reescribir como:

$$\bar{\mathbf{n}}^1 = \frac{\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1(\xi_1, \xi_2)}{\|\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1(\xi_1, \xi_2)\|} \quad (3.2.16)$$

Una vez se conozca el punto $\bar{\mathbf{x}}_1$ y la normal $\bar{\mathbf{n}}_1$, podemos definir la *condición de impenetrabilidad*:

$$g_N = (\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1) \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 \geq 0 \quad (3.2.17)$$

o la *función de impenetrabilidad*:

$$\bar{g}_N = \begin{cases} (\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1) \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 & \text{si } (\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1) \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 < 0 \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (3.2.18)$$

Sin embargo, existen algunos problemas geométricos relacionados con la determinación de la distancia mínima cuando la función \hat{d} en 3.2.14 es localmente no diferenciable ²⁰. La discusión de estos problemas se pueden encontrar en la referencia [391].

²⁰Adviértase que $\bar{\mathbf{n}}_1$ no está definida cuando $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1(\xi_1, \xi_2)\| = 0$.

3.2.3.2. Contacto tangencial

Típicamente se distingue dos casos de contacto tangencial de la superficie de contacto. El primero de ellos se le conoce como estado estacionario o estático²¹ en la que el punto de contacto no se le permite el libre movimiento en alguna dirección tangencial. El segundo caso es el estado de deslizamiento²², lo que significa que el punto de contacto puede moverse tangencialmente en la superficie de contacto. Este movimiento sólo puede ser descrito mediante la deformación relativa en la superficie de contacto.

Estado Estacionario o Estático

Es evidente que cuando un punto de un cuerpo permanece sobre la superficie de otro cuerpo sin experimentar un movimiento relativo alguno los valores computados de las coordenadas convectivas $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ no cambian. Matemáticamente podemos formular esta condición como:

$$\mathbf{g}_T = g_{T\alpha} \bar{\mathbf{a}}^\alpha = 0 \quad \text{donde} \quad g_{T\alpha} = (\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1) \cdot \bar{\mathbf{a}}_1^\alpha \quad (3.2.19)$$

En (3.2.19) \mathbf{g}_T denota el desplazamiento relativo en la dirección tangencial la cual tiene que ser cero. Por lo tanto, en la condición estacionaria no hay que distinguir entre la dirección normal y tangencial ya que $g_N = 0$ y $\mathbf{g}_T = 0$ se impone mediante esta simple condición:

$$\mathbf{x}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1 = 0 \quad (3.2.20)$$

Estado de deslizamiento

El deslizamiento relativo tangencial entre dos cuerpos está relacionado con el cambio de posición del punto \mathbf{x}_2 con respecto al punto $\bar{\mathbf{x}}_1$. Esto significa que el punto solución obtenido a través de la función de mínima distancia se moverá sobre la superficie del cuerpo Ω_1 . Por lo general, la trayectoria del punto \mathbf{x}_2 sobre la superficie del cuerpo Ω_1 no se conoce con anterioridad. La única variable conocida es la velocidad relativa y por lo tanto no podemos asumir nada con respecto a la trayectoria de este punto. De ahí que se tenga que integrar las velocidades relativas para obtener la trayectoria de este punto la cual es computada como sigue:

$$d\mathbf{g}_T = \bar{\mathbf{a}}_1^\alpha d\xi_\alpha = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}_1(\xi_1, \xi_2)}{\partial (\xi_1, \xi_2)} d\xi_\alpha = \bar{\mathbf{x}}_{1,\alpha} d\xi_\alpha \quad (3.2.21)$$

donde los vectores tangentes $\bar{\mathbf{a}}_1^\alpha$ están evaluados en el punto de proyección ξ_α . La longitud de la trayectoria es entonces evaluada como:

$$g_T = \int_{t_0}^t \|\dot{\xi}^\alpha \bar{\mathbf{x}}_{1,\alpha}\| dt \quad (3.2.22)$$

con $d\mathbf{g}_T = \|\mathbf{d}\mathbf{g}_T\|$, $d\xi^\alpha = \dot{\xi}^\alpha dt$ y t es el tiempo que se utiliza para parametrizar la trayectoria del punto \mathbf{x}_2 .

3.2.4. Solución Explícita de la Mecánica del Contacto

En este apartado abordaremos el tratamiento explícito de la mecánica del contacto. Se sabe que los esquemas explícitos son idóneos para el tratamiento numérico de los problemas de contacto ya que el paso de tiempo impuesto por la estabilidad del sistema capta las discontinuidades producidas por estos problemas. El uso de un paso de tiempo mas grande, como es usual en los esquemas implícitos, hacen que dichos esquemas

²¹ Este estado es conocido en inglés como stick condition.

²² En ingles este estado se le conoce como slip condition.

no sean del todo efectivos para obtener la respuesta discontinua. Por consiguiente, las discontinuidades en el jacobiano introducidas por el contacto incide fuertemente en la convergencia del método de Newton[32].

Otra de las ventajas de los algoritmos explícitos es que la integración de la ecuación de movimiento de los cuerpos es completamente independiente, como si ellos no estuvieran en contacto. La condición de contacto se impone una vez que se actualicen las coordenadas de los puntos materiales. Un algoritmo explícito con contacto es similar al algoritmo descrito anteriormente usando el esquema de Diferencias Centradas salvo la verificación adicional que ha de realizarse para verificar si hay o no contacto entre los cuerpos, determinar las superficies de contacto e imponer seguidamente la condición de contacto. Por consiguiente, los desplazamientos y las velocidades de aquellos nodos que han penetrado en otro cuerpo se modifican para reflejar la variación de momento-balance y la impenetrabilidad en la superficie de contacto.

Dado la cantidad de métodos que existen en la literatura para imponer la condición de contacto, en este trabajo solo se ha considerado dos de ellos aplicados a un esquema explícito: *El método de la función de penalización* y *el método de los multiplicadores de Lagrange*. Muchos códigos comerciales de elementos finitos especializados en la mecánica del contacto emplean estos métodos. Mas detalles de estos métodos puede encontrarse en [213, 411].

Cada uno de estos métodos tiene sus ventajas y desventajas. En la mecánica de contacto, el tratamiento algorítmico es uno de los principales problemas después de la formulación de la desigualdad del contacto. Además, la existencia de una gran variedad de formulaciones refleja el interés que tienen los ingenieros de abordar satisfactoriamente este problema.

3.2.4.1. Método de los multiplicadores de Lagrange

Resulta relativamente fácil y computacionalmente conveniente imponer la condición de contacto aplicando el método de penalización. El método de penalización funciona bastante bien cuando hay una elección adecuada del parámetro de penalización p , no obstante, esto no significa que trabaje bien para todas las aplicaciones. Los dos principales problemas asociados con el método de penalización son su influencia en la estabilidad del esquema explícito (ya que el parámetro de penalización influye fuertemente en el paso de tiempo Δt) y la aproximación de la condición de impenetrabilidad.

Debido a estos inconvenientes, algunos investigadores se plantearon usar el método los multiplicadores de Lagrange dentro de un esquema explícito. La primera aplicación para un análisis dinámico fue presentada por Hughes et al.[187]. Un método de multiplicadores de Lagrange (MML) con incremento hacia adelante compatible con un algoritmo de integración explícita fue desarrollado por Carpenter et al. [60]. Sin embargo, el método no fue puramente explícito porque se debía resolver un sistema acoplado de ecuaciones para obtener los multiplicadores de Lagrange. Sin embargo, un desarrollo importante aquí fue la formulación de un método sumamente eficiente para solucionar las ecuaciones acopladas mediante una versión modificada del método de Gauss-Seidel. Según Carpenter, hay dos ventajas significativas del MML sobre el método de la función de penalización: en primer lugar las condiciones de contacto son exactamente satisfechas, y en segundo lugar el método no afecta desfavorablemente en la estabilidad numérica de integración explícita.

Para ser factible el uso del método de los multiplicadores de Lagrange en un análisis explícito Z.H Zhong[411] propuso algunas mejoras entre ellas evitar la resolución del sistema acoplado de ecuaciones mediante el concepto *defense node algorithm* e introdujo la evaluación de la fricción mediante el mismo método[407]. Basado en una ley de fricción de Coulomb, su algoritmo es aplicable para cualquier situación en general incluyendo grandes desplazamientos y grandes deformaciones. Bionini J. y Bung H. propusieron

un nuevo modelo de contacto incluyendo fricción usando multiplicadores de Lagrange²³ emplearon dicho algoritmo para el estudio de pandeo en láminas delgadas y estructuras de acero sometidas a carga de impacto.

Fu-Jun Wang et al.[385] han desarrollado un algoritmo de contacto explícito que se puede ver como una combinación del método de penalización y el método de Lagrange. Lo importante de su algoritmia es que no se requiere resolver ningún sistema acoplado de ecuaciones. L. Baillet, D. Clair, H. Walter y M. Brunet introdujeron un novedoso algoritmo de impacto-contacto incluyendo los efectos friccionales para un análisis tridimensional explícito usando el método de Lagrange incremental²⁴. Para un mayor estudio y profundidad del método de Lagrange se recomienda revisar las fuentes [173, 411].

El método de multiplicadores de Lagrange puede ser usado efectivamente para calcular las fuerzas de contacto. En este trabajo el contacto se ha formulado empleando el esquema de nodo-segmento y nodo-superficie utilizando un esquema iterativo de Jacobi para resolver las ecuaciones acopladas. Este método satisface la restricción impuesta por el contacto. Se ha observado que la precisión del método mejora sustancialmente a medida que se refina el tamaño de la malla de elementos finitos. Otra de las ventajas que posee este método es la disipación de energía cinética, por lo que no hay necesidad de imponer un amortiguamiento artificial de contacto como en el caso del método de penalización.

3.2.4.2. Sistema acoplado de ecuaciones. Método de multiplicadores de Lagrange con incremento hacia adelante

Para tomar en cuenta las restricciones impuestas por el contacto utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange se debe modificar adecuadamente la ecuación de movimiento 3.1.3, por lo que la misma toma la siguiente forma:

$$M\ddot{u}(t_n) + D\dot{u}(t_n) + Z_N^T \lambda_N(t_n) + f^{int}(t_n) = f^{ext}(t_n) \quad (3.2.23a)$$

$$Z_N x(t_n) = Z_N [u(t_n) + X] \quad (3.2.23b)$$

siendo Z_N la matriz global ensamblada de las matrices de restricciones elementales y λ_N el vector que contiene los multiplicadores de Lagrange que representan las fuerzas normales de contacto. La matriz de restricción Z_N se crea para cada nodo que haya penetrado en la superficie de contacto y expresa la restricción del desplazamiento o la condición de impenetrabilidad del nodo sobre la superficie de contacto. Las filas de esta matriz Z_N corresponde a sub-matrices de restricción normal z_N por cada pareja de contacto. Suponiendo la discretización de un sólido mediante elementos finitos y empleando un esquema nodo-segmento o nodo-superficie (vea figura 3.5), la matriz z_N se escribe como:

$$z_n = \begin{pmatrix} n & -N_1 n & -N_2 n & -N_3 n & -N_{nn} n \end{pmatrix} \quad (3.2.24)$$

donde n es la normal de la superficie de contacto dado por la ecuación 3.2.16 y N_1, N_2, \dots, N_{nn} son los valores locales de las funciones de forma en el punto de contacto y nn es el número de nodos de la superficie de contacto. Para hallar los valores de λ_N se ha de resolver simultáneamente las ecuaciones 3.2.23a y 3.2.23b por lo que no es del todo un método puramente explícito como anteriormente se había comentado. Para una resolución consistente de estas dos ecuaciones y que a su vez sea compatible con un método de integración

²³J. Bonini, H. Bung. Structural Impact-Friction modelling in Explicit finite element code with the Lagrange Multiplier, 14th Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, vol. 6, 37-44, 1997.

²⁴Baillet L., Walter H., Brunet M., «A 3D contact algorithm for explicit dynamic F.E. code applied to the ironing process», Metal Forming, 2000, 141-147.

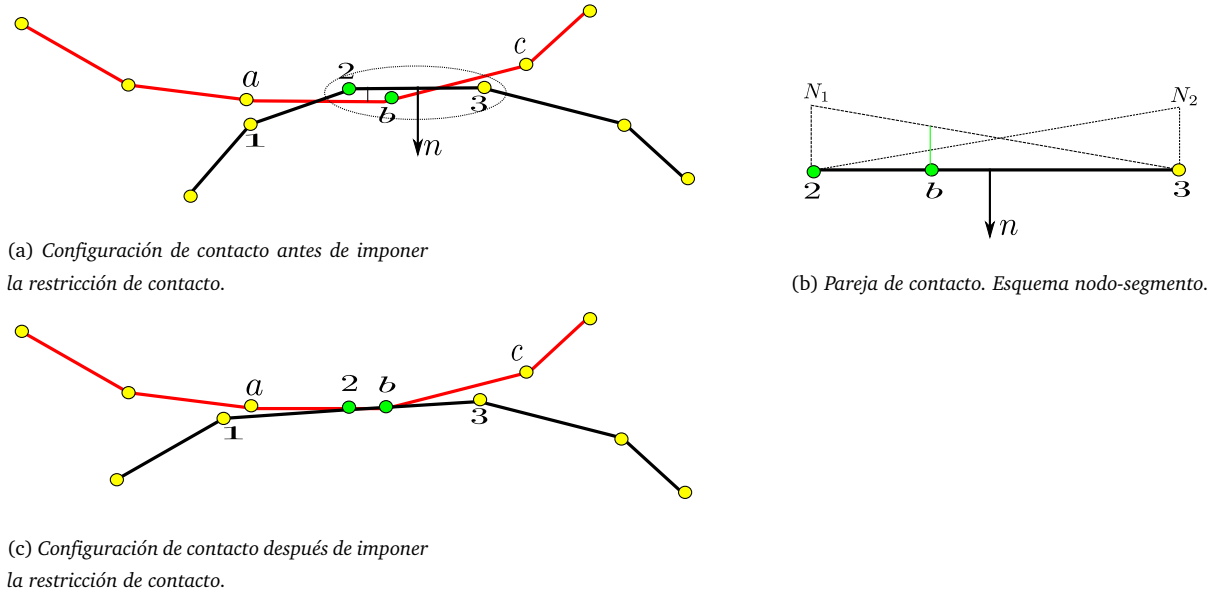


Figura 3.5: Esquema de contacto nodo-segmento empleando multiplicadores de Lagrange.

explícita, en este caso el método de Diferencias Centradas, se requiere relacionar los desplazamientos \mathbf{u}_{n+1} en t_{n+1} con los multiplicadores de Lagrange λ_N en t_n [222]. La idea básica es dejar los pares de contacto penetren entre sí dentro de un paso de tiempo, lo que conlleva λ_N sea igual a cero y posteriormente corregir dichos desplazamientos imponiendo la condición de contacto. Por tanto podemos reescribir la ecuación 3.2.23a y 3.2.23b como:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{Z}_{N,n+1}^T \lambda_{N,n} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_n) &= \mathbf{f}_n^{ext} \\ \mathbf{Z}_{N,n+1}^T \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{Z}_{N,n+1}[\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{X}] \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.1.13 en las ecuaciones 3.1.14 obtenemos:

$$\mathbf{M}\left(\frac{\dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t_{n+\frac{1}{2}}}\right) + \mathbf{Z}_{N,n+1}^T \lambda_{N,n} + \mathbf{D}\left(\frac{\Delta t_{n+1} \dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} + \Delta t_n \dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}}}{2\Delta t_{n+\frac{1}{2}}}\right) = \mathbf{f}_n^{ext} - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_n) \quad (3.2.26a)$$

$$\mathbf{Z}_{N,n+1}(\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{X}) = \mathbf{Z}_{N,n+1}(\mathbf{u}_n + \Delta t_{n+1} \dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (3.2.26b)$$

Manipulando adecuadamente estas ecuaciones llegamos a lo siguiente:

$$\underbrace{\left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t_{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t_{n+1} \mathbf{D}}{2\Delta t_{n+\frac{1}{2}}}\right)}_A \dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{Z}_{N,n+1}^T \lambda_{N,n} = \underbrace{\mathbf{f}_n^{ext} - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}_n)}_{RHS_n} + \frac{\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t_{n+\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta t_n \mathbf{C} \mathbf{u}_{n-\frac{1}{2}}}{2\Delta t_{n+\frac{1}{2}}} \quad (3.2.27a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{RHS}_n - \mathbf{Z}_{N,n+1}^T \lambda_{N,n}) \quad (3.2.27b)$$

Después de sustituir la ecuación 3.2.27b en la ecuación 3.2.26b nos queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{N,n+1}(\mathbf{u}_n + \Delta t_{n+1}(\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{RHS}_n - \mathbf{Z}_{N,n+1}^T \lambda_{N,n}])) &= \mathbf{0} \\ \underbrace{\Delta t_{n+1} \mathbf{Z}_{N,n+1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z}_{N,n+1}^T}_B \lambda_{N,n} &= \mathbf{Z}_{N,n+1} \mathbf{u}_n + \Delta t_{n+1} \mathbf{Z}_{N,n+1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{RHS}_n \\ \lambda_{N,n} &= \mathbf{B}^{-1}[\mathbf{Z}_{N,n+1}(\mathbf{u}_n + \Delta t_{n+1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{RHS}_n)] \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Como se puede apreciar, se tiene un sistema acoplado de ecuaciones. Para la resolución de la misma se requiere un procedimiento iterativo. Básicamente consistirá en una corrección en los desplazamientos sólo en aquellos cuerpos que estén en contacto. En primer lugar se procede a computar los valores de los desplazamientos \mathbf{u}_{n+1} suponiendo que no hay fuerzas de contacto y y luego se impone la condición de contacto²⁵.

Con esta idea en mano, se puede resumir las ecuaciones anteriores como:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \check{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{u}_{n+1}^c \quad (3.2.29a)$$

$$\check{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t_{n+1} \check{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} \quad (3.2.29b)$$

$$\check{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{RHS}_n \quad (3.2.29c)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{N,n} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Z}_{N,n+1} [\check{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{X}] \quad (3.2.29d)$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^c = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z}_{N,n+1} \boldsymbol{\lambda}_{N,n} \quad (3.2.29e)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones 3.2.29d y 3.2.29e y encontrar los valores de $\boldsymbol{\lambda}_{N,n}$ y \mathbf{u}_{n+1}^c aplicamos el procedimiento de iterativo de Jacobi. Carpenter et al. [60] propusieron el uso del método secuencial de Gauss-Seidel, el cual dependía del orden en el que se consideraban el acoplamiento de contacto [222]. Una de las ventajas del método de Jacobi es que los cálculos son realizados a nivel elemental y no hay necesidad de ensamblar ninguna matriz. Nótese además que no hay necesidad de invertir el término \mathbf{B} en la ecuación 3.2.29e, pues \mathbf{D} y \mathbf{M} se asume diagonal diagonales. El método de Jacobi se muestra en detalle en el algoritmo 3.1, donde m es el número de parejas de contacto, la variable k es el contador de iteraciones, $\boldsymbol{\lambda}_N$ es el vector de las fuerzas normales de contacto, λ_{Ni} es la fuerza normal de contacto correspondiente al al i -ésimo pareja de contacto y $TOLER$ es la tolerancia requerida. Obsérvese que en este algoritmo introduce la condición de tensión normal límite, es decir $\lambda_{Ni,n} \leq 0$, relajando la restricción de desplazamiento de contacto. Es aparente que la precisión de este método esta ligada fuertemente en que tanto se refine la superficie de contacto.

²⁵En realidad no es necesario ensamblar la matriz global de restricciones \mathbf{Z}_{n+1} , ya que la matriz \mathbf{A} se asume diagonal y en segundo lugar las restricciones sólo se realizan a nivel de los pares de contacto, es decir; se corregirán los desplazamientos sólo aquellos cuerpos que estén en contacto.

Algorithm 3.1: *Método iterativo de Jacobi en un esquema explícito de contacto usando multiplicadores de Lagrange.*

```

1 Step  $n + 1$   $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  Data:  $\check{\mathbf{u}}_{n+1}, k, TOLER$ 
   Result:  $\mathbf{u}_{n+1}^c, \lambda_N^n$ 
2 Cómputo del vector de fuerzas normales de contacto.
3  $\Delta \lambda_{N,n}^{k+1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{Z}_{N,n+1} [\mathbf{u}_{n+1}^{c(k)} + \check{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{X}]$ 
4  $\lambda_{N,n}^{k+1} = \lambda_{N,n}^k + \Delta \lambda_{N,n}^{k+1}$ 
5 Chequeo de tensión normal límite.
6 for  $i = 1, 2, \dots, m$  do
7   if  $(\lambda_{Ni,n}^{k+1} > 0)$  then
8      $\lambda_{Ni,n}^{k+1} = 0$  and  $\Delta \lambda_{Ni,n}^{k+1} = -\lambda_{Ni,n}^k$ 
9 Cómputo de los desplazamientos incrementales de contacto.
10  $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{c(k+1)} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{Z}_{n+1} \Delta \lambda_n^{k+1}$ 
11 Actualización de los desplazamientos.
12 for  $i = 1, 2, \dots, m$  do
13    $\mathbf{u}_{n+1}^{c(i,k+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{c(i,k)} + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{c(i,k+1)}$ 
14 Chequeo de convergencia.
15 if  $(\|\Delta \lambda_n^{k+1}\| > TOLER)$  then
16   go to line 2
17 else
18   exit

```

3.2.5. Método de la función de penalización

El método de la *función de penalización* se desarrolló con el objetivo de aplicar determinadas restricciones a funciones y proveer una manera simpley eficiente para abordar problemas de optimización y minimización de funciones. Este concepto se ha trasladado para tratar problemas de impacto-contacto dentro del método de los elementos finitos[115, 266] y recientemente en método combinado de elementos finitos y elementos discretos[261]. Naoki Asano (1986) demostró que las fuerzas de contacto pueden expresarse mediante una serie de funciones de penalización que afectan a los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones para aplicar la condición de impenetrabilidad y cuyos términos están reflejados en el principio de trabajo virtual entre dos cuerpos en contacto. G. Donida et al. [115] han estudiado el problema del contacto entre una esfera y un cuerpo rígido empleando este método. Analizaron el problema Hertz y los resultados numéricos obtenidos corresponden bastante bien con los resultados analíticos. A. Munjiza y R. F. Andrews[261] plantearon un algoritmo de contacto basado en la función de penalización que preserve el balance energético. Este algoritmo ha sido desarrollado dentro del método combinado de elementos finitos y elementos discretos[259] y se emplea en esta tesis para resolver las condiciones complejas de contacto que no se pueden resolver eficientemente con MML. No obstante, la solución obtenida sólo satisface aproximadamente la restricción de contacto. Revisaremos los conceptos generales de este método, pero para más profundidad del mismo se recomienda revisar la literatura en especial las fuentes [200, 259, 261, 262].

El método de la función de penalización aplicado a problemas de contacto asume que el resultado de la colisión entre dos cuerpos es una fuerza de contacto proporcional a la penetración. Con el fin de cum-

plir las restricciones impuestas por el contacto se introduce el siguiente funcional que define la función de penalización[264]:

$$U_c = \int_{\Gamma_c} \frac{1}{2} p (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_c)^T (\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_c) d\Gamma_c \quad (3.2.30)$$

donde p es el coeficiente de penalización; \mathbf{r}_c y \mathbf{r}_t son los vectores posición de los puntos superpuestos del cuerpo Ω_1 sobre el cuerpo Ω_2 y viceversa. Nótese que, para facilitar las notaciones matemáticas nos limitamos como siempre a dos cuerpos en contacto. Para simplificar las notaciones y entender mejor este concepto, al cuerpo Ω_1 y Ω_2 le llamaremos *cuerpo colisionante* Ω_m y *Cuerpo colisionado* Ω_s respectivamente. Luenberger (1984) demostró que cuando $p \rightarrow \infty$ se recupera el método de multiplicadores de Lagrange, es decir

$$\lim_{p \rightarrow \infty} U_c = 0 \quad (3.2.31)$$

En la práctica, el parámetro de penalización es un valor finito que habitualmente se toma proporcional al módulo de elasticidad. Además, asignar un valor de penalización elevado podría traer problemas numéricos. Dentro de un esquema explícito de integración, el parámetro de penalización p afecta de manera directa en la estabilidad del esquema temporal de integración y en el paso de tiempo Δt .

En el método de penalización hay dos enfoques distintos para evaluar las fuerzas de contacto: *el enfoque de fuerza de contacto concentrada* y *el enfoque de fuerza de contacto distribuida*. Una fuerza de contacto concentrada asume que las fuerzas nodales de contacto es una función del tamaño de la penetración de los nodos individuales del cuerpo Ω_m en el cuerpo Ω_s , mientras que el contacto distribuido dicha fuerza es evaluada con la forma y el tamaño que surge de la intersección de los cuerpos Ω_s y Ω_m reproduciendo así una distribución realista de las fuerzas de contacto sobre las áreas de contacto. Este enfoque mantiene el equilibrio energético; es decir, la energía total del sistema permanece invariante, y permite la incorporación de leyes de interacción y leyes de entre superficies de una manera robusta[262].

Suponga que los cuerpos Ω_m y Ω_s estén en contacto, tal y como lo muestra la figura 3.6. El área que surge de la intersección de estos cuerpos $\Omega_m \cap \Omega_s$ le llamaremos S , cuyo contorno es $\Gamma_S = \Gamma_{\Omega_m} \cap \Gamma_{\Omega_s}$. En los años recientes ha sido aceptado y principalmente dentro del método combinado de elementos finitos y discretos, que las fuerzas de contacto pueden computarse mediante el concepto de *Fuerza Potencial de Contacto*. La idea es relativamente simple: se asume que se produce una fuerza infinitesimal de contacto $d\mathbf{f}$ por cada porción de área dA encerrada en Γ_S :

$$d\mathbf{f} = [\nabla \varphi_m(P_m) - \nabla \varphi_s(P_s)] dA \quad (3.2.32)$$

donde φ_m y φ_s en la función potencial para Ω_m y Ω_s respectivamente y $d\mathbf{f}$ es la fuerza infinitesimal de contacto que actúa sobre un área diferencial superpuesta dA . Así que por cada cuerpo que esté en contacto, la fuerza de contacto se calcula como un gradiente de la función potencial correspondiente.

La ecuación 3.2.32 puede también reescribirse como:

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{f}_m - d\mathbf{f}_s \quad (3.2.33)$$

en donde

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}_c &= -\nabla \varphi_m(P_s) dA \\ d\mathbf{f}_t &= -\nabla \varphi_s(P_m) dA \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

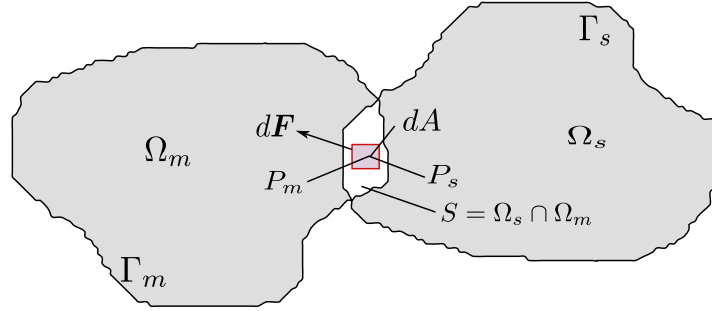


Figura 3.6: Fuerza de contacto resultado de la superposición infinitesimal de dos objetos en los puntos P_m y P_s

En otras palabras, la fuerza de el contacto descrito en la ecuación 3.2.32 puede interpretarse en primer lugar como como la fuerza de contacto del Ω_m penetrando en el cuerpo Ω_s y recíprocamente la fuerza de contacto del cuerpo Ω_s penetrando en el cuerpo Ω_m [259]. Obsérvese que el campo de fuerzas de contacto evaluada mediante la ecuación 3.2.32 es un campo conservativo²⁶. Así, si un punto P_m del cuerpo Ω_m penetra en Ω_s a

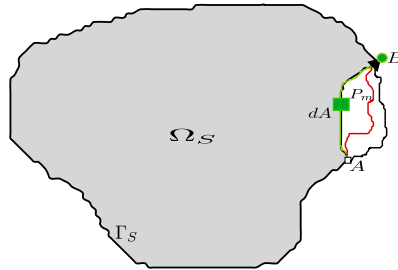


Figura 3.7: Punto P_m sobrepuesto en el cuerpo Ω_s .

través de cualquier ruta definida por los puntos extremos A y B , el trabajo total producido por la fuerza de contacto debido a la función potencial φ_s no depende de dicha ruta, sólo depende de los puntos extremos A y B y está dada por la diferencia de los potenciales $\varphi_s(A) - \varphi_s(B)$ (Figura 3.7). Para una conservación energética se requiere que la energía total del sistema antes y después del contacto sean las mismas, lo que significa que la fuerza de contacto no realiza trabajo, lo que es equivalente a decir que para cualquiera de los puntos A y B

²⁶ Se dice que un campo de fuerzas es conservativo si el trabajo realizado para desplazar una partícula entre dos puntos es independiente de la trayectoria seguida entre tales puntos. El nombre conservativo se debe a que para un campo de fuerzas de ese tipo existe una forma especialmente simple de la ley de conservación de la energía.

en el contorno de Ω_s se tiene que:

$$\begin{aligned}\varphi_s(A) - \varphi_s(B) &= 0 \\ \varphi_s(A) &= \varphi_s(B)\end{aligned}\quad (3.2.35)$$

El mismo concepto se aplica para el cuerpo Ω_m , es decir, para cualquiera de los puntos A y B en el contorno de Ω_m se cumple que

$$\begin{aligned}\varphi_m(A) - \varphi_m(B) &= 0 \\ \varphi_m(A) &= \varphi_m(B)\end{aligned}\quad (3.2.36)$$

Por tanto, siempre que los potenciales en el contorno de Ω_s y Ω_m sean constantes, la fuerza de contacto dada por 3.2.32 conserva el balance de energía independientemente de la geometría, la forma discretizada del sólido, el tamaño del término de penalización o el tamaño de penetración.

La fuerza total de contacto se obtiene entonces evaluando la integral en (3.2.32) sobre toda el área $S = \Omega_s \cap \Omega_m$:

$$\mathbf{f}_c = \int_{S=\Omega_m \cap \Omega_s} [\nabla \varphi_m - \nabla \varphi_s] dA \quad (3.2.37)$$

Con el teorema de Green, la ecuación anterior también se puede expresar sobre el contorno:

$$\mathbf{f}_c = \oint_{\Gamma} \mathbf{n}_{\Gamma} (\varphi_m - \varphi_s) d\Gamma \quad (3.2.38)$$

donde \mathbf{n}_{Γ} es el vector unitario normal saliente y $\varphi_{\alpha}, \alpha = m, s$ las funciones potenciales correspondientes.

3.2.5.1. Discretización de la fuerza de contacto en 2D

Sean Ω_m y Ω_s dos cuerpos en contacto que han sido discretizados en elementos finitos de modo que $\Omega_m = \Omega_{m1} \cup \Omega_{m2} \cup \Omega_{m3} \dots \cup \Omega_{mn}$ y $\Omega_s = \Omega_{s1} \cup \Omega_{s2} \cup \Omega_{s3} \dots \cup \Omega_{sk}$, donde n y k es el número total de los elementos finitos que conforman los cuerpos Ω_m y Ω_s respectivamente. En este contexto, los potenciales φ_m y φ_s pueden ser representados por la suma de los potenciales asociados a cada elemento finito, o sea:

$$\begin{aligned}\varphi_m &= \varphi_{m1} + \varphi_{m2} + \varphi_{m3} \dots + \varphi_{mn} \\ \varphi_s &= \varphi_{s1} + \varphi_{s2} + \varphi_{s3} \dots + \varphi_{sk}\end{aligned}\quad (3.2.39)$$

La integración sobre el área $S = \Omega_m \cap \Omega_s$ es la contribución elemental de los elementos finitos encerrados dentro de esta área, o sea que la fuerza total de contacto ejercida en el área S se evalúa como:

$$\mathbf{f}_c = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \int_{\Omega_{mi} \cap \Omega_{sj}} [\nabla \varphi_{mi} - \nabla \varphi_{tsj}] dA \quad (3.2.40)$$

Remplazando la integración sobre el área de los elementos finitos por su integración equivalente en el contorno, se obtiene la siguiente expresión para la evaluación de fuerza de contacto,

$$\mathbf{f}_c = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_{mi} \cap \Omega_{sj}} \mathbf{n}_{\Gamma_{\Omega_{mi} \cap \Omega_{sj}}} [\varphi_{mi} - \varphi_{sj}] dA \quad (3.2.41)$$

donde la la integración en el contorno sobre el área S se escribe como la suma de las integrales en el contorno de los elementos finitos.

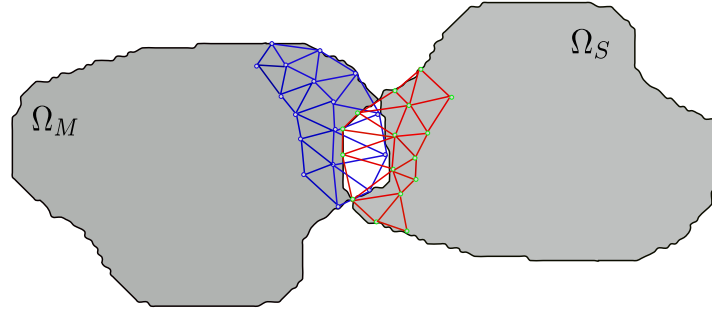


Figura 3.8: Discretización en elementos finitos de dos cuerpos en contacto

3.2.5.2. Discretización de los campos potenciales en 2D

Munjiza (2004)[259, 262] ha implementado el método de la función de penalización empleando el elemento finito en 2D más simple, es decir, un triángulo lineal de tres nodos, y asume que la función potencial de este elemento está dado por[259]:

$$\varphi(P) = \begin{cases} 0 & \text{Para puntos ubicados en el contorno o fuera del elemento finito.} \\ \min\{3A_1/A, 3A_2/A, 3A_3/A\} & \text{Para puntos dentro del elemento finito.} \end{cases} \quad (3.2.42)$$

donde A_i , $i = 1, 2, 3$ es el área correspondiente de los sub-triángulos de la figura 3.9. La función potencial es igual a 1 en el centro del triángulo y cero para aquellos puntos situados en el contorno o fuera del elemento finito. El problema de interacción entre dos triángulos pueden reducirse a una simple interacción entre el

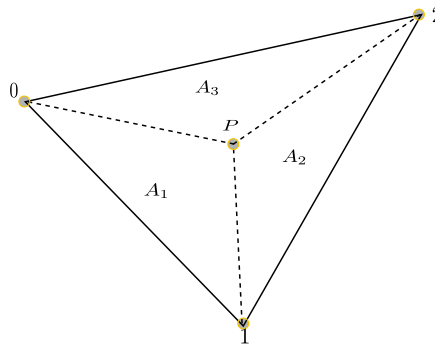


Figura 3.9: Potencial ϕ en cualquier punto P del triángulo.

triángulo Ω_{mi} y las caras del triángulo Ω_{sj} junto con la interacción del triángulo Ω_{sj} y las caras del triángulo Ω_{mi} como se muestra en la figura 3.10.

En la figura 3.11, se muestra el contacto entre el segmento \overline{AB} del triángulo Ω_{mi} y el triángulo Ω_{sj} . Con tal de minimizar el coste computacional se introduce un sistema local de coordenadas dado por ejes locales u ejes y v , a fin de realizar un cambio de coordenadas:

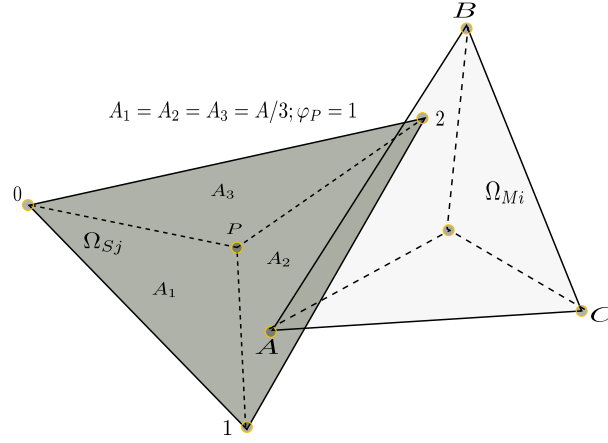


Figura 3.10: Contacto entre el triángulo Ω_m y Ω_s .

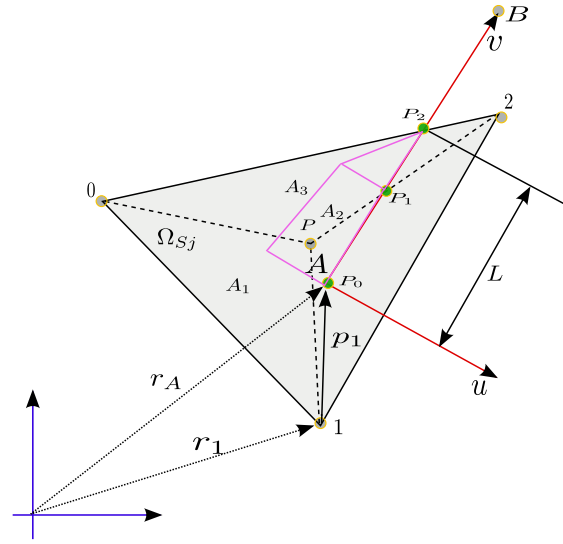


Figura 3.11: Distribución de la fuerza de contacto entre dos triángulos en contacto.

$$\mathbf{p}_i = ([\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A] \cdot \mathbf{u}, [\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_A] \cdot \mathbf{v}) \quad (3.2.43)$$

Usando coordenadas locales para el triángulo Ω_{sj} , se obtienen los puntos intersección entre el segmento \overline{AB} y el triángulo Ω_{mi} junto con los valores de la función potencial correspondientes. El potencial de cada punto de intersección P_0, P_1, P_2 se calcula por interpolación entre el punto P , donde el potencial es igual a 1 y los puntos del contorno 0, 1 y 2, donde el potencial es igual a cero. La fuerza de contacto total ejercida por segmento \overline{AB} sobre triángulo Ω_s está dada por el área bajo la curva del potencial, es decir:

$$\mathbf{f}_{i,AB} = \frac{1}{\mathbf{u}^2} \mathbf{u} \int_0^L p \varphi(v) dv \quad (3.2.44)$$

donde p es el término penalización y el término $\mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ proviene del hecho de que los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} no son vectores unitarios. Desde el punto de vista computacional esta operación es conveniente para la evaluación de la integral 3.2.44 ya que no implica el cálculo de una raíz cuadrada[259, 262, 200]. Además, entre los puntos de intersección del potencial está dado por las líneas rectas, lo que reduce la integración a un cálculo de área como se muestra en la figura 3.11.

La fuerza de contacto obtenida se representa por fuerzas nodales equivalentes en los nodos A y B del triángulo Ω_{mi} junto con fuerzas en los nodos del triángulo Ω_{sj} como se muestra en la Figura 3.12. Al proceder de esta manera se evita tener una concentración artificial de tensiones [200]. Todo el proceso se repite para los segmentos restantes \overline{BC} y \overline{CA} del triángulo Ω_{mi} . Para tener en cuenta la fuerza de contacto debido al potencial φ_{mi} asociada con el triángulo Ω_{mi} , se computan las fuerzas de contacto de cada segmento del triángulo Ω_{sj} con el triángulo Ω_{mi} y de nuevamente se repite el procedimiento descrito anteriormente. Este método puede

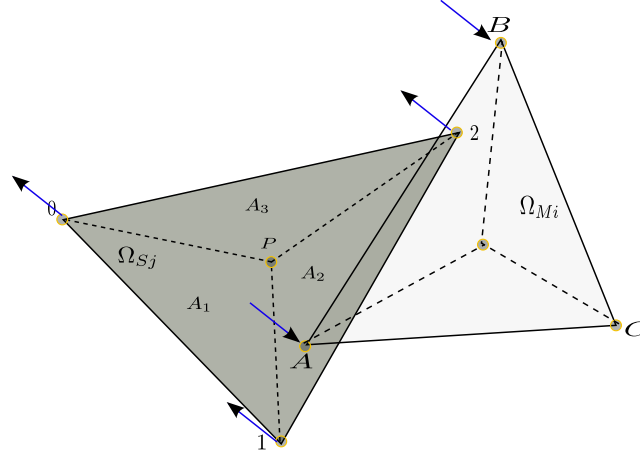


Figura 3.12: Fuerzas nodales equivalentes.

fácilmente trasladarse a 3D ya que el concepto es el mismo. En la referencia [259] se explica en detalle el método de penalización para tetraedros lineales y su implementación computacional y a la vez proporcionan las herramientas y códigos numéricos para su utilización (véase por ejemplo Munjiza Y-Code[259]). Se recomienda revisar dicha bibliografía. La gran ventaja de este método es que no requiere identificar a priori la superficie de contacto; solo requiere saber cual del los elementos finitos están en contacto. No obstante, las desventajas descrita anteriormente no limitan la utilización de este algoritmo que cada vez toma más popularidad. Como parte de este trabajo, se ha desarrollado una algoritmia de búsqueda de contactos por objetos basado en una descomposición espacial mediante celdas para una eficiente búsqueda de pares de contactos a fin de evitar búsquedas innecesarias y el empleo de la *fuerza bruta*. La ventaja de este algoritmo de búsqueda es que no está limitado a una geometría específica dada la facilidad con que se pueden realizar ciertas operaciones computacionales en el lenguaje de programación `c++`.

3.2.6. Integración de la ecuación del movimiento incluyendo contacto

A continuación se presenta la algoritmia de la integración de la ecuación del movimiento incluyendo las fuerzas de contacto descrita en este capítulo. La diferencia con respecto al integrador explícito original es la introducción de las fuerzas de contacto en el lado derecho de la ecuación de movimiento:

$$M\ddot{u}(t_n) + D\dot{u}(t_n) = \overbrace{f^{ext}(t_n) - f^{int}(t_n) + f^{cont}(t_n)}^{Rhs_n} \quad (3.2.45)$$

Algorithm 3.2: Seudo-Código para la integración de la ecuación del movimiento incluyendo fuerzas de contacto.

- 1 Paso $n + 1$ en $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}$;
Data: $u_n, \dot{u}_{n-1}, \ddot{u}_{n-1}, f_n^{ext}, f_n^{int}, f_n^{cont}$
Result: $u_{n+1}, \dot{u}_{n+\frac{1}{2}}, \dot{u}_n, \ddot{u}_n$
 - 2 Cómputo de las velocidades intermedias y actualización de los desplazamientos.
 - 3 $\dot{u}_{n+\frac{1}{2}}$
 - 4 $u_{n+1} = u_n + \Delta t_{n+1} \dot{u}_{n+\frac{1}{2}}$.
 - 5 Actualización de las coordenadas nodales.
 - 6 $x_{n+1} = X + u_{n+1}$.
 - 7 Cómputo de las fuerzas internas.
 - 8 $f_{n+1}^{int} = \int B^T \sigma_{n+1} d\Omega$
 - 9 Búsqueda de los pares de contacto.
 - 10 Cómputo de las fuerzas de contacto. f_{n+1}^{cont}
 - 11 Actualización del vector de fuerzas desbalanceadas Rhs_{n+1}
 - 12 Ir a próximo paso.
-

3.3. Búsqueda espacial de contactos

3.3.1. Introducción

Procesar en un análisis los posibles pares de contactos por cada paso de tiempo t_n involucra un total de operaciones de verificación equivalente a $N \frac{N-1}{2}$, siendo N el número total de cuerpos²⁷. Este procedimiento resulta computacionalmente costoso si el número de cuerpos es elevado y limitaría dicho procedimiento a un número limitado de cuerpos, tal vez unos pocas centenas de cuerpos. Para reducir dicho coste, se hace necesario eliminar dentro de la búsqueda aquellos pares de cuerpos que se encuentran alejados uno de otros y aquellos que no están en contacto. Se requiere entonces un algoritmo de búsqueda de contactos que a su vez sea rápido y eficiente para luego evaluar las fuerzas de contacto producida tras la colisión. Conocido la literatura como búsqueda de intersección geométrica, estos algoritmos han nacido dentro del método de los elementos discretos y se han convertido hoy en día en una importante línea de investigación computacional.

El proceso de identificación de pares de contacto que sean potenciales de contacto es una de las operaciones más costosas en un programa de cálculo por elementos finitos o elementos discretos[384]. Esto es especialmente cierto cuando se presenta problemas en el que el sólido puede pasar por procesos de fractura y fragmentación y convertirse en miles de elementos discretos, razón por la cual los algoritmos de búsqueda tienen como principal propósito minimizar el coste computacional de la operación de búsqueda. Por lo general, la búsqueda de los posibles pares de contactos incluye dos procesos distintos. El primero es una búsqueda global en el que se encuentran todos posibles pares de contacto, nodos candidatos que son potenciales de contacto con una superficie; la segunda es una búsqueda local que localiza la superficie de contacto y la posición del punto de contacto en la misma tras la búsqueda global.

Se han propuesto diferentes algoritmos para realizar la búsqueda global de contactos. Una visión general más completa y exhaustiva de métodos de búsqueda pueden encontrarse en [259, 264], no obstante, antes de detallar nuestro procedimiento de búsqueda, citaremos los mas populares. Entre ellos, los algoritmos de ordenamiento espacial (*spatial sorting*) [389]. Existe en la literatura especializada una gran diversidad de formas en la que se presenta dicho algoritmo: subdivisión por cuadrículas (*grid subdivision*), cuadrículado adaptativo (*adaptive grid methods*), arreglos binarios (*tree method: Octree, Kd-tree, Quadtree*), cuerpos basados en celdas (*body based cells*) y esquemas *Heapsort*. Un algoritmo de ordenamiento espacial muy empleado es el algoritmo de *ordenamiento por casilleros*²⁸ desarrollado para reemplazar la búsqueda por fuerza bruta, es decir, una búsqueda de todos contra todos. Así, la complejidad de la búsqueda se reduce sustancialmente a un orden operacional de $O(N \log_2 N)$. J. Har et al. [169] han desarrollado una versión tridimensional de este algoritmo de búsqueda para un cómputo en paralelo. W. Fujun et al. [130] proponen un proceso de recuperación de datos a partir de dos matrices unidimensionales resolviendo un problema de ordenamiento dentro de una búsqueda tridimensional. Según ellos, el coste de la búsqueda es del orden $O(N)$, que sería el coste ideal dentro del proceso de búsqueda.

Otro método dentro de los algoritmos de ordenamiento espacial es el uso de algoritmos de búsqueda binaria [47], a veces llamado *octrees* en tres dimensiones. En este caso el espacio se discretiza en las celdas rectilíneas donde los objetos (cuerpos, partículas, elementos finitos, elementos discretos, etc) se almacenan dentro de una o varias celdas ubicadas de acuerdo con el centro de masa de los objetos. Esta información se recoge en una estructura binaria de datos para facilitar la búsqueda espacial[384]. A continuación se recorre

²⁷ Este procedimiento se le llama con frecuencia *fuerza bruta*

²⁸ Bucket-sort o bin-sort en inglés.

el árbol de datos para determinar qué objetos habitan en las celdas. Estos algoritmos poseen la ventaja de que la búsqueda no se realiza sobre las celdas vacías, no obstante, la diferencia de tamaño de los objetos puede degradar la rapidez del algoritmo. Sin embargo, con una técnica de agrupación más sofisticada, tal como el uso de un método de la cuadrícula adaptativo[389], este inconveniente puede ser eliminado. Otra debilidad de estos enfoques es que pueden ser sensibles en la manera en que la estructura del árbol es inicialmente construido, provocando en ocasiones una sobrecarga computacional a la hora de recorrer el árbol.

Recientemente, se han reportados varias alternativas a los algoritmos de búsqueda binaria. Estos algoritmos son conocidos como *No binary search* o simplemente *NBS*. En las referencias [260, 263] se explica en detalle los conceptos de este algoritmo junto con su implementación computacional. Estos algoritmos de detección de contactos han reportado tiempos de búsqueda de orden de $O(N)$, sin importar el orden de la densidad de empaquetamiento. Generalmente hablando, los algoritmos de búsqueda son explotados en muchos problemas reales, sobre todo en problemas altamente dinámicos. Al tener un coste computacional elevado debido al consumo de tiempo de *CPU*, Mujiza propone que un eficiente algoritmo de búsqueda de contactos debe poseer las siguientes características[259]:

- 1 . Robustez.
- 2 . Facilidad de implementación.
- 3 . Eficiencia computacional.
- 4 . Gasto mínimo de memoria.

La robustez significa que el algoritmo de búsqueda de contacto detecte todos aquellos elementos que están en contacto y elimine aquellos que no lo están. Eficiencia computacional quiere decir que el tiempo de búsqueda y detección de los cuerpos que están en contacto sea mínimo. Por lo general este tiempo T es medido en función del número total de cuerpos y podría ser proporcional a $T \propto N$, $T \propto N^2$ o $T \propto N \log_2 N$. Gasto mínimo de memoria significa que la memoria *RAM* total necesaria para la detección de contacto y almacenar todos sus datos sean lo menos posible. La situación ideal sería que el gasto de memoria *RAM*, fuera proporcional al número de cuerpos N , o sea que $M \propto N$.

Inspirado en las ideas del A. Mujiza[259, 264], en este trabajo se propone un algoritmo genérico²⁹ de búsqueda de contactos por objetos³⁰ basado en una descomposición espacial. Es un algoritmo de tipo *NBS* que hace uso del componente *caja contenedora* para ubicar la posición espacial de los objetos y buscar los potenciales de contacto en las celdas correspondientes. Ya que los elementos finitos constituyen figuras geométricas como triángulos, rectángulos, tetraedros, hexaedros, etcétera, dicha idea ha sido extrapolada a estas entidades geométricas.

3.3.2. Algoritmo *NBS* basado en Objetos

La detección de los pares de contactos requiere mucho esfuerzo computacional dependiendo del tipo de problema a tratar. Dado que se emplea un esquema de integración explícita limitada a un tiempo no mayor

²⁹Es decir, este algoritmo es aplicable para todo tipo de entidad geométrica, no solo círculos y esferas como fueron reportados en principio.

³⁰Entiéndase por objeto cualquier entidad geométrica.

que el tiempo critico (y a miles, tal vez millones pasos de tiempo), se hace necesario tener un algoritmo de búsqueda eficiente, sobre todo si se considera que muchos cuerpos pueden entrar en contacto.

El algoritmo de búsqueda de contactos *NBS* basado en objetos y aplicado al método de los elementos finitos se fundamenta en la idea de que cada elemento finito ubicado en el contorno sea tratado como un elemento discreto. En nuestro caso, aquellos elementos finitos en el que al menos una cara o un nodo esté en el contorno del sólido son considerados como elementos de contacto. Para más claridad, la figura 3.13 se ha señalado con puntos rojos aquellos elementos que están o pertenecen al contorno de un modelo en 2D³¹. A diferencia del algoritmo *NBS* desarrollado por Munjiza et al. para cuerpos de tamaños similares [260],

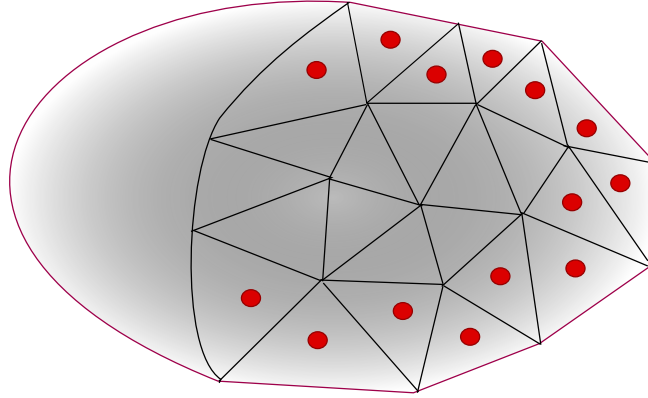


Figura 3.13: Elementos considerados como elementos de contorno.

el algoritmo propuesto asume que los objetos pueden tener distintos tamaños. El contorno espacial donde se encuentran ubicados cada uno de estos objetos es definido mediante los puntos $\mathbf{P}_{min} = \{x_{min}, y_{max}, z_{min}\}$ y $\mathbf{P}_{max} = \{x_{max}, y_{max}, z_{max}\}$ que no es más que un contenedor virtual que envuelve todo el dominio del modelo geométrico. Los puntos \mathbf{P}_{min} y \mathbf{P}_{max} son computados a partir de las coordenadas nodales de los elementos finitos que conforman el contorno del modelo. Basta con un simple bucle comparar cada componente de la coordenada de cada nodo para saber cuál es la coordenada mínima y máxima. Este procedimiento es aplicable también a problemas tridimensionales. Con frecuencia, a los puntos \mathbf{P}_{min} y \mathbf{P}_{max} se le adiciona una pequeña longitud (llamada en ingles *buffer size* b_z comúnmente función de una fracción de la longitud del elemento h^e) con el fin de englobar en su totalidad todo el modelo geométrico³². La figura 3.14 nos da la idea de cómo es el contenedor virtual en 2 dimensiones.

3.3.3. Descomposición espacial

Para identificar los nodos y los elementos que pudieran entrar en contacto, se introduce el concepto de *celdas* y *cajas contenedoras*. Un típico ejemplo de subdivisión por celdas en 2D se muestra en la figura 3.15. Sean $\mathbf{L} = \{l_x, l_y, l_z\}$ las longitudes de los lados del contenedor dados por la diferencia de $\|x_{max} - x_{min}\|$, $\|y_{max} - y_{min}\|$ y $\|z_{max} - z_{min}\|$ respectivamente. El dominio de cada una de las celdas quedará descrito entonces por un par de puntos que definen la coordenada mínima y máxima de la celda y el numero N de celdas en

³¹ Como cada elemento es considerado como un objeto individual, es necesario diferenciar aquellos pares de contacto que serían *elementos vecinos*, es decir aquellos que comparten una arista o cara en común.

³² O sea $\mathbf{P}_{min} = \{x_{min} - b_z, y_{min} - b_z, z_{min} - b_z\}$ y $\mathbf{P}_{max} = \{x_{max} + b_z, y_{max} + b_z, z_{max} + b_z\}$.

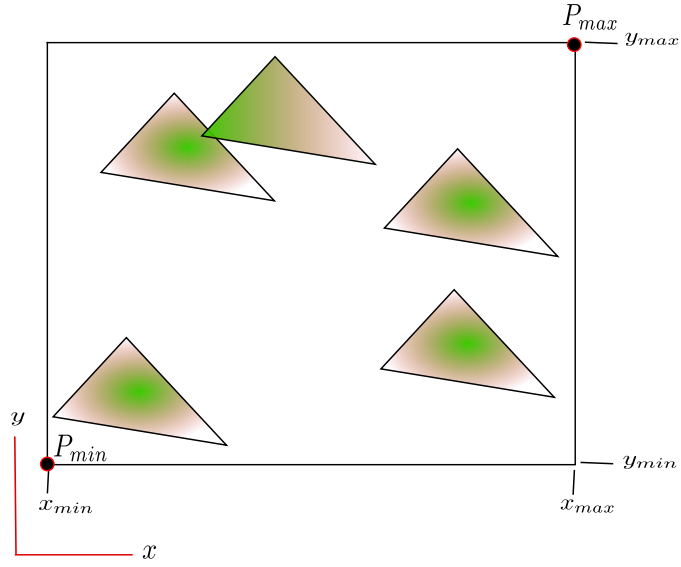


Figura 3.14: Problema de detección de contactos. Contorno espacial.

que se subdivide cada dirección:

$$\mathbf{x}_{min}^c = \{x_{min}^c, y_{min}^c, z_{min}^c\} \quad (3.3.1)$$

$$\mathbf{x}_{max}^c = \{x_{max}^c, y_{max}^c, z_{max}^c\} \quad (3.3.2)$$

$$\mathbf{N} = \{N_x, N_y, N_z\} \quad (3.3.3)$$

El número total de celdas dentro del contorno espacial es :

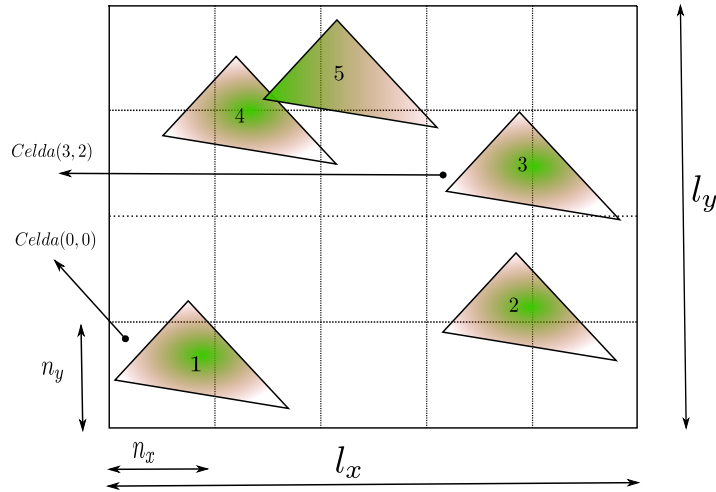


Figura 3.15: Descomposición espacial por celdas

$$N_{celdas} = N_x \times N_y \times N_z \quad (3.3.4)$$

La posición de las celdas pueden ser geoméricamente identificadas por medio de sus coordenadas naturales (i_x, i_y) en 2D e (i_x, i_y, i_z) en 3D, donde $i_x = 0, 1, 2, \dots, N_x - 1$ e $i_y = 0, 1, 2, \dots, N_y - 1$, siendo N_x y N_y el número

total de celdas en dirección x e y respectivamente. Lo mismo aplica para la dirección z . La figura 3.15 nos muestra la ubicación espacial de las celdas $(0, 0)$ y $(3, 2)$. El número de celdas N_x , N_y y N_z en la dirección x , y y z respectivamente se calcula como:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{l_x}{n_x} \\ N_y &= \frac{l_y}{n_y} \\ N_z &= \frac{l_z}{n_z} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

siendo $\|n_x = x_{max}^c - x_{min}^c\|$, $\|n_y = y_{max}^c - y_{min}^c\|$, $\|n_z = z_{max}^c - z_{min}^c\|$ las dimensiones de la celda en las tres respectivas direcciones. La dimensión de la celda dependerá de qué tan grande sea el modelo y de qué tan refinada se requiera hacer la búsqueda. Para geometrías isotrópicas, lo recomendable es que las dimensiones de las celdas sean lo más uniforme posible. Sin embargo, si en el modelo de análisis se presenta concentraciones de objetos en un determinado lugar o existen objetos cuyas proporciones sean comparables respecto a otros, podría dar lugar a que ciertas celdas no almacenen ningún objeto y otras con grandes aglomeraciones de cuerpos haciendo perder así la eficiencia de la búsqueda, la cual es la principal causa de la degradación del rendimiento del algoritmo.

Considere un modelo con N objetos genéricos de distintos tamaños. Mediante un proceso de normalización, se computan las proporciones $\beta := (\frac{l_x}{l}, \frac{l_y}{l}, \frac{l_z}{l}) = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$ siendo l la mayor distancia, es decir; $l = \max(l_x, l_y, l_z)$. El número de celdas en la dirección de mayor distancia será el valor entero de :

$$N_{max} = \left(\frac{N}{\beta_x \beta_y \beta_z} \right)^{\frac{1}{d}} + 1 \quad (3.3.6)$$

donde d es la dimensión característica del problema. Nótese la relación entre el número de máximo de celdas y la cantidad de cuerpos. Con simple álgebra, el número de celdas en cada una de la direcciones se calcularán como³³:

$$\begin{aligned} N_x &= \beta_x \times N_{max} \\ N_y &= \beta_y \times N_{max} \\ N_z &= \beta_z \times N_{max} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Un algoritmo de búsqueda de contactos ha de ser independiente de la geometría del objeto debido a que tanto en el método de los elementos finitos como en los elementos discretos se usan una gran variedad de geometrías. Este algoritmo asume también que cada objeto o entidad geométrica puede aproximarse mediante un rectángulo en $2D$ o un paralelepípedo en $3D$. Geométricamente significa que cada objeto está contenido completamente dentro de un espacio finito como lo muestra la figura 3.16. Este espacio se denomina cuadro delimitador o caja contenedora³⁴ cuyos lados son paralelos a los ejes cartesianos. El tamaño de la caja contenedora de un objeto depende del tamaño del objeto. El uso principal de la caja contenedora es seleccionar adecuadamente aquellas celdas en donde se llevará a cabo la búsqueda. La caja contenedora de una geometría cualquiera está dada por el punto mínimo \mathbf{x}_{min}^b y el punto máximo \mathbf{x}_{max}^b de dicha geometría. En elementos finitos por ejemplo, los componentes de \mathbf{x}_{min}^b y \mathbf{x}_{max}^b serán el menor y el mayor valor de cada una de las coordenadas de los nodos del elemento finito respectivamente.

Con el propósito de aumentar el volumen de la caja contenedora tal que el objeto contenido quede comple-

³³La idea básica es tener más celdas la dirección de mayor longitud y a la vez buscar uniformidad en el tamaño de las celdas

³⁴En ingles se le conoce como bounding-box.

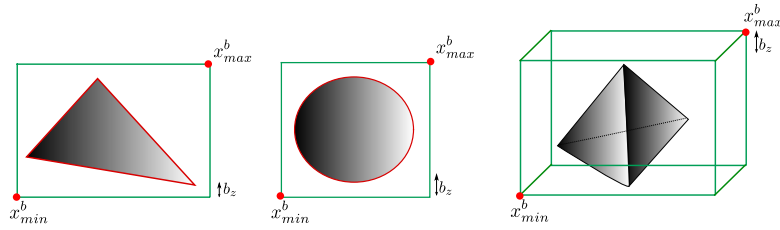


Figura 3.16: Caja contenedora para distintos tipos de objetos.

tamente dentro de éste, al punto x_{min}^b se le resta una longitud b_z y x_{max}^b se le adiciona tal y como se muestra en la figura 3.16. Esto nos permite seleccionar adecuadamente aquellas celdas que son *marcadas* por la caja contenedora, como más adelante se detallará. Es usual tomar la longitud b_z como función de la longitud del objeto geométrico.

3.3.4. Asignación de los objetos a las celdas

La descomposición espacial descrita anteriormente tiene el objetivo de situar en el espacio los objetos que están en el contenedor. Es aquí donde radica la importancia de la caja contenedora del objeto: Seleccionar aquellas celdas en donde se encuentra ubicado el objeto. En C++ los objetos, el contenedor, las celdas y las cajas contenedoras pueden ser representadas mediante estructuras o mediante el concepto de clases. Las celdas ejercerán como contenedores de información de los objetos.

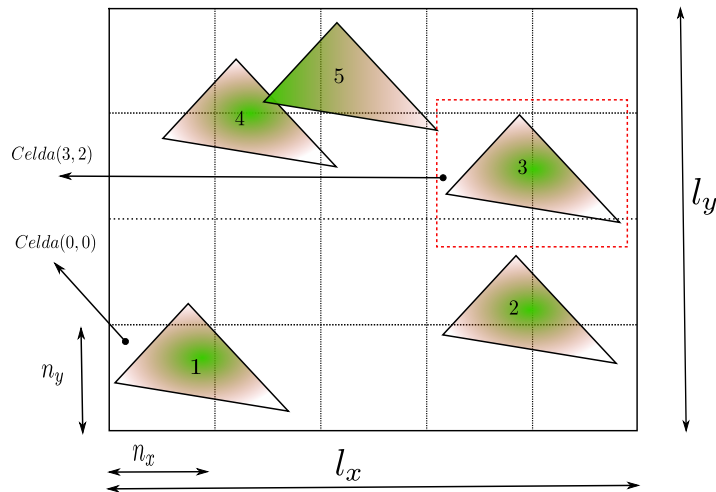


Figura 3.17: Ubicación espacial del objeto en el contenedor.

En la figura 3.17 se observa que la caja contenedora del objeto $N^{\circ}3$ marca las celdas (3,1), (4,1), (3,2), (4,2), (3,3) y (4,3). Esto significa que cada una de estas celdas reportarán al objeto $N^{\circ}3$ como dato o información. Esta operación se tiene que realizar por cada objetos del modelo. A esta operación le denominaremos *asignación de objetos a las celdas*. Obsérvese que una celda puede reportar más de un objeto, pero ninguno de ellos repetidos³⁵ (véase cuadro 3.1).

³⁵OC es el identificador del objeto contenido por la celda

Celda	OC	Celda	OC	Celda	OC	Celda	OC	Celda	OC
(0, 0)	1	(1, 0)	1	(2, 0)	-	(3, 0)	2	(4, 0)	2
(0, 1)	1	(1, 1)	1	(2, 1)	-	(3, 1)	2,3	(4, 1)	2,3
(0, 2)	4	(1, 2)	4,5	(2, 2)	4,5	(3, 2)	3,5	(4, 2)	3
(0, 3)	4	(1, 3)	4,5	(2, 3)	4,5	(3, 3)	3,5	(4, 3)	3

Cuadro 3.1: Objetos contenidos en las celdas

Podemos usar el artificio de representar geoméricamente un conjunto de celdas mediante un arreglo bidimensional \mathcal{C} . Para un problema en 2D, este arreglo se asocia a la siguiente matriz:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) & (2,0) & (...) & (i_x, 0) \\ (0,1) & (1,1) & (2,1) & (...) & (i_x, 1) \\ (0,2) & (1,2) & (2,2) & (...) & (i_x, 2) \\ (0,3) & (1,3) & (2,3) & (...) & (i_x, 3) \\ (...) & (...) & (...) & (...) & (...) \\ (0,i_y) & (1,i_y) & (2,i_y) & (...) & (i_x, i_y) \end{pmatrix} \quad (3.3.8)$$

donde i_x e i_y corresponde al índice de una determinada celda. Con esta idea a mano, resulta más conveniente entonces evaluar los índices i_x, i_y, i_z de aquellas celdas donde se ubica el objeto. Como se conocen los puntos mínimos y máximos de la caja contenedora del objeto, es decir; \mathbf{x}_{min}^b y \mathbf{x}_{max}^b , es fácil deducir cuál es el índice de la celda inferior y superior señalada por la caja contenedora del objeto. Por tanto, este proceso de mapeo se realiza mediante el empleo de la aproximación entera de los puntos mínimos y máximos de la caja contenedora de cada objeto.

El índice de la celda inferior $i_x^{min}, i_y^{min}, i_z^{min}$ serán entonces:

$$\begin{aligned} i_x^{min} &= \text{Int}\left(\frac{x_{min}^b - x_{min}}{n_x}\right) \\ i_y^{min} &= \text{Int}\left(\frac{y_{min}^b - y_{min}}{n_y}\right) \\ i_z^{min} &= \text{Int}\left(\frac{z_{min}^b - z_{min}}{n_z}\right) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

y el índice superior:

$$\begin{aligned} i_x^{max} &= \text{Int}\left(\frac{x_{max} - x_{max}^b}{n_x}\right) \\ i_y^{max} &= \text{Int}\left(\frac{y_{max} - y_{max}^b}{n_y}\right) \\ i_z^{max} &= \text{Int}\left(\frac{z_{max} - z_{max}^b}{n_z}\right) \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

donde $\text{Int} :=$ es función que retorna el valor entero de una cantidad. El conjunto de celdas selladas por la caja contenedora del objeto para un caso bidimensional serán entonces las celdas representadas en la siguiente matriz \mathcal{C}_{box} .

$$\mathcal{C}_{box} = \begin{pmatrix} (i_x^{min}, i_y^{min}) & (i_x^{min} + 1, i_y^{min}) & (...) & (i_x^{max}, i_y^{min}) \\ (i_x^{min}, i_y^{min} + 1) & (i_x^{min} + 1, i_y^{min} + 1) & (...) & (i_x^{max}, i_y^{min} + 1) \\ (...) & (...) & (...) & (...) \\ (i_x^{min}, i_y^{max}) & (i_x^{min} + 1, i_y^{max}) & (...) & (i_x^{max}, i_y^{max}) \end{pmatrix} \quad (3.3.11)$$

Trasladar este concepto a tres dimensiones es completamente análogo. Si nos fijamos detalladamente en la celda (4, 3) de la figura 3.17, se observa que aunque la caja contenedora del objeto *Nº3 marca* esta celda, su objeto en sí no toca la celda. Por tanto, habrá lugar a una búsqueda innecesaria dentro de ella, ya que este objeto no estará en colisión alguna con aquellos objetos reportados por la celda (4, 3). Para remediar este inconveniente y optimizar el proceso de búsqueda, se hace necesario emplear un algoritmo de intersección entre la celda³⁶ y el objeto. Sólo así almacenaremos en el contendedor de la celda aquellos objetos que verdaderamente intersecten con la celda. Si se tiene disponible un algoritmo para este propósito, entonces el cuadro 3.1 reportará los datos siguientes:

Nótese ahora que las celdas (3, 3) y (4, 3) ya no reportan contenido algún objeto. Obsérvese también que

Celda	OC	Celda	OC	Celda	OC	Celda	OC	Celda	OC
(0, 0)	1	(1, 0)	1	(2, 0)	-	(3, 0)	2	(4, 0)	2
(0, 1)	1	(1, 1)	-	(2, 1)	-	(3, 1)	2,3	(4, 1)	2,3
(0, 2)	4	(1, 2)	4	(2, 2)	4,5	(3, 2)	3,5	(4, 2)	3
(0, 3)	4	(1, 3)	4,5	(2, 3)	5	(3, 3)	-	(4, 3)	-

Cuadro 3.2: Objetos contenidos en las celdas

la búsqueda de los potenciales de contactos se realizará en aquellas zonas del espacio donde realmente se encuentra el objeto. En aquellas celdas donde no esté contenido un objeto o en aquellas celdas descartadas, no se realizará operación alguna, ahorrándose la ejecución de innecesarias operaciones y chequeos de contacto. Sin embargo, cabe señalar que este chequeo adicional puede resultar costoso en geometrías complejas, ya que se requieren realizar varias pruebas de verificación de intersección geométrica.

3.3.5. Detección de contactos

En este algoritmo que proponemos, la detección de contactos se lleva a cabo de las dos maneras:

1. Comprobando directamente si hay intersección geométrica entre todos los objetos que están contenidos en una determinada celda.
2. Verificando si hay contacto entre un objeto individual y los objetos contenidos en las celdas señaladas por la caja contenedora del objeto en cuestión.

Para saber si dos figuras geométricas están en contacto, es necesario realizar una serie de chequeos que comprueban su estado de colisión. Esta operación es costosa, dependiendo sobre todo de la figura geométrica que se quiera verificar. Por tanto, se requiere entonces de algoritmos de colisiones entre objetos. En la

³⁶Tenga en cuenta de que la celda es una figura geométrica: un rectángulo en 2D y un paralelepípedo en 3D.

literatura, sobre todo aquellas dedicadas a *Geometría Computacional*, tienen reportado algoritmos de colisiones entre objetos del mismo tipo como esfera-esfera, triángulo-triángulo, tetraedro-tetraedro, etc; y también objetos de diferentes tipos como por ejemplo esfera-triángulo, triángulo-cuadrilátero, tetraedro-esfera, entre otros. La más simple es el contacto esfera-esfera. El contacto entre los elementos finitos más usuales, es decir; triángulo-triángulo, triángulo-rectángulo, tetraedro-tetraedro, hexaedro-tetraedro, hexaedro-hexaedro es mucho más complicado y laborioso.

El algoritmo de búsqueda propuesto se auxilia de estos algoritmos de colisiones. Nuestro diseño permite estos algoritmos puedan ser definidos por el usuario de una manera independiente y sin necesidad de tocar el código fuente mediante una interfaz desarrollada para tal propósito. Al final, lo que se persigue con el algoritmo de búsqueda es obtener la lista de todos los pares de contacto del modelo. El pseudo-código que se presenta en el algoritmo E.1 describe cómo se computa la lista completa de los pares de contactos.

Dado que a que caja contenedora delimita a múltiples celdas, pueden aparecer más de una vez objetos que son potencialmente contacto (véase por ejemplo las celdas (3, 1) y (4, 1)). Se deberá por tanto tener especial cuidado en no registrar el mismo par de contactos durante el recorrido sobre las celdas. El programa debe ser capaz de identificar entonces cuando un objeto en particular ya ha sido registrado para poder pasarlo por alto cuando nuevamente se presente en otra celda. También debe incluirse una sentencia lógica para evitar que un objeto se registre así mismo como un objeto potencialmente en contacto. La existencia de esa sentencia lógica hace que el objeto *salte* por encima de cualquier posible contacto consigo mismo, el cual permite que el programa se desplace rápidamente por las demás celdas. No obstante, la experiencia numérica nos ha

Algorithm 3.3: *Seudo-Código para obtener la lista de todos los pares de contacto*

Result: Lista de todos los pares de contacto

```

1 for celda  $cell = 1, 2, \dots, N\text{-ésimo celdas}$  do
2   for objetos  $obj_i = 1, 2, \dots, N\text{-ésimo en celda } cell$  do
3     for objetos  $obj_j = 1, 2, \dots, N\text{-ésimo en celda } cell$  do
4       if ( $obj_i \neq obj_j$ ) then
5          $bool = \text{Comprueba Colisión entre } obj_i \text{ y } obj_j$ ;
6         if ( $bool == True$ ) then
7           Añada  $obj_i$  y  $obj_j$  a la lista de pares de contactos;
```

Algorithm 3.4: *Seudo-Código para obtener la lista contactos de un objeto*

Result: Lista de Contactos

```

1 for objeto  $obj_i = 1, 2, \dots, N\text{-ésimo Objetos}$  do
2   Compute las celdas que marca el objeto  $obj_i$ ;
3   for Cada celda marcada  $cell = 1, 2, \dots, N\text{-ésimo celdas marcadas}$  do
4     for objeto  $obj_j = 1, 2, \dots, N\text{-ésimo objetos en celda } cell$  do
5        $bool = \text{Comprueba Colisión entre } obj_i \text{ y } obj_j$ ;
6       if ( $bool == True$ ) then
7         Añada objeto  $obj_j$  a la Lista de Contactos;
```

enseñado que obtener la lista de todos los pares de contactos suele ser una operación costosa no sólo por la

asignación y reordenamiento dinámico de memoria, sino también porque hay que asegurar que no se repita ningún par de contactos. Una manera más eficiente es hacer que este procedimiento sea capaz de devolver todos los contactos o potenciales de contacto de un determinado objeto. El pseudo-código de esta algoritmia se muestra en el cuadro 3.4.

Para tener una idea del número de operaciones a realizar, suponga que el espacio bidimensional dividido en $m \times m$ celdas cuenta con un número n de cuerpos uniformemente espaciados y distribuidos de tal manera que sean en promedio un número de $\frac{n}{m}$ cuerpos por cada celda. Se realizarán un total de $(\frac{n}{m})(\frac{n}{m}-1)/2$ operaciones de búsqueda para un total de $(n)(\frac{n}{m}-1)/2$ verificaciones por cada celda. Como se puede notar, el coste será mucho menor que hacer la comprobación de todos contra todos, cuyo coste operacional es del orden $n\frac{(n-1)}{2}$ [257]. Sin embargo, para un número de objetos menores a 100 el empleo de la fuerza bruta resulta ser más eficiente.

3.3.6. Algoritmos de detección de colisión

Una colisión es una configuración en la que dos o más puntos de objetos distintos ocupan parte de un mismo espacio al mismo tiempo. La principal finalidad de los algoritmos de detección de colisión es calcular las interacciones geométricas entre los objetos, sin importar el número y la complejidad que los objetos puedan tener.

Desde el punto de vista de Geometría Computacional, el término *detección de colisión* es parte del término general *manipulación de la colisión*, normalmente dividido en tres partes: *detección de colisión*, *determinación de colisión* y *respuesta a la colisión*. El resultado de la detección de colisión es un valor lógico que indica si dos o más objetos colisionan, mientras que la determinación de colisión hace referencia al cálculo de las intersecciones entre objetos y la respuesta a colisión señala las acciones a realizar en respuesta a la colisión entre objetos³⁷.

Los algoritmos tradicionales de detección de colisión requieren una gran cantidad de comprobaciones geométricas, verificando si el contorno de un objeto intersecta a algún contorno de otro objeto. La mayoría de los investigadores en el área proponen algoritmos que reduzcan el número de llamados para verificar la intersección entre dos figuras primitivas³⁸. No obstante, el tiempo de procesamiento necesario para determinar la colisión entre objetos no es el único problema a resolver. En la mayor parte de los ordenadores, tanto la precisión numérica como la capacidad de almacenamiento están limitadas. En este sentido, pueden surgir problemas numéricos provenientes de la aritmética finita de los ordenadores que influirán significativamente en la corrección y robustez de los algoritmos [111].

No es objeto de este trabajo entrar en detalles en los algoritmos de detección de contactos. No obstante, hay que señalar que un algoritmo de detección que compruebe la intersección de las aristas de un triángulo, con otro, o diseñar un algoritmo de intersección tetraedro/tetraedro comprobando la intersección de las seis aristas o las cuatro caras de un tetraedro con el otro es un algoritmo ineficiente. Nuestro código de búsqueda por objetos ha sido desarrollado junto con una interfaz que permite incorporar los algoritmos de búsqueda más eficientes y que son independiente del proceso de búsqueda. Los algoritmos de detección empleados en este trabajo para tratar la colisión entre triángulo/triángulo y triángulo/rectángulo se basan en las ideas desarrollada por el Tomas Akenine-Moller[4, 265]. El algoritmo de detección tetraedro/tetraedro está justificado

³⁷Nótese que esta respuesta la obtenemos mediante el Método de Penalización o los Multiplicadores de Lagrange.

³⁸Las formas geométricas consideradas primitivas se deben a su básica constitución en partes que la conforman como son el círculo, triángulo, esferas, tetraedros, entre otros.

en los trabajos de F. Ganovelli, F. Ponchio and C. Rocchini [144]. Estos algoritmos son altamente eficientes. La mayoría de ellos tienen la ventaja de que están escritos en algún lenguaje de programación ya sea *C*, *C++* o *Matlab* para su reutilización y están completamente optimizados y revisados. Se recomienda examinar las fuentes dedicadas a Geometría Computacional [371] para más estudio y profundidad en estos algoritmos.

3.3.7. Ventajas y desventajas del método

Debido a la sencillez de este algoritmo, éste ofrece las siguientes ventajas:

1. La ubicación espacial de los objetos se obtiene de una manera inmediata, al contrario que la estructuras de datos de árboles (estructuras binarias de búsqueda), donde el descenso a la región espacial de interés implica múltiples saltos en la memoria. Además, es computacionalmente más barato generar una estructura basada en descomposición espacial que una estructura de árbol binario.
2. La recuperación de la información es monótonica si se accede ordenadamente a los contenedores que cubre la región de búsqueda (eje x , a lo largo y , a lo largo de z), minimizando el coste de memoria caché.

Por otro lado, tienen de las siguientes desventajas:

1. Para un modelo en que los objetos que se distribuyen de una manera desigual en el espacio, muchos objetos pueden caer en una determinada celda lo que implicaría que un gran número de objetos pueden ser devueltos al consultar una región de búsqueda.
2. Para modelos cuyos objetos tienen grandes disparidades en el tamaño, un objeto puede caer en varias celdas a la vez, lo que puede llevar a devolver los mismos objetos al hacer la búsqueda.

3.3.8. Búsqueda local

El algoritmo de búsqueda global proporciona como información los pares de contactos detectados en un determinado instante de tiempo. Sin embargo, al utilizar un algoritmo de discretización de superficies de contacto basado en *nodo-segmento* o *nodo-superficie* esta información por sí sola no es suficiente. Se requiere identificar la superficie o segmento con la que un nodo de un elemento finito colisiona y calcular su proyección sobre la misma. El enfoque *nodo-segmento* o *nodo-superficie* se utiliza generalmente en conjunción con elementos de bajo orden. Esta elección se realiza en parte debido a la mayor simplicidad de la formulación, y en parte debido a la distribución uniforme de fuerzas de contacto. Sin embargo, esta formulación presenta algunas limitaciones que son bien conocidas, pero han sido objeto de investigaciones limitadas. En particular, el algoritmo presenta graves problemas en el tratamiento de algunos casos especiales, en el que la identificación de la superficie de contacto es ambiguo o imposible, tal como se muestra en la figura 3.18. En [142] describen en detalle como tratar numéricamente algunos casos en un análisis bidimensional y en [404] proponen una novedosa técnica para solucionar algunos de estos inconvenientes.

El esquema *nodo-segmento* o *nodo-superficie* se aplica en este trabajo cuando se emplea el Método de los Multiplicadores de Lagrange. En el Método de la Función de Penalización no es necesario realizar este proceso, pues las fuerzas de contacto se obtienen a través de la intersección de áreas de los objetos o en este caso de los elementos finitos. Ambos métodos pueden trabajar conjuntamente sin perder la calidad de la

solución. En casos en que no se pueda identificar correctamente el segmento de contacto se aplica el Método de Penalización, en caso contrario el Método de Multiplicadores de Lagrange. La búsqueda local consiste en

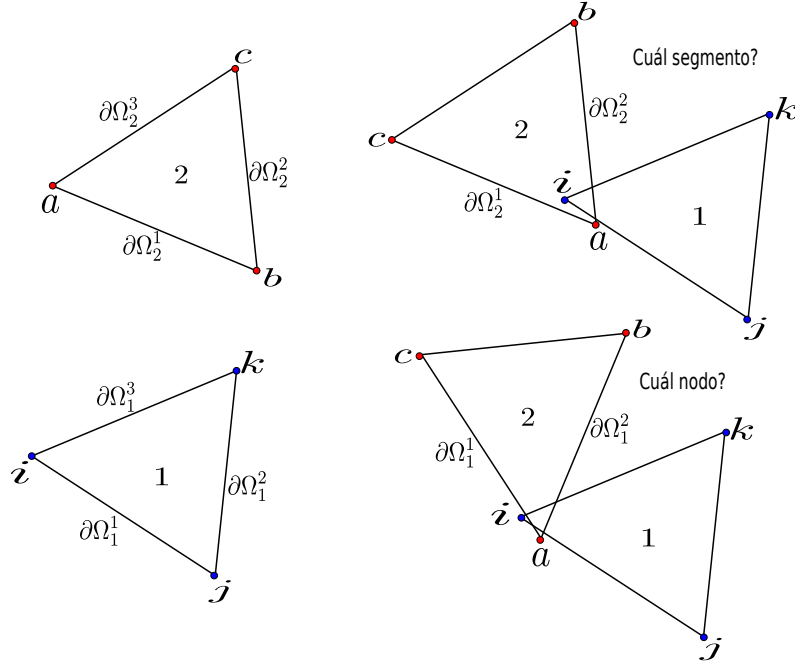


Figura 3.18: Situaciones ambiguas de contacto.

determinar la superficie o segmento de contacto una vez sean identificados los pares de contacto. Solamente los nodos de los elementos finitos etiquetados como nodos de superficie son *los nodos de contacto*. Previamente se busca el nodo más cercano utilizando la descomposición espacial descrita anteriormente para luego realizar el proceso de cálculo de distancias. Las superficies de contacto que comparten este nodo se consideran como las superficies potenciales de contacto. Solo queda por elegir cuál de los segmentos es el correcto mediante los procedimientos especificados en [142] y [404]. En general, estos procesos consisten en operaciones lógicas que buscan la proyección más cercana y examinando la normal de la superficies de contacto. Sin embargo, puede pasar el caso en que el nodo más cercano no sea parte de los nodos de los pares de contacto por lo que se requiere realizar ciertas verificaciones adicionales. Se tiene que poner sobre todo especial cuidado en procesos de fractura y fragmentación, donde el proceso de elección correcta del segmento es realmente complicado si existen ramificaciones de fractura. Una mala elección se la superficie puede ocasionar problemas numéricos afectando directamente en la estabilidad en el esquema explícito.

3.4. Ejemplos numéricos

3.4.1. Problema de impactos

El impacto consiste en un proceso de colisión de dos o más cuerpos. En un análisis de impacto interesa computar las fuerzas de contacto como una función del tiempo y determinar las velocidades de los cuerpos después de la colisión. Las velocidades están relacionadas con las ondas de choque que viajan a lo largo de

los cuerpos. Al mismo tiempo existe también un impulso de tensión que se desplaza a la misma velocidad. Cuando dicho pulso alcanza los extremos libres de un cuerpo, se produce la reflexión de la onda con igual amplitud del pulso de tensión y velocidad opuesta. Los ejemplos más simples para analizar este fenómeno son problemas unidimensionales de impacto de barras, que detallaremos más adelante.

La solución analítica de los problemas de impacto de barras con un área transversal A y módulo de elasticidad E se derivan de la ecuación de onda en una dimensión:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.4.1)$$

La solución de la ecuación diferencial 3.4.1 tiene la siguiente forma:

$$u(t) = f(x - ct) + g(x + ct) \text{ siendo } c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.4.2)$$

siendo c la velocidad de transmisión de las ondas. La función f corresponde a la velocidad de la onda viajando en dirección x de la barra y la función g se asocia a la velocidad de transmisión de la onda trasladándose en sentido contrario. La diferenciación de la ecuación 3.4.2 con respecto a x y t se obtiene una relación lineal entre la tensión en cualquier punto de la barra y la velocidad de la onda ³⁹:

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = \rho c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.4.3)$$

Los cuerpos estarán en contacto hasta que la onda reflejada generada en el contacto alcance de nuevo el punto de contacto. Esto determina entonces el fin del contacto y por consiguiente la separación de los cuerpos. Para dos barras de colisión, este tiempo corresponde a

$$T = \frac{2l}{c} \quad (3.4.4)$$

donde l es la longitud de la barra y c es la velocidad de onda. Este hecho posee dos importantes implicaciones en la implementación numérica. La primera es que el tiempo de impacto es muy corto y las tensiones generadas son altas. Por lo tanto, los métodos numéricos que resuelven los problemas de contacto tiene que incluir el comportamiento no lineal del material y ser diseñados para respuestas de tiempos cortos. Para capturar el comportamiento dinámico del contacto se debe empelar un paso de tiempo apropiado. En los esquemas de integración explícita este no es un inconveniente ya que el paso de tiempo es pequeño. En segundo lugar, debido a las altas respuestas oscilatorias cerca del frente de la onda, hay tener cuidado al construir algoritmos de contacto, en el sentido de que no hay que destruir las características del frente de onda en el esquema numérico [58].

3.4.1.1. Impacto de una barra con una pared rígida

Este ejemplo corresponde al contacto de una barra con una pared rígida. La teoría clásica postula una distribución uniforme de tensiones a través de cualquier sección de la barra. El impacto se produce cuando una barra que se desplaza con una velocidad constante v_0 choca con la pared rígida. En ese instante, se produce una onda de choque que viaja a lo largo de la barra. La onda se refleja en el extremo libre opuesto y se devuelve al punto de contacto. Cuando alcanza el punto de contacto, la barra entonces empieza a moverse con misma velocidad v_0 , pero en dirección opuesta. Asimismo, la velocidad de onda permanecerá en el sistema yendo de

³⁹La derivación de la solución puede verificarse en W. Goldsmith. IMPACT: The Theory and Physical Behavior of Colliding Solids. Dover, 1960.

Propiedades	Valor($N - m$)
Densidad ρ	0.01 Kg
Módulo de Young E	100.00 N/m^2
Longitud l	10.00 m
Área A	1.00 m^2

Cuadro 3.3: Características del modelo

un lado a otro. La teoría clásica de impacto para cuerpos rígidos, bajo el supuesto de un impacto elástico, no tiene en cuenta las oscilaciones restantes en los cuerpos después del impacto. Esto produce algunas diferencias con los resultados calculados usando la teoría de cuerpos deformables,

Para analizar este problema aplicaremos el Método de Penalización y el Método de Multiplicadores de Lagrange. La barra se discretiza con elementos triangulares lineales de tres nodos. Aunque este problema es unidimensional, el algoritmo trabaja satisfactoriamente en un análisis bi y tridimensional. Las características del problema se muestra en la figura 3.19 ⁴⁰. Con las propiedades dadas en el el cuadro 3.3 y con las

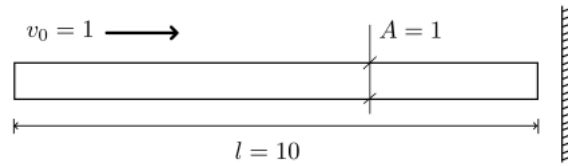


Figura 3.19: Impacto de una barra unidimensional con una pared rígida [58].

ecuaciones 3.4.2, 3.4.3 y 3.4.4 podemos computar la velocidad de transmisión de onda, el tiempo de contacto y la fuerza de contacto teórica:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{100}{0.01}} = 100m/s \quad (3.4.5)$$

$$T_c = \frac{2l}{c} = \frac{2 \times 10}{100} = 0.2s \quad (3.4.6)$$

$$F_c = \rho c v_0 = 0.01 \times 100 \times 1 = 1.00N \quad (3.4.7)$$

En el análisis numérico de este problema note que el paso de tiempo necesario para capturar una respuesta aceptable debe ser menor que T_c . La malla de elementos finitos empelada, el número de elementos n_e y número de nodos n_n se muestra en la figura 3.20. Se ha empleado una formulación langragiana total en grandes desplazamientos y deformaciones.

⁴⁰Cuando indicamos que las propiedades tienen valor de $N - m$ nos referimos al sistema global de unidades. Se entenderá entonces que la unidad de fuerza y longitud utilizada serán Newton y metro respectivamente.

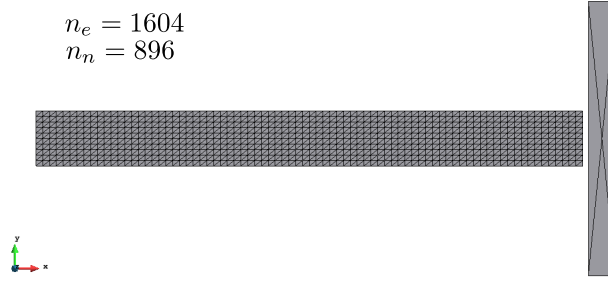
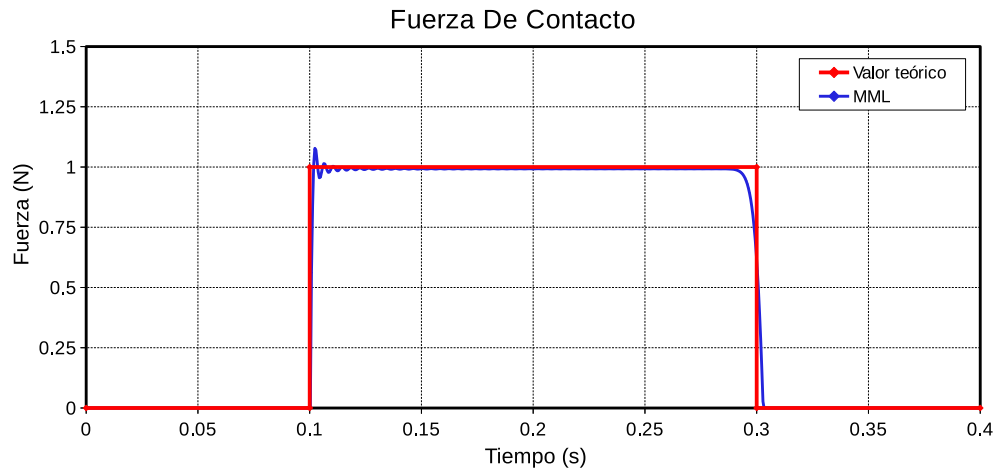


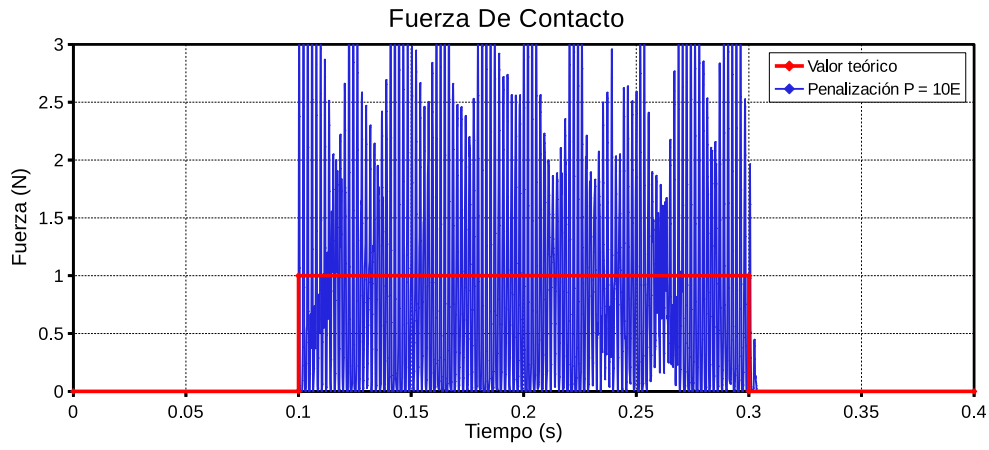
Figura 3.20: Malla de elementos finitos para el análisis numérico del impacto de una barra con una pared rígida.

Las figuras 3.21a, 3.21b y 3.21c muestran los resultados del análisis numérico sin amortiguamiento usando ambos métodos. Se puede apreciar como el Método de Multiplicadores de Lagrange (MML) reproduce satisfactoriamente la fuerza de contacto y el tiempo de contacto, el cual está activo durante $T_c = 0.2s$. Obsérvese además la respuesta oscilatoria de la fuerza de contacto en el Método de Penalización (MP). Adviértase de que no es tan claro cuál es la fuerza de contacto que se produce, aunque el tiempo de contacto es aproximadamente 0.20 segundos. Esto se debe a que en el problema de contacto se activan las altas frecuencias, que sin disipación alguna de energía cinética hace que los nodos de la superficie de contacto vibren continuamente y por consiguiente entren en colisión una y otra vez sobre la superficie o segmento de contacto. Se puede observar en las figuras 3.22a y 3.22b que si aplicamos un amortiguamiento que afecte a las altas frecuencias en el Método de la Función de Penalización se eliminan las oscilaciones espurias reproduciendo apropiadamente la respuesta del contacto. Obsérvese además que el Método de Multiplicadores de Lagrange disipa energía cinética durante la interacción del contacto, lo que es una ventaja ya que no requiere un amortiguamiento numérico artificial. Esto nos lleva a un importante razonamiento: El Método de los Multiplicadores de Lagrange corresponde a un mecanismo de colisión plástica y el Método de Penalización corresponde a un mecanismo de colisión elástica⁴¹.

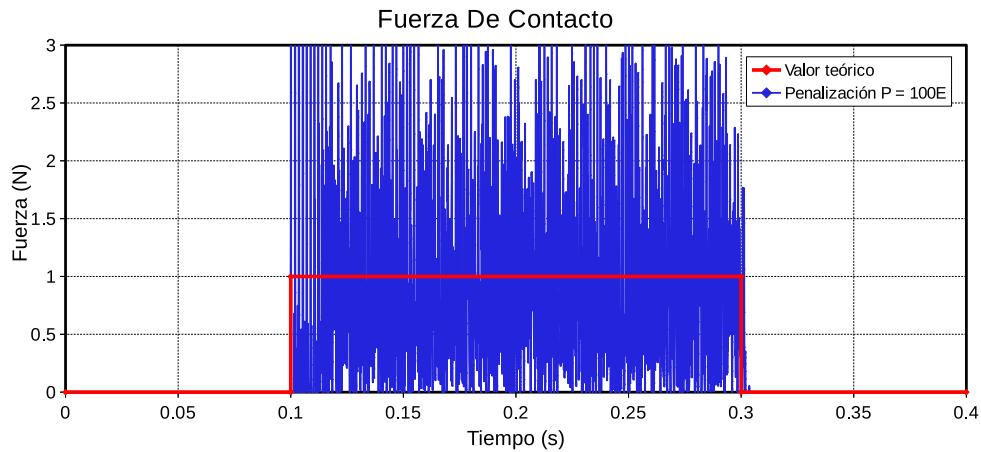
⁴¹En una colisión perfectamente elástica la energía cinética del sistema se conserva.



(a) Método de Multiplicadores de Lagrange. $\Delta t = 0.0003s$

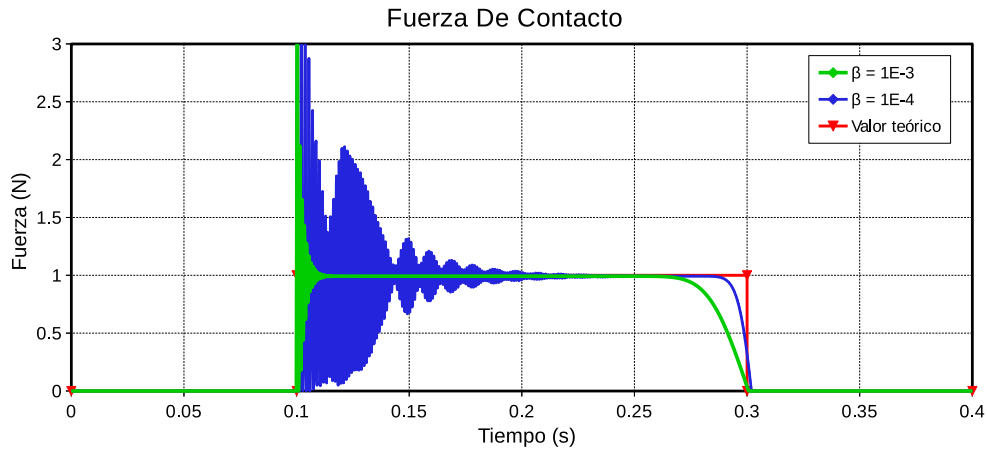


(b) Método de la Función de Penalización con $\Delta t = 0.00009s$.

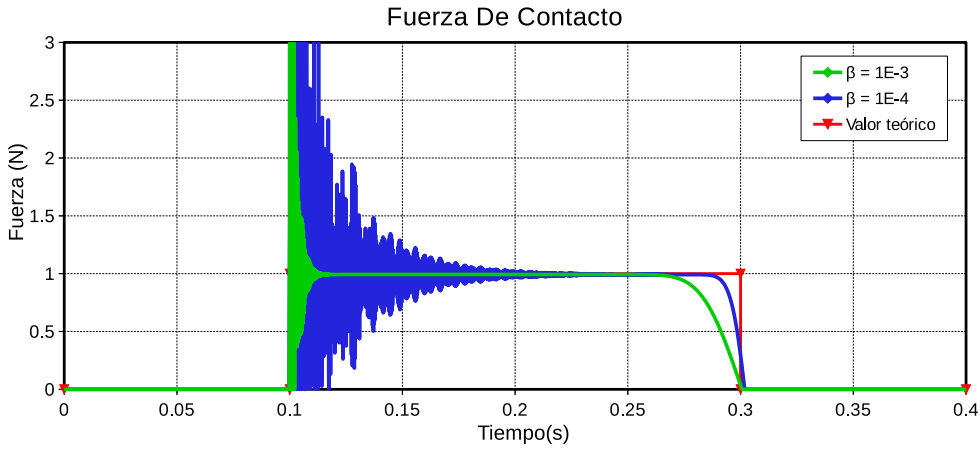


(c) Método de la Función de Penalización con $\Delta t = 0.000027s$.

Figura 3.21: Evolución de las fuerzas de contacto. (a) Método de Multiplicadores de Lagrange. (b) Método de Penalización no amortiguado con $\Delta t = 0.00009s$ y $P = 10E$. (c) Método de Penalización no amortiguado con $\Delta t = 0.000027s$ y $P = 100E$.



(a) Método de la Función de Penalización amortiguado. $P = 10E$.



(b) Método de la Función de Penalización amortiguado. $P = 100E$.

Figura 3.22: Método de Penalización. (a) Evolución de las fuerzas de contacto usando el Método de la Función de Penalización con amortiguamiento proporcional $\beta = 1E - 4$ y $\beta = 1E - 3$, $\Delta t = 0.00009s$ y $P = 10E$. (b) Evolución de las fuerzas de contacto usando el Método de la Función de Penalización con amortiguamiento proporcional $\beta = 1E - 4$ y $\beta = 1E - 3$, $\Delta t = 0.000027s$ y $P = 100E$.

3.4.2. Comprobación del Patch Test

El principal objetivo de los algoritmos de contactos es la transferencia de las presiones de contacto de un cuerpo a otro. En casos generales, la interacción entre dos cuerpos en contacto implica la transmisión de fuerzas entre las mallas no conformes de elementos finitos. Es por tanto que una formulación de contacto *debiera* ser capaz de transferir de un cuerpo a otro un estado de tensiones igual y constante a lo largo de la superficie de contacto. No siempre es fácil cumplir con este criterio y por tanto no todas las formulaciones de contacto satisfacen dicho criterio. Además, la condición geométrica de impenetrabilidad es por naturaleza unilateral, en el sentido de que solo se aplica la condición de contacto en aquellas superficies que se encuentran en contacto. La manera clásica para saber si una formulación de contacto cumple estos requerimientos es mediante la conocida prueba del “patch test”. Algunos investigadores señalan que la satisfacción de esta prueba constituye una condición necesaria para la convergencia del problema [2, 374]. Las formulaciones de contacto que no pasen la prueba del patch test pueden introducir errores en la solución que no necesariamente disminuyen con el refinamiento de malla.

La figuras 3.23 son ejemplos clásicos para verificar si una formulación de contacto pasa la prueba del patch test y han sido utilizados por [2, 57, 234, 374]. Se emplea el ejemplo de la figura 3.23a para verificar si la formulación de contacto de MML y MP pasa dicha prueba dentro de un integrador explícito. Suponga que el bloque superior de la figura 3.23a de $0.20m \times 0.20m$ está sujeto en su cara superior libre a una fuerza de compresión constante y uniformemente distribuida de valor $p = 1N/m$, y ejerce una tensión de compresión en el bloque rectangular que está debajo de él de dimensión $0.60m \times 0.20m$, que también se encuentra sometido a la misma fuerza de presión en su cara superior libre. Ambos cuerpos poseen el mismo material, por lo que solución exacta del problema es un estado tensional y una fuerza total de contacto constante. La malla de elementos finitos usada en el análisis compuesta por 321 nodos y 546 elementos se muestra en la figura 3.24. La tabla 3.4 indica las propiedades de los materiales empleados. El parámetro de penalización se ha tomado como dos veces el valor del módulo elástico, es decir $P = 2E$. La tolerancia requerida al emplear MML se ha fijado en 10^{-5} . Nótese la no conformidad de la malla de elementos finitos. El análisis se hace bajo la hipótesis de deformación plana, material isótropo y con un coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0.1$. Se ha despreciado los efectos friccionales y las fuerzas másicas.

Propiedades	Valor($N - m$)
Densidad ρ	1.00 Kg
Módulo de Young E	455.00 N/m^2
Coefficiente de Poisson ν	0.3
Espesor t	1.00 m

Cuadro 3.4: Propiedades del ejemplo de la figura 3.23a

Con las condiciones de contorno que este modelo tiene prescrita se espera que ambos bloques se deformen de manera homogénea y continua como si se tratase de un solo cuerpo y también que la presión total de contacto F_c sea constante e igual a la presión aplicada en una longitud l_1 , es decir:

$$F_c = p \times l_1 = 1.00N/m \times 0.20m = 0.20N \quad (3.4.8)$$

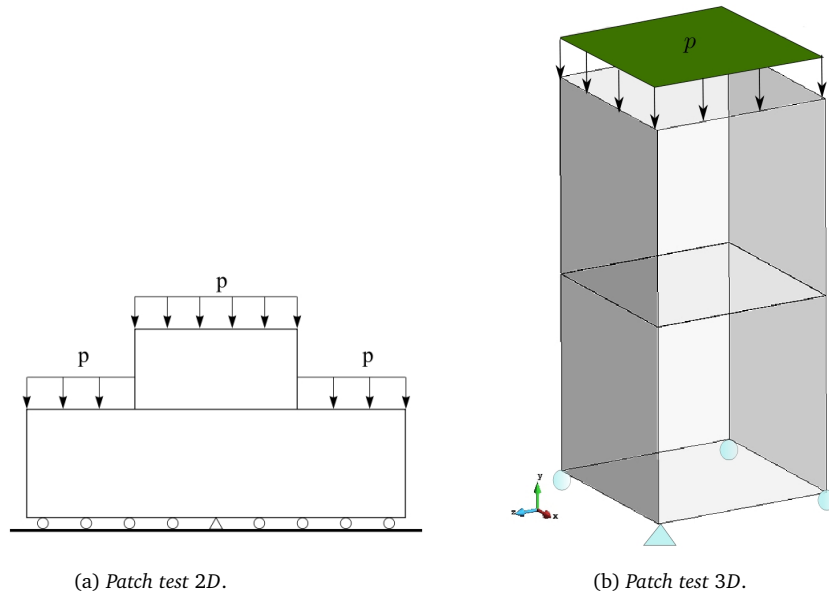


Figura 3.23: Ejemplos típicos para la verificación del patch test de contacto

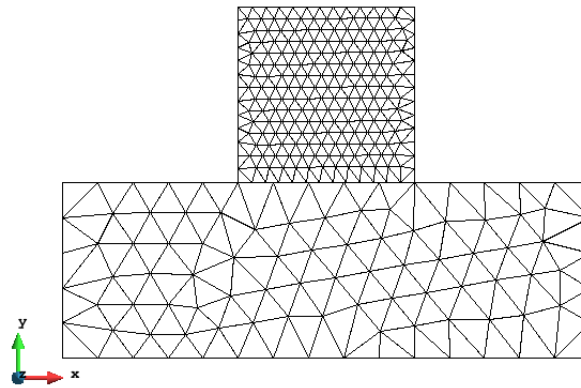


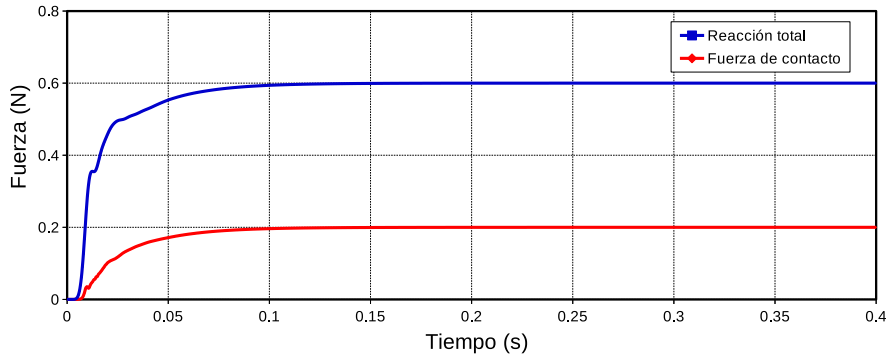
Figura 3.24: Malla de elementos finitos para analizar la figura

La reacción total valdrá entonces:

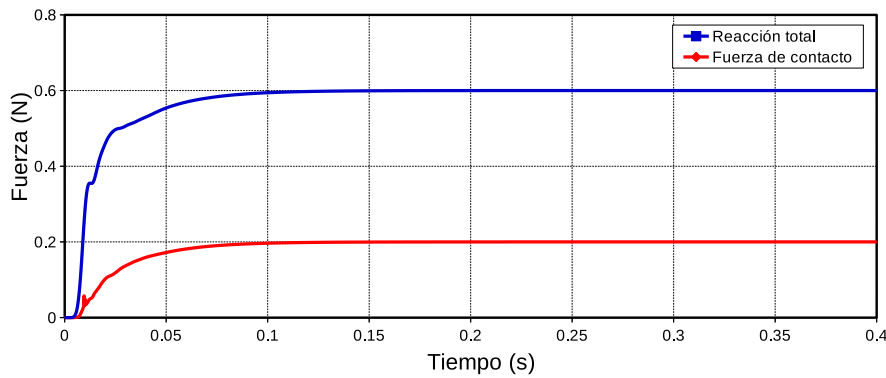
$$R_t = p \times l_2 = 1.00 \text{ N/m} \times 0.60 = 0.60 \text{ N} \quad (3.4.9)$$

Las figuras muestran la evolución de la fuerza total de contacto y reacción total obtenida. Se observa que una vez alcanzado el equilibrio estático se recupera favorablemente la solución obtenida en las ecuaciones 3.4.8 y 3.4.9 para ambos métodos cuyos resultados son virtualmente idénticos. No obstante, por las figuras 3.24b y 3.24c, concluimos que ambos métodos no pasan la prueba del patch test al no presentar una estado único y constante de tensiones en ambos bloques⁴². Varios investigadores (véase [2, 353]) han notificado que un esquema nodo-segmento o nodo-superficie no satisface la prueba del patch test debido a la transferencia inexacta de las fuerzas de contacto entre el nodo y la superficie de contacto. Otro problema relacionado con algoritmos que no pasan esta prueba, es que a pesar de la convergencia en la norma energética, los errores locales en la región de contacto no necesariamente disminuyen con el refinamiento de la malla[2].

⁴²El estado tensional teórico de ambos bloques es de 1 N/m^2 . No obstante, cada elemento finito del bloque posee un estado tensional distinto pero muy cercano al valor teórico.



(a)



(b)

Figura 3.25: Evolución de la reacción y la fuerza de contacto. (a) *Método de Penalización*. (b) *Método de Multiplicadores de Lagrange*.

3.4.3. Contacto de una barra flexible consigo misma

Este ejemplo bidimensional simula cómo una barra flexible sujeta a una velocidad inicial de $v_0 = 20\text{m/s}$ se envuelve sobre sí misma adquiriendo forma enrollada. La característica principal de este ejemplo es que la zona de contacto varía durante todo el proceso de carga, llegando la barra contactar consigo misma. La figura 3.27 ofrece los detalles geométricos y la malla de elementos finitos usada en el análisis. Para analizar este problema se ha llevado a cabo un análisis en grandes deformaciones, en una formulación langragiana total, asumiendo un material elástico isótropo en estado de deformación plana. Se asume las propiedades mostradas en el cuadro 3.5. Se aplica la estrategia de Multiplicadores de Lagrange fijando una tolerancia de 10^{-6} (en términos de la norma del residuo de los Multiplicadores de Lagrange) y se desprecian los efectos friccionales.

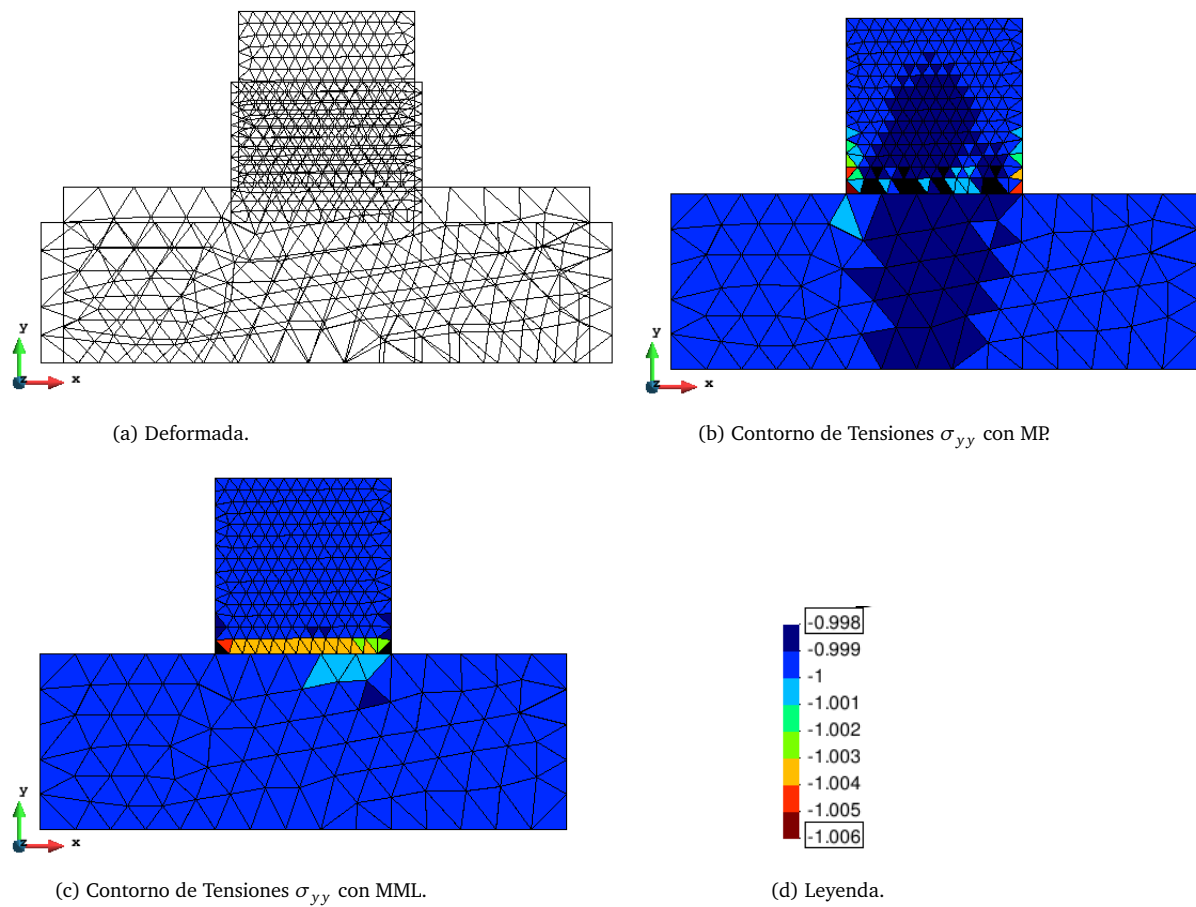


Figura 3.26: Verificación del Patch Test. (a) Malla de la deformada y no deformada para el ejemplo del patch test de contacto. (b) Contorno de las tensiones S_{yy} obtenidas mediante el Método de Penalización. (c) Contorno de las tensiones S_{yy} obtenidas mediante el Método de Multiplicadores de Lagrange.

Propiedades	Valor($N - m$)
Densidad ρ	$1 \times 10^3 \text{ Kg}$
Módulo de Young E	$1 \times 10^8 \text{ N/m}^2$
Coefficiente de Poisson ν	0.0
Espesor t	0.10 m

Cuadro 3.5: Propiedades generales del ejemplo de la figura 3.27

Las figuras 3.28 muestran los distintos eventos de la simulación. La barra comienza a deslizarse siguiendo el camino trazado por el molde y se flexiona formando la espiral en la que se envuelve. Continúa envolviéndose en su espiral y contactando con sí misma hasta que finalmente se atasca por falta de espacio y suavidad de la espiral.

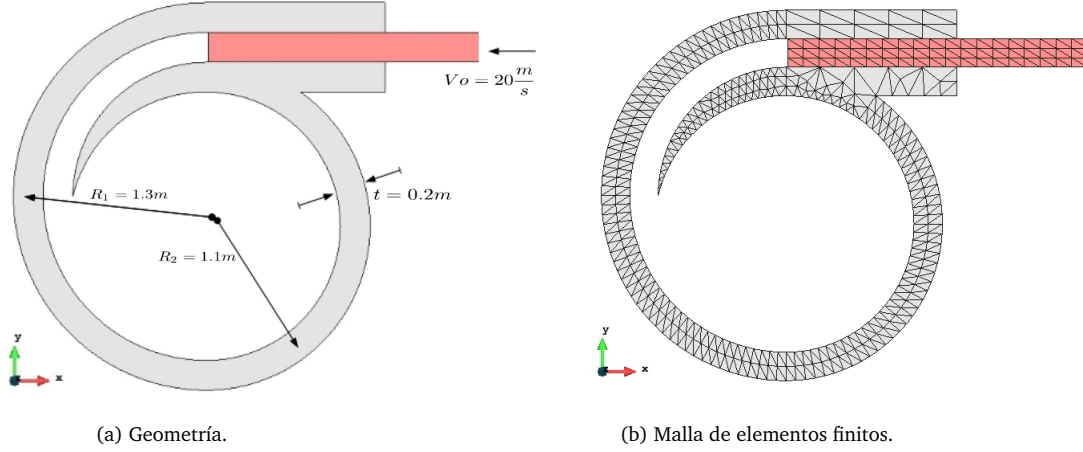


Figura 3.27: Barra flexible que contacta consigo misma. (a) Datos geométricos y condiciones iniciales. (b) Discretización del modelo en elementos finitos.

3.4.4. Contacto De Hertz en 3D

Para demostrar la aplicabilidad y la precisión de las estrategias de contacto anteriormente expuestas, se analizará a continuación el problema de contacto de Hertz mostrado en la figura 3.29. En tipo de problema se conoce muy bien expresión analítica de las fuerzas de contacto y el área de contacto, por lo que nos permite comparar y contrarrestar con nuestros resultados numéricos obtenidos. El medio cilindro está ubicado sobre una superficie rígida y en la cara superior se aplica una presión p constante y uniformemente distribuida. Puesto que la solución analítica se basa en la teoría de pequeñas deformaciones, la presión p aplicada en este análisis es pequeña. La geometría, las propiedades de los materiales y la presión aplicada se tomaron acorde con Laursen y Meng (2005) y se dan la figura anteriormente mencionada. La solución analítica para las tracciones de contacto se basan en la teoría de Hertz y se encuentran los trabajos publicados por Kikuchi y Oden (1988):

$$t_N = \frac{4Rp\sqrt{b^2 - x^2}}{\pi b^2} \text{ con } b = 2\sqrt{\frac{2R^2p(1 - \nu^2)}{\pi E}} \quad (3.4.10)$$

En esta ecuación, b es el ancho de la zona de contacto⁴³, R es el radio del cilindro y x es la variable independiente que empieza a partir de la mitad del cilindro (véase figura 3.27). Con los datos geométricos y las propiedades de los materiales, el ancho de la zona de contacto es $b = 0.680778mm$. Dado que la dimensión longitudinal del modelo es infinita, este problema puede ser analizado bajo la hipótesis de deformación plana. No obstante, en este trabajo, se realiza un análisis tridimensional. Como el problema es simétrico, se analiza sólo la mitad derecha del modelo con elementos tetraedros lineales de cuatro nodos. La figura 3.30 compara las dos mallas de elementos finitos empleada: una malla gruesa que consta de 1697 nodos y 5412 elementos y la otra más fina con 5585 nodos y 24344 elementos. Nótese que la malla más fina posee más elementos en la zona de contacto. Los resultados de los análisis se contrastan en la figura 3.31. La línea vertical representa el valor promedio de la tensión de contacto normal t_N medido en las zonas nodales de contacto x . Como se puede apreciar, los resultados de la discretización más tupida converge bastante bien con la solución analítica. La malla más gruesa predice muy bien el valor valor máximo de las tracciones normales de contacto

⁴³Para ser más específico y dado que estamos resolviendo la mitad derecha del modelo, b representa la mitad de la longitud de la zona de contacto.

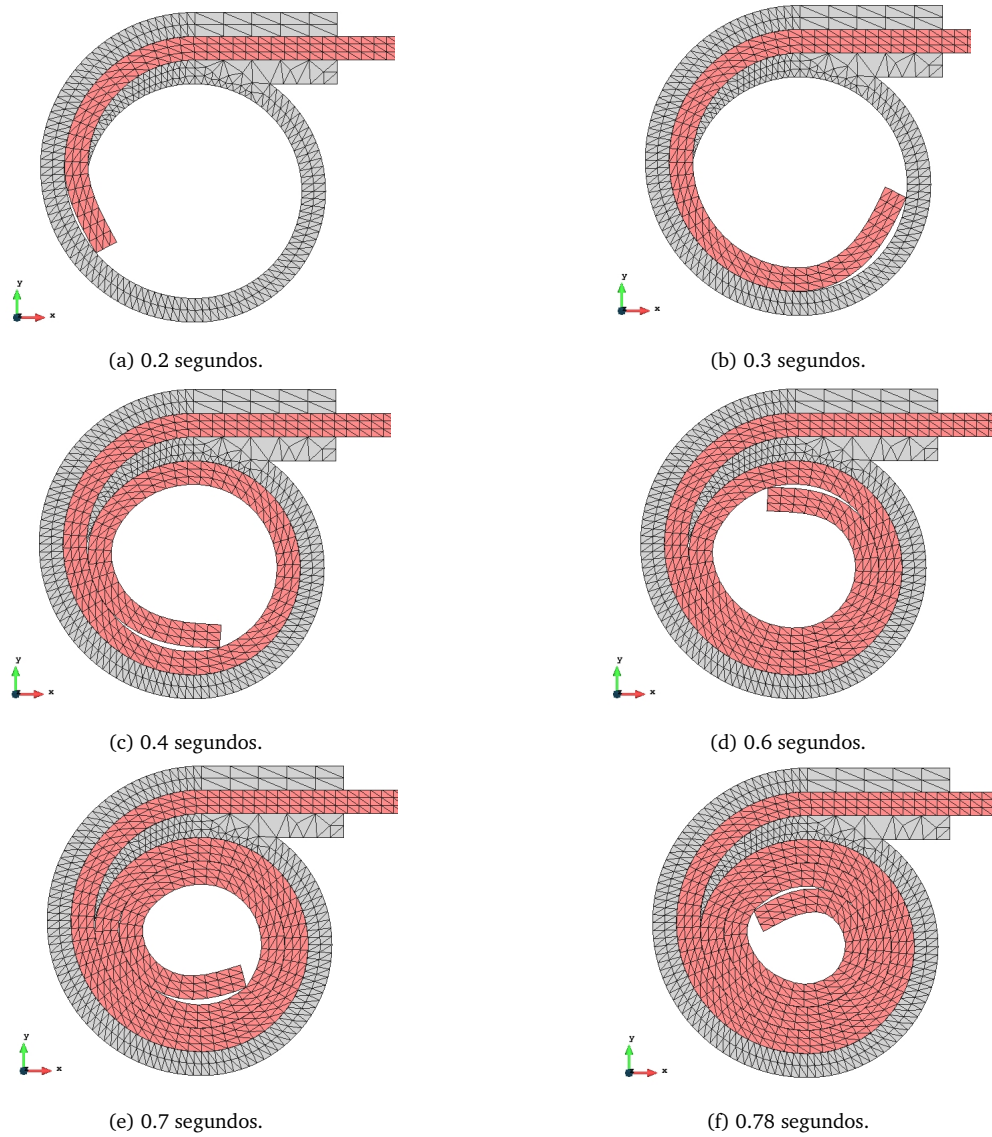


Figura 3.28: Barra flexible que contacta consigo misma. Distintos eventos que muestran la posición espacial de la barra durante la simulación numérica.

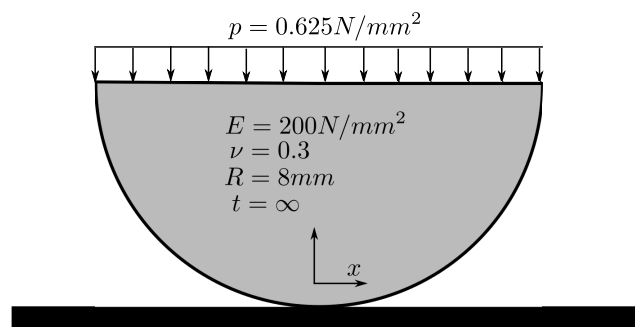


Figura 3.29: Contacto de Hertz: Geometría, Materiales y Condición de Carga[57].

y se obtiene una aceptable correlación con la curva analítica. Nótese también que ambos métodos alcanzan virtualmente resultados idénticos.

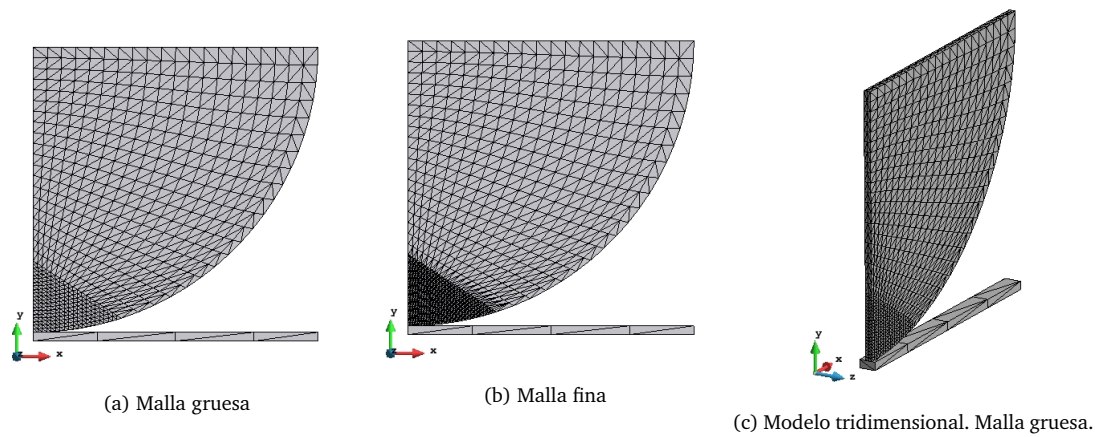


Figura 3.30: Contacto de Hertz. *Discretización de elementos finitos. (a) Malla gruesa. (b) Malla fina. (c) Visión tridimensional de la discretización*

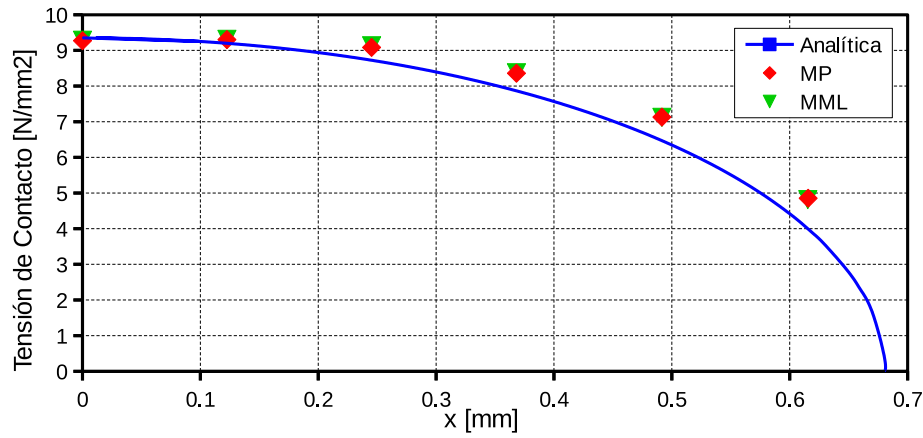
3.4.5. Contactos Múltiples en 3D. Colisión entre tetraedros.

La siguiente simulación tridimensional está encaminada a probar la eficacia del algoritmo de búsqueda de contacto y las estrategias de contacto utilizadas en este trabajo. Este ejemplo involucra una barra formada por un conjunto de elementos tetraédricos idénticos y deformables en camino de colisión con una placa rígida. Este modelo se analiza con dos mallas estructuradas (véase figura 3.32). La malla A está compuesta por 9216 nodos y 2304 elementos; la malla B por 62976 nodos y 15744 elementos. Los elementos se colocan cerca el uno al otro de tal manera que se toquen pero sin superposición y sin que se generen fuerzas de contacto. Todo el conjunto se mueve a una velocidad de 100 m/s . El análisis se lleva a cabo en una formulación lagrangiana total asumiendo un material elástico isótropo y los datos mostrados en el cuadro 3.6. Dado que este caso es realmente difícil identificar la superficie de contacto entre los fragmentos, el algoritmo de Multiplicadores de Lagrange se combina simultáneamente con el Método de Penalización. Por lo tanto, aplicamos la estrategia de Penalización cuando hay colisión entre fragmentos y la estrategia de Multiplicadores de Lagrange cuando se produce la colisión entre los fragmentos y la placa. La búsqueda de contactos potenciales y fuerzas de contacto se evalúan en cada paso de tiempo. Los nuevos campos de velocidades y coordenadas nodales se obtienen con el esquema explícito de Diferencias Centradas no amortiguado.

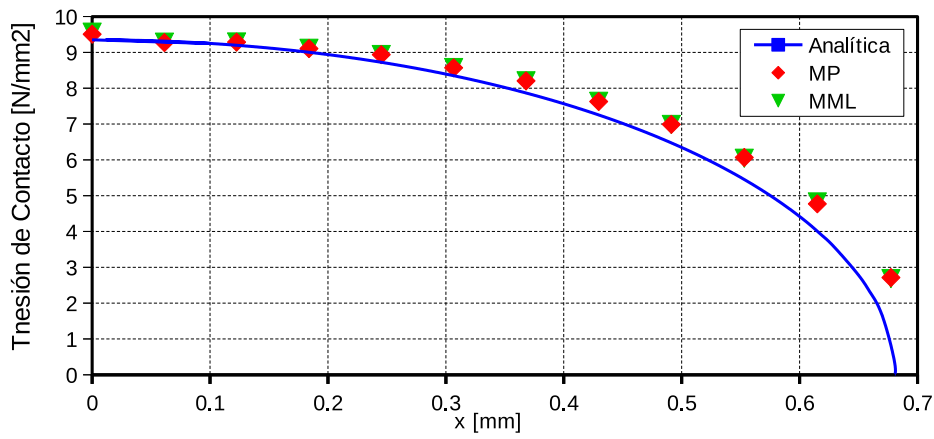
Propiedades	Valor($N - m$)
Densidad ρ	$1 \times 10^3 \text{ Kg}$
Módulo de Young E	$1 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
Coefficiente de Poisson ν	0.25
Sección Transversal A	0.10 m

Cuadro 3.6: *Propiedades generales del ejemplo de la figura 3.32*

Las figuras 3.34 y 3.35 muestran distintos eventos de la simulación para ambas mallas empleando el Método de Penalización. Resultados similares se obtienen al emplear el MP y MML combinados. Debido a las fuerzas de contacto generadas, los primeros elementos que colisionan con la placa desaceleran y comienzan a moverse hacia los lados. Esto provoca que los fragmentos situados por encima choquen entre ellos.



(a) Malla gruesa



(b) Malla fina

Figura 3.31: Contacto de Hertz. Solución obtenida usando una malla gruesa y una malla fina. (a) Malla gruesa. (b) Malla fina.

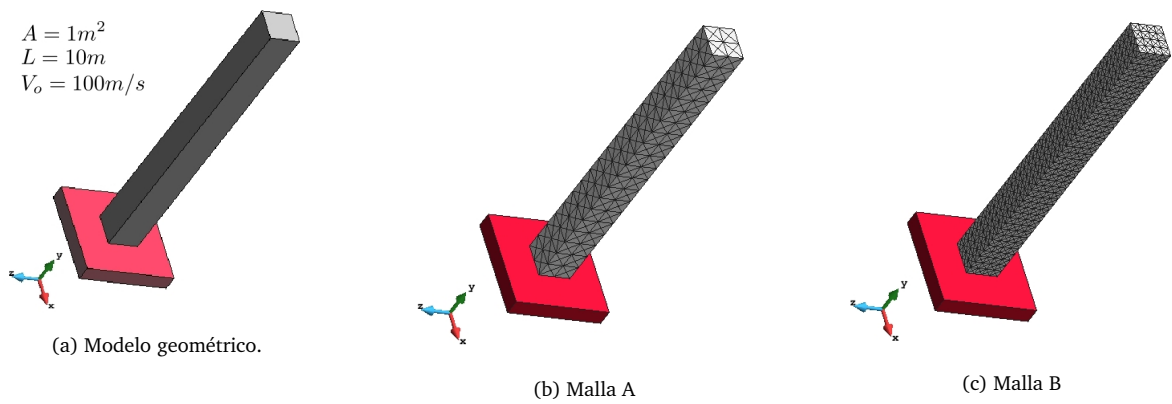


Figura 3.32: Contacto múltiple entre tetraedros. Geometría del modelo y mallas utilizadas en el análisis.

Sin embargo, estos contactos no son capaces de acelerar lo suficiente los otros elementos, tal que genere un campo de velocidad que perturbe significativamente la forma de la barra, por lo que la misma se desintegra principalmente debido al contacto entre la placa y los elementos. Finalmente la barra termina esparciéndose y cada elemento se mueve en cualquier dirección separado de otros contactos. Es razonable esperar que la energía cinética total del sistema disminuya después del impacto inicial, transformándose en energía potencial debido al contacto y en energía de deformación; luego se mantenga más o menos constante hasta que la barra se empiece a desintegrar hasta que finalmente se recupere después de la total desintegración. Sin embargo, no se recupera toda la energía cinética del sistema, porque, en primer lugar, existe dentro de los elementos una tasa de deformación no nula, lo que implica que existe cierta energía de deformación dentro de los elementos; en segundo lugar, no todas las formulaciones de contacto garantizan balance energético. Munjiza [259] demostró que el método de Penalización conserva el balance energético y corresponde a una colisión elástica, independiente del factor de penalización que se aplique. El Método de los Multiplicadores de Lagrange responde a un mecanismo de colisión inelástica, pues se disipa parte de la energía cinética durante la interacción del contacto⁴⁴ debido a la corrección de las coordenadas nodales impuesta a posteriori por el algoritmo de Jacobi en aquellos nodos en contacto para cumplir con la condición de impenetrabilidad. Por último y para contrastar lo anteriormente expuesto, la figura 3.33 muestra la evolución de la energía cinética total del sistema usando el Método de Penalización y el Método de Multiplicadores de Lagrange y Penalización combinados. Obsérvese como en el Método de Penalización recupera aproximadamente el valor de entrada de la energía cinética ($5 \times 10^7 \text{ Joules}$) permaneciendo luego constante después de 0.1 segundos. Nótese además que en la malla B se “gana” cierta energía cinética, que atribuimos, después de varios ensayos numéricos, a los errores de redondeo durante el cálculo numérico, pero sin afectar la estabilidad del sistema. Además, vea también como en el Método de Multiplicadores de Lagrange se ha disipado parte de la energía cinética, disminuyendo este efecto a media que se refina la malla. Al igual que el caso anterior, pasado 0.1 segundos, la energía cinética permanece constante pero no igual a la energía cinética de entrada.

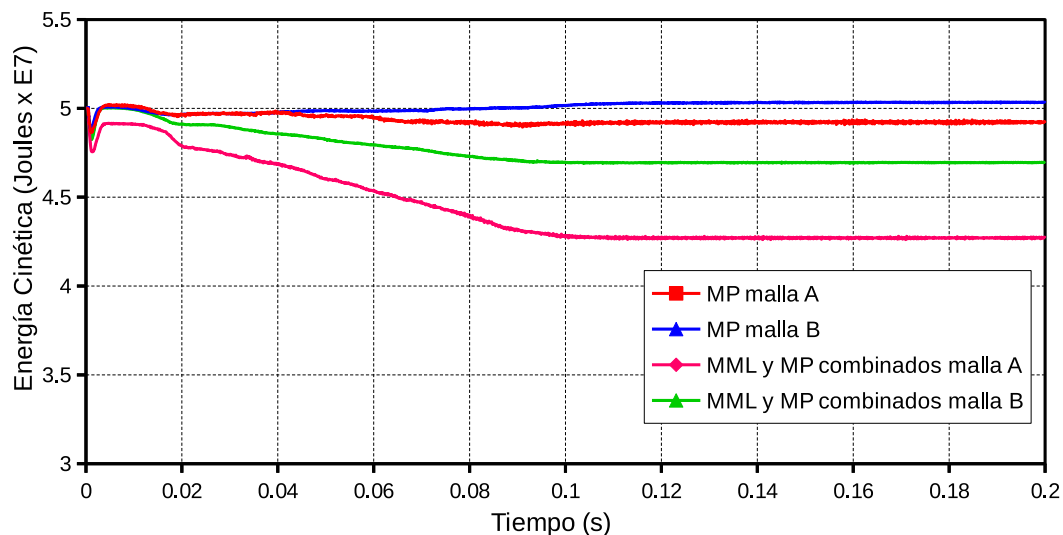
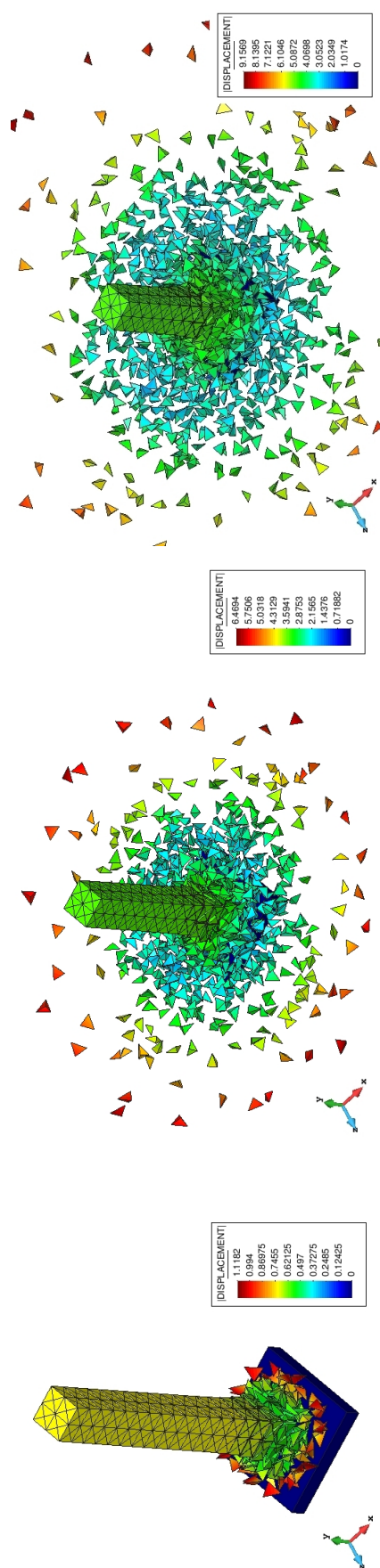


Figura 3.33: Evolución de la Energía Cinética: *Energía cinética total para Malla A y B aplicando el Método de Penalización y el Método combinado de Penalización y Multiplicadores de Lagrange.*

⁴⁴A medida que se refina la malla, se reduce la cantidad de energía disipada debido a que disminuye las masas nodales de contacto.



(c) 0.0503 segundos.

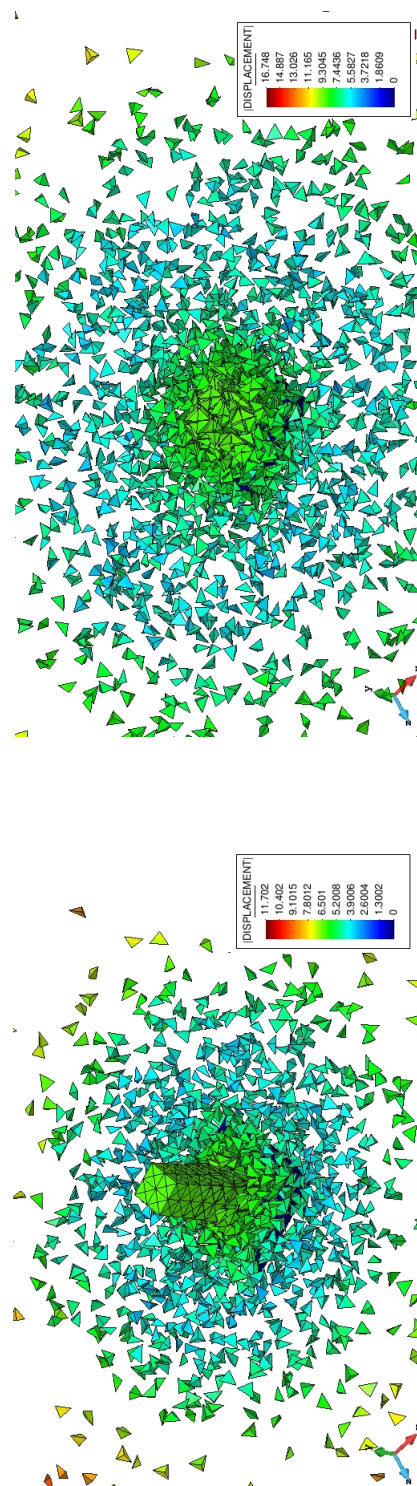
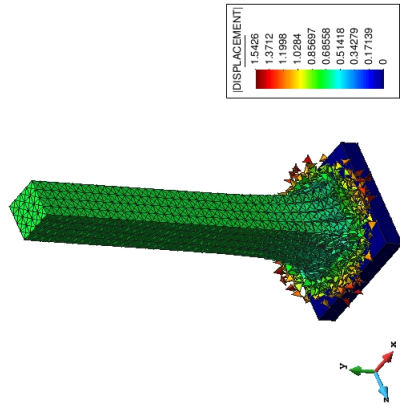
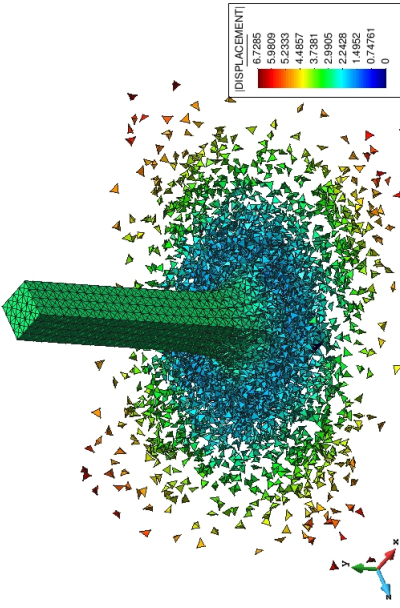


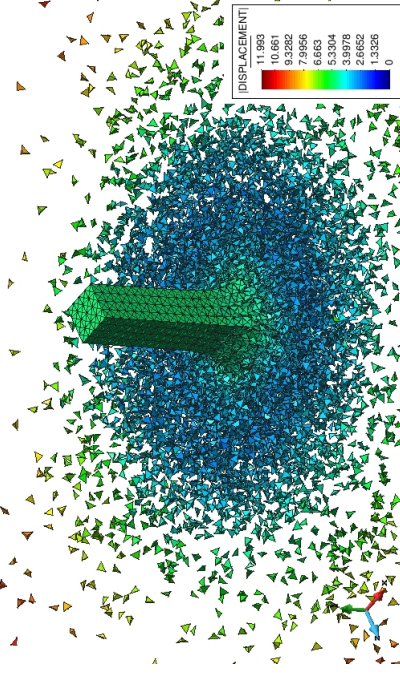
Figura 3.34: Contacto múltiples malla A. Distintas etapas de la simulación que muestran configuración deformada del choque entre los fragmentos y la placa. Los fragmentos colisionan separándose unos de otros, desplazándose a distintas velocidades y rotando en torno a sus tres ejes de inercia.



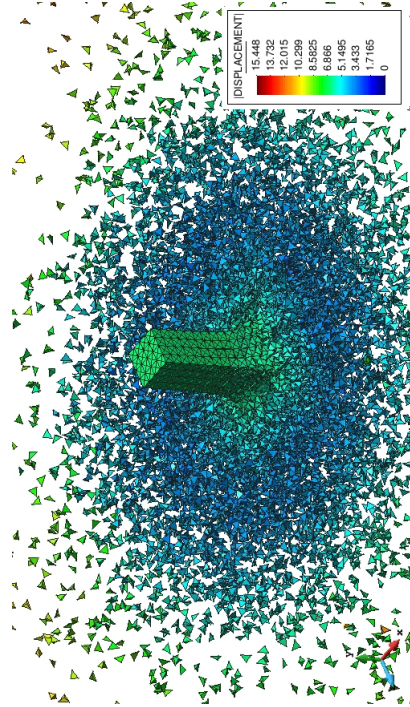
(a) 0.0071 segundos.



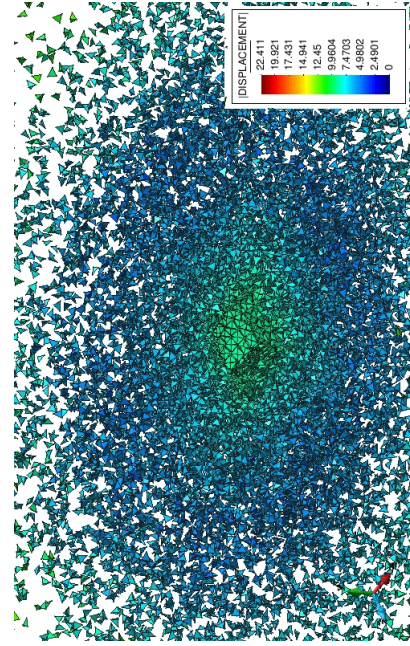
(b) 0.0287 segundos.



(c) 0.0503 segundos.



(d) 0.0647 segundos.



(e) 0.09351 segundos

Figura 3.35: Contacto múltiples malla B. Distintas etapas de la simulación que muestran configuración deformada del choque entre los fragmentos y la placa en la malla B.

3.5. Conclusión y discusión

Este capítulo aborda tres temas claramente diferenciados. En primer lugar la solución de la ecuación de movimiento mediante el esquema explícito de Diferencias Centradas, en segundo lugar la mecánica del contacto dentro de un esquema explícito y por último el algoritmo de búsqueda de contactos. Al mismo tiempo, tiene como finalidad introducir la manera en cómo abordaremos el problema de la fractura discreta equipada con contacto. En capítulos posteriores retomaremos nuevamente el esquema explícito Diferencias Centradas para introducir una nueva formulación propuesta, parte del tema central de este trabajo.

La mecánica del contacto es compleja y no siempre es fácil resolver situaciones o criterios de contactos. Esta complejidad es enorme dentro de esquemas implícitos donde se tiene que calcular la matriz de rigidez del contacto. En esquemas explícitos es mucho más simple, pues no es necesario el cómputo de dicha matriz sino directamente computar las fuerzas de contacto generadas. Sin embargo, la estabilidad del esquema explícito está ligada fuertemente a la estrategia de contacto empleada, por lo que la solución sólo convergerá cuando el paso de tiempo Δt , por lo general pequeño, no supere un umbral crítico.

Asimismo, la mecánica del contacto se auxilia de algoritmos de búsqueda de contactos. Estos algoritmos aumentan la eficiencia del programa evitando búsquedas innecesarias de contactos. Nuestro algoritmo se ha inspirado en los algoritmos de búsquedas empleados en el Método de los Elementos Discretos y se ha extendido a figuras geométricas más complejas como triángulos y tetraedros. Cabe señalar que la detección de contactos de figuras geométricas complejas requieren de verificaciones adicionales que sin una implementación adecuada y optimizada reducen significativamente la eficiencia de la búsqueda.

Por último, los ejemplos numéricos realizados muestran la efectividad de la búsqueda de contactos y las estrategias de contactos, las cuales recuperan favorablemente la solución analítica. La desventaja de usar un esquema explícito incorporado con contacto, es que, a pesar de su simplicidad consume mucho tiempo de cálculo, sobre todo si se desea recuperar la solución cuasi-estática de un problema. Es por esta razón que muchos algoritmos explícitos han de desarrollarse en código de programación en paralelo. Por experiencia del autor de esta tesis, es inevitable emplear dicha herramienta si se requiere reducir el coste computacional.

Tratamiento de los materiales quasi-frágiles basado en la teoría de plasticidad

La mayoría de las ideas fundamentales de la ciencia son esencialmente sencillas y, por regla general pueden ser expresadas en un lenguaje comprensible para todos.

Albert Einstein

4.1. Introducción

La teoría matemática de la plasticidad proporciona una adecuada estructura físico-matemática que permite formular el comportamiento de un sólido sometido a estados de carga[287]. Constituyen una aproximación numérica destinada a reproducir el comportamiento de los materiales que presentan deformaciones irreversibles durante su proceso de agotamiento. La formulación clásica de la plasticidad se basa en una formulación tenso-deformacional isotrópica para cada punto del sólido, lo que da lugar a un movimiento homotético de la función de fluencia plástica, la cual es gobernado por la evolución de las variables internas. En principio, estos modelos fueron diseñados para materiales dúctiles como los metales, los plásticos y algunos tipos de suelos. No obstante, la posibilidad de aplicar esta teoría para estudiar los fenómenos de localización de deformaciones abrió las puertas a que muchos investigadores desarrollen nuevos modelos constitutivos, entendiendo que los fenómenos de deformación por micro-fisuración puede ser comprendidos de forma análoga a los materiales plásticos.

Este capítulo recupera las hipótesis planteadas en el modelo constitutivo denominado *Modelo de Daño Plástico* desarrollado por S. Oller et al. [287, 289]. Este modelo debe su nombre al hecho de que considera que el comportamiento no lineal inelástico que sufre un sólido cohesivo-friccional, como consecuencia de la formación y desarrollo de microfisuras es asimilable a un fenómeno elasto-plástico. Aunque este modelo se enfocó en principio en el estudio de los materiales friccionales como el hormigón, será empleado en esta tesis para aproximar numéricamente el comportamiento de los materiales quasi-frágiles.

Uno de los conceptos fundamentales del modelo constitutivo de daño plástico es que admite como hipótesis que el *daño macroscópico direccional* (fisura) proviene de un comportamiento *microscópico* adireccional de los puntos situados en cierta zona del sólido, que se denominará *zona de daño*. Por tanto, la fisura se define como el lugar geométrico de los puntos que han sufrido un daño adireccional. La concentración del daño en una determinada zona del sólido se debe al fenómeno de localización de deformaciones que se

desarrolla en una zona del sólido, donde ciertos puntos del mismo se encuentran sometidos a un proceso de ablandamiento. Los puntos situados fuera de la zona de localización experimentan procesos de descarga manteniendo el nivel de daño alcanzado.

Este modelo constitutivo, que pertenece a la familia de los llamados modelos de *fisura distribuida*, es capaz de memorizar la macro-direccionalidad del daño producido durante todo el proceso de carga y cumple rigurosamente con los principios básicos de medios continuos. En esta tesis y es el objetivo fundamental de este trabajo, se enriquece el modelo constitutivo de daño plástico con un ingrediente adicional: **La fractura discreta**. Por lo tanto, este modelo es utilizado como puente para modelar la transición continuo-discreto en aquellos puntos donde el sólido ha sufrido un daño total, procurando una descripción más realista de lo que ocurre en el material. A continuación se describen los componentes del modelo de daño plástico que han sido aplicados en este trabajo para estudiar el comportamiento de los materiales quasi-frágiles y la evolución de los procesos fractura y fragmentación.

4.2. Modelo de daño plástico. Ingredientes fundamentales.

El modelo de daño plástico describe el proceso de la fractura incluyendo resultados tan importantes como la respuesta estructural o la formación y propagación de las fisuras. La evolución del proceso de fractura implica deformaciones inelásticas por ablandamiento, es decir, reducción de la tensión post-pico mientras aumenta la deformación. Este modelo, que surge de la generalización de los conceptos de la teoría de plasticidad, permite tratar en modo general el comportamiento mecánico, no sólo del hormigón, sino también que puede ser extendido al estudio de los materiales quasi-frágiles.

En este modelo se introduce una variable interna denominada variable de daño plástico κ^p . Esta variable es una magnitud adimensional normalizada a la unidad que varía entre $0 \leq \kappa^p \leq 1$ y crece *sí y sólo sí* hay deformaciones plásticas o inelásticas no llegando nunca a decrecer. Cuando $\kappa^p = 0$ no hay daño plástico y para $\kappa^p = 1$ define el límite del daño total del punto de un sólido. Este estado último puede ser interpretado desde el punto de vista de la mecánica de los medios continuos como una pérdida total de tensión, y desde el punto de vista físico, como el desmembramiento de la masa del sólido[289]. Aunque este modelo constitutivo no es capaz de representar numéricamente la física realista de los procesos de fragmentación, posee la información necesaria para realizar dicho proceso introduciendo mecanismos que pueden simular la fractura discreta.

En el modelo de daño plástico se introduce un criterio de fluencia plástica y un conjunto de variables internas que definen a macro-escala el ablandamiento del material y por consiguiente el fenómeno de localización de deformación. En este trabajo, el criterio de fallo adoptado es el modelo de combinado de Mohr-Coulomb y Rankine junto con las mismas variables que definen el modelo de daño plástico: la cohesión, el ángulo de dilatación y el ángulo de fricción interna. En esta tesis se incluye una variable más: La resistencia a tracción del material.

El modelo combinado de Mohr-Coulomb y Rankine, llamado en ocasiones como el modelo de Mohr-Coulomb modificado[295], es una mejora del modelo estándar de Mohr-Coulomb. El modelo de Mohr-Coulomb describe bastante bien el comportamiento de diferentes materiales en estado de compresión, pero no adecuadamente el régimen de tracción. La razón principal es que el mecanismo de fallo es distinto: mientras que un estado de compresión falla por cortante, el mecanismo de fallo a tracción se debe a la descohesión que se produce en una determinada sección transversal del sólido que es perpendicular a la tracción máxima

La cohesión c es una constante que representa la tensión de corte que puede ser resistida por el material sin que haya ninguna tensión normal aplicada. El modelo de daño plástico define dos cohesiones relacionadas con el nivel del daño del material: Una *cohesión inicial* c_0 que corresponde a la cohesión del material virgen y a un nivel de daño nulo, $\kappa^p = \kappa_0^p = 0$, el cual establece la posición inicial del criterio de fluencia y una *cohesión final*, situación que define el daño total del material y la posición final del criterio de fluencia. A diferencia de la plasticidad clásica, en este modelo constitutivo de daño plástico, la cohesión no es una simple función de una variable de endurecimiento y/o ablandamiento plástico, sino que una variable interna más que depende del proceso elasto-plástico, gobernada por una ecuación de evolución. También es posible definir la misma mediante una función explícita que dependa de las deformaciones plásticas [382].

El ángulo de rozamiento interno ϕ es una medida de la resistencia al deslizamiento tangencial de las partículas. Pudiera definirse como una variable interna a partir de una ley de evolución que dependa del proceso elasto-plástico, sin embargo, las experiencias demuestran que a partir de los ensayos experimentales realizados en arenas, basta con definir una función explícita que dependa de la deformación inelástica, o como en este modelo, de la variable interna daño plástico. En base a esta hipótesis se han obtenido correlaciones aceptables con los datos experimentales en materiales como el hormigón, cuarcitas, areniscas y piedra caliza [223, 382].

El fenómeno de la dilatación ψ en algunos materiales sobre todo en materiales granulares responde a un mecanismo de aumento de volumen del material al aplicarle una deformación de corte. Este fenómeno es medido mediante el ángulo de dilatación que se aproxima como la razón de la deformación volumétrica inelástica y la deformación inelástica de corte. Al igual que el ángulo de rozamiento interno, el ángulo de dilatación se obtiene explícitamente como una función de la variable de daño plástico, del trabajo plástico o de las deformaciones plásticas. El ángulo de dilatación varía para cada tipo de material y depende del grado de confinamiento a la que es sometido el material. Para rocas convencionales, el ángulo de dilatación están en el rango de $12^\circ < \psi < 20^\circ$.

La resistencia a tracción del material f_t mide el umbral de fallo cuando el material se somete a tensiones de tracción. Se introduce en el modelo constitutivo de daño plástico para mejorar el comportamiento del modelo de Mohr-Coulomb y recuperar la dirección correcta del flujo plástico en tracción. Esto último se garantiza introduciendo los planos de tensión de Rankine. Este criterio es convencionalmente llamado en la literatura como el criterio de tensión de corte (*tension cut-off criteria*). Al igual que el ángulo de fricción interna y el ángulo de dilatación, la resistencia a tracción del material se obtiene explícitamente como una función de la variable de daño plástico. El modelo de daño plástico descrito anteriormente fue elaborado dentro de teoría de plasticidad con pequeñas deformaciones. En esta tesis se extiende dicho modelo para considerar problemas con grandes deformaciones plásticas y pequeñas deformaciones elásticas.

Por último, para un proceso plástico sin degradación de rigidez del material, el vector de las variables internas queda expresado por $\mathbf{q} = (\mathbf{e}^p, \kappa^p, c)$ donde \mathbf{e}^p es la deformación plástica de Almansi, κ^p es la variable interna de daño plástico y c es la cohesión entre las partículas cuyas reglas de evolución serán definidas seguidamente, como parte de las ecuaciones fundamentales que gobiernan el modelo, las cuales son:

I. Las deformaciones y las variables históricas desde una configuración de referencia Ω_0 en un tiempo

inicial t_0 hasta un tiempo actual $t \in [t_0, t_f]$ está dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_t(\mathbf{X}) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \\ \mathbf{e}_t &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1})\end{aligned}\quad (4.2.1)$$

II. La relación tensión-deformación

$$\boldsymbol{\tau} = \overbrace{\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{F}^T}^{\tau_0} + \mathbf{c}_e : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) \quad (4.2.2)$$

siendo $\boldsymbol{\tau}$ el tensor de tensiones de Kirchhoff, \mathbf{S}_0 es el segundo tensor de Piola-Kirchhoff inicial y \mathbf{c}_e el tensor constitutivo elástico del material.

III. Dominio elástico en el espacio de tensiones de Kirchhoff

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} \mid \Phi^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \forall \alpha \in \{c, r\} \text{ donde:} \quad (4.2.3)$$

$$\Phi^c \text{ Superficie de fluencia de Mohr-Coulomb} \quad (4.2.4)$$

$$\Phi^r \text{ Superficie de fluencia de Rankine} \quad (4.2.5)$$

IV. Una regla de flujo general, la cual permite obtener el tensor de tasa de deformación \mathbf{d}^p

$$\mathcal{L}_{\nu} \mathbf{e}^p = \mathbf{d}^p = \sum_{\alpha \in \{c, r\}} \dot{\lambda}^{\alpha} \mathbf{m}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = \sum_{\alpha \in \{c, r\}} \dot{\lambda}^{\alpha} \frac{\partial \Psi^{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \{\partial \mathbb{E}_{\boldsymbol{\tau}}^{c, r}\} \quad (4.2.6)$$

donde $\dot{\lambda}^{\alpha}$ es el *parámetro de consistencia plástica* y Ψ^{α} es la función potencial plástico asociada o no a la superficie del dominio elástico $\partial \mathbb{E}_{\boldsymbol{\tau}}^{\alpha}$. El operador \mathcal{L}_{ν} se le conoce como la derivada objetiva de Lie. La expresión anterior se conoce como la *regla de Koiter* y es adecuada cuando el dominio elástico está representado por superficies múltiples como es el caso de la superficie de Mohr-Coulomb y Rankine. En el presente trabajo se ha adoptado la forma estándar del flujo potencial plástico no asociado en el modelo de Mohr-Coulomb, es decir; aquella que se obtiene remplazado el ángulo de fricción interna ϕ por el ángulo de dilatación ψ tal que $\psi < \phi$. Para el comportamiento mecánico a tracción, se emplea un modelo asociado a superficie de Rankine para recuperar, como se ha mencionado anteriormente la dirección correcta del flujo plástico en tracción.

V. Una ley de evolución de las variables internas \mathbf{q} , las cuales puede escribirse en forma general de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{q}} = - \sum_{\alpha \in \{c, r\}} \dot{\lambda}^{\alpha} \cdot \mathbf{h}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \quad (4.2.7)$$

donde $\mathbf{h}^{\alpha}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \dot{\lambda}^{\alpha}}$ contiene los módulos de endurecimiento o ablandamiento instantáneo del material. Para el caso particular del modelo de daño plástico, la evolución de las variables internas tiene el siguiente formato:

$$\dot{\kappa}^p = \mathbf{h}_k : \dot{\mathbf{e}}^p \quad (4.2.8)$$

$$\dot{c} = h_c \cdot \dot{\kappa}^p = h_c \cdot \mathbf{h}_k : \dot{\mathbf{e}}^p \quad (4.2.9)$$

donde h_c y \mathbf{h}_k con funciones escalares y tensoriales que se definirán más adelante.

VI. Ley de endurecimiento o oblandamiento $\xi = \{\dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{f}_t\}$.

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \kappa^p} \dot{\kappa}^p \quad (4.2.10)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \kappa^p} \dot{\kappa}^p \quad (4.2.11)$$

$$\dot{f}_t = \frac{\partial f_t}{\partial \kappa^p} \dot{\kappa}^p \quad (4.2.12)$$

VII. Condiciones de Kuhn-Tucker de carga, descarga y persistencia.

$$\dot{\lambda}^\alpha \geq 0, \Phi^\alpha(\tau, q) \leq 0 \quad (4.2.13)$$

$$\dot{\lambda}^\alpha \Phi^\alpha(\tau, q) = 0 \quad (4.2.14)$$

$$\dot{\lambda}^\alpha \dot{\Phi}^\alpha(\tau, q) = 0 \quad (4.2.15)$$

4.3. Variables fundamentales del modelo de daño plástico

4.3.1. Definición de la variable de daño plástico: κ^p

La variable interna de daño plástico κ^p surge como una necesidad de definir una medida relativa de la energía disipada durante los procesos plásticos, ya sean procesos mecánicos uniaxiales de tracción o compresión, o procesos multi-axiales en general. Este hecho se debe a que las variables internas clásicas definidas en el modelo estándar de plasticidad, como el *trabajo plástico efectivo* o la *deformación plástica efectiva* tienen limitada su utilización en materiales que presentan diversas deformaciones últimas o disipan distinta energía específica según sea el proceso mecánico desarrollado como es el caso de los materiales quasi-frágiles.

Para definir convenientemente esta variable, considere un ensayo experimental a tracción y otro de compresión que describen las curvas tensión-deformación que encierran las energías específica disipada en un proceso a tracción y a compresión respectivamente¹. Al final de cada uno de estos procesos, la energía específica disipada será:

$$g_t^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_t \cdot \dot{\epsilon}_t^p dt \quad (4.3.1a)$$

$$g_c^p = \int_{t=0}^{\infty} \sigma_c \cdot \dot{\epsilon}_c^p dt \quad (4.3.1b)$$

siendo g_t^p la energía específica disipada en un proceso de tracción pura y g_c^p para procesos de compresión; σ_t y σ_c es tensión uniaxial de tracción y compresión respectivamente, equivalente a la resistencia a tracción compresión del material f_t y f_c y finalmente, $\dot{\epsilon}_t^p$ y $\dot{\epsilon}_c^p$ son la tasa de deformación plástica uniaxial de tracción y compresión. A partir de ésta dos expresiones, se define la variable de daño plástico para un proceso de tracción y compresión uniaxial, como la disipación plástica normalizada a la unidad,

$$\kappa_t^p = \frac{1}{g_t^p} \int_{t=0}^T \sigma_t \cdot \dot{\epsilon}_t^p dt \quad (4.3.2a)$$

$$\kappa_c^p = \frac{1}{g_c^p} \int_{t=0}^T \sigma_c \cdot \dot{\epsilon}_c^p dt \quad (4.3.2b)$$

¹En la mecánica clásica de la fractura, éstas cantidades son conocidas como *energía de fractura* \mathcal{G}_f y *energía de aplastamiento* \mathcal{G}_c .

Nótese que la variable de daño plástico resulta una variable relativa con respecto a la energía específica máxima a tracción y compresión, que tomará valores comprendido entre $0 \leq \kappa^p \leq 1$ para el inicio y fin del proceso plástico respectivamente[289]. Otro aspecto interesante, es que con κ^p como variable independiente se puede transformar un diagrama uniaxial de tensión-deformación plástica $\sigma - e^p$ de los ensayos experimentales en otro que dependa del daño plástico, o sea, $\sigma - \kappa^p$. El resultado de combinar estos conceptos es una variable interna plástica objetiva y dentro de los mismos límites cualquiera que sea el proceso mecánico desarrollado. De esta forma, el daño total en un punto se alcanza cuando $\kappa^p = 1$, pero la energía disipada será g_t^p si se desarrolla un proceso a tracción pura y g_c^p si es a compresión pura.

En un modo más general, para un proceso de carga genérico se define la “de daño plástico” como[287]:

$$\dot{\kappa}^p = \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\tau}; \kappa^p) : \dot{\mathbf{e}}^p \quad (4.3.3)$$

$$(4.3.4)$$

donde $\mathbf{h}_k(\boldsymbol{\tau}; \kappa^p)$ es un tensor de segundo orden capaz de desarrollar una magnitud de daño consecuente con el proceso de carga. En su forma más simple y asumiendo pequeñas deformaciones, resulta igual al tensor de tensiones $\mathbf{h}_k = \boldsymbol{\sigma}$, recuperando la variable de endurecimiento plástico de la teoría clásica de la plasticidad. Para grandes deformaciones, $\mathbf{h}_k(\boldsymbol{\tau}; \kappa^p) = \boldsymbol{\tau}$ donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de Kirchhoff. A partir de esta forma general de la variable de daño plástico, se podrían formular distintas leyes de evolución con el fin de evaluar correcta y objetivamente la magnitud del daño en un punto del sólido.

El modelo constitutivo de daño plástico propone una generalización de las definiciones uniaxiales anteriormente presentadas. Considera como hipótesis que la energía total disipada durante un proceso multi-axial puede ser tratada como una suma de la energía a tracción más otra de compresión, disipadas por procesos uniaxiales equivalentes. Dicho de otra manera, esta hipótesis admite que todo proceso multiaxial puede ser descompuesto en procesos uniaxiales desarrollados en las direcciones principales (S. Oller 1988). Para materiales isotrópicos en general, la expresión de κ^p dada por la ecuación 4.3.3 puede reescribirse como:

$$\dot{\kappa}^p = \dot{\kappa}_T^p + \dot{\kappa}_C^p = \left[\frac{r(\boldsymbol{\tau})}{g_T^p} + \frac{1-r(\boldsymbol{\tau})}{g_C^p} \right] \cdot \boldsymbol{\tau} : \dot{\mathbf{e}}^p \quad (4.3.5)$$

donde $r(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{i=1}^3 \langle \tau_i \rangle / |\boldsymbol{\tau}|$ es una función escalar que define los estados de comportamiento de un punto en función del estado tensional y $\langle x \rangle = \frac{1}{2}[x + |x|]$ es la función de McAully. Obsérvese que para $r(\boldsymbol{\tau}) = 0$ se obtiene el caso de compresión pura, $r(\boldsymbol{\tau}) = 1$ define el estado de tracción pura y $r(\boldsymbol{\tau}) = 0.5$ el estado de cortante puro. De esta manera, la disipación plástica siempre estará normalizada respecto a la máxima energía correspondiente al proceso realizado en cada momento.

4.3.2. Ley de evolución de la cohesión: c

La cohesión es una medida de la capacidad de resistencia de las partículas a su separación. El modelo de daño plástico supone que el fenómeno de la micro-fisuración de los materiales friccionales viene dada por una pérdida de cohesión intergranular producto del movimiento relativo entre los granos o partículas. Esta premisa es válida para los materiales quasi-frágiles ya que éstos presentan el mismo mecanismo de fallo. Por lo tanto, es coherente suponer que la pérdida de la cohesión se inicia en aquellos puntos cuya tensión efectiva supera el umbral de la cohesión límite. A medida que se incrementa este proceso mecánico, crece la cantidad de partículas descohesionadas hasta llegar a formarse una fractura que conduce a la ruptura de sólido, produciendo el conocido fenómeno del ablandamiento. A nivel inter-granular, este fenómeno es inexistente, no obstante, a

nivel macroscópico sí tiene sentido considerarlo ya que es un efecto generado por el comportamiento promedio del conjunto de las partículas. En tal caso, se puede suponer que el ablandamiento es una propiedad del material y puede definirse con una función de ablandamiento. La misma está representada por la cohesión, escrita como una variable interna, cuya ecuación de evolución puede escribirse como [289][287]:

$$\dot{c} = h_c \dot{\kappa}^p \quad (4.3.6)$$

siendo $h_c(\tau, \kappa^p, c)$ una función escalar del estado actual de la variable libre de tensión de Kirchhoff y de las variables internas c y κ^p . En este trabajo se adopta la misma expresión de h_c definida por el modelo de daño plástico, dada por esta expresión

$$h_c = c \left[\frac{r(\tau)}{c_t} \frac{dc_t}{d\kappa^p} + \frac{1-r(\tau)}{c_c} \frac{dc_c}{d\kappa^p} \right] \quad (4.3.7)$$

donde $r(\tau)$ es la función de ponderación anteriormente presentada y $c_\alpha \forall \alpha \in \{c, t\}$ son las funciones explícitas de la cohesión y representa la evolución de la cohesión durante un ensayo uniaxial de compresión o tracción simple respectivamente.

4.3.3. Definición de la resistencia a tracción: f_t

Para materiales quasi-frágiles como el concreto, las rocas, las cerámicas y algunos tipos de suelos, el mecanismo de fallo no solamente ocurre en forma deslíz provocado por el movimiento relativo de las partículas, sino también por la descohesión originada por mecanismos de tracción que actúan en una cara del sólido donde se producen las máximas tensiones principales. Por esta razón, el modelo clásico de Mohr-Coulomb no aproxima adecuadamente el comportamiento de los materiales en tracción. Para resolver este inconveniente, el modelo de daño plástico propone una pequeña modificación de este criterio de fluencia y lo aplica para el estudio del hormigón.

En este trabajo, se incluye en el modelo de daño plástico, la variable de la resistencia a tracción del material con el objetivo de describir de una manera oportuna el mecanismo de fallo a tracción. Aunque la resistencia a tracción f_t puede ser tratada como una variable interna, es usual adoptar alguna curva explícita, normalmente del tipo linear, bi-linear o exponencial. En general, las curvas exponenciales parecen dar mejores resultados cuando se aplica al hormigón [139, 175], aunque esto no es necesariamente cierto para rocas frágiles de granos finos y cerámicas. No obstante, una curva de ablandamiento lineal es capaz de recuperar las características más destacadas de la respuesta quasi-frágil [223].

Por lo tanto, para describir la evolución de la resistencia a tracción del material, es suficiente con definir una ley de ablandamiento de la forma

$$\dot{f}_t = \frac{\partial f_t}{\partial \kappa^p} \dot{\kappa}^p \quad (4.3.8)$$

donde $f_t = f_t(\kappa^p)$ se define como una función de la variable de daño plástico. Recuértese que otros modelos constitutivos basados en la plasticidad hacen uso directo de la curva $f_t = f_t(\epsilon)$ de los resultados experimentales.

4.3.4. Definición del ángulos de fricción y dilatancia: ϕ y ψ

El ángulo de rozamiento interno ϕ es una medida de la resistencia al deslizamiento tangencial entre partículas. Es posible describirlo a través de una ecuación de evolución, aunque, para materiales quasi-frágiles,

la experimentación demuestra que se puede trabajar con una fórmula explícita en función de la variable de deformación plástica efectiva o de la variable de daño κ^p , o considerarse constante en todo el proceso mecánico de carga. Este último ha probado ser satisfactorio para aproximar numéricamente la experimentación realizada en los materiales quasi-frágiles.

En los materiales con una alta cohesión inicial, se puede utilizar el máximo ángulo de fricción interna sin que ello implique obtener resultados insatisfactorios. Tras los estudios realizados por R. Borst y P. Vermeer[382] en arenas y en el hormigón demuestran que es suficiente plantear la evolución del ángulo de fricción interna a través de una función explícita de la variable de endurecimiento de $\bar{\epsilon}$ con tal de que afecte a movilidad de la función de fluencia, aumentado la ductilidad a compresión y fragilizando la parte a tracción. Aunque otras curvas pueden ser consideradas Brinch Hansen (1965), el modelo de daño plástico adopta una expresión análoga a [382], pero en función del daño plástico:

$$\sin \phi = \begin{cases} \frac{\sqrt{\kappa^p \kappa_l}}{\kappa^p + \kappa_l} \sin \phi_{max} & \text{si } \kappa^p < \kappa_l \\ \sin \phi_{max} & \text{si } \kappa^p \geq \kappa_l \end{cases} \quad (4.3.9)$$

donde κ_l es el límite de daño, a partir del cual la cohesión se anula y el ángulo de rozamiento permanece constante e igual a su valor máximo ϕ_{max} , lo que por consiguiente, este límite coincide con el valor del daño total, es decir, $\kappa_l = \kappa^p = 1$.

En materiales heterogéneos, como el hormigón, las trayectorias de fisuración presentan, generalmente, irregularidades debido a la tendencia de propagación a través de las zonas más débiles, como en las interfases árido-matriz. Por ello, las tensiones de corte no sólo generan el deslizamiento entre los bordes de la fisura sino que además inducen una apertura de estas superficies, fenómeno conocido como *dilatancia*[330]. En otras palabras, la dilatancia es el fenómeno de cambio de volumen en el sólido durante un proceso inelástico en el que predominan las deformaciones de corte. El fenómeno de la dilatancia fue discutido por primera vez por Reynolds(1885) al observar dicho fenómeno en materiales granulares. Su magnitud se evalúa a través del ángulo de dilatancia ψ que fue introducido por Bent Hansen (1958) y representa la relación que hay entre el incremento de volumen plástico y la distorsión plástica.

Este fenómeno no puede controlarse dentro de la teoría de plasticidad asociada, por lo que el control de la dilatancia necesariamente deber tratarse a partir de un potencial plástico que introduzca un flujo plástico con una componente de dilatancia concordante con los estudios experimentales. Al igual que las variables internas mencionadas, su evolución podría expresarse mediante una ecuación de evolución y ψ sería entonces una variable interna. Sin embargo, resulta suficientemente aproximado, vistos los resultados experimentales, describir la dilatancia a través de su relación explícita con el ángulo de fricción $\psi(\kappa^p)$. Entre las posibles formas de definir la dilatancia a lo largo de un proceso elasto-plástico, está la expresión desarrollada por P. Vermeer y R. Borst[382], luego adaptada para el modelo de daño plástico[287]:

$$\sin \psi(\kappa^p) = \frac{\sin \phi(\kappa^p) - \sin \phi_{cv}}{1 - \sin \phi(\kappa^p) \sin \phi_{cv}} \quad (4.3.10)$$

$$\sin \phi_{cv} = \frac{\sin \phi^{max} - \sin \psi^{max}}{1 - \sin \phi^{max} \sin \psi^{max}} \quad (4.3.11)$$

siendo ϕ^{max} y ψ^{max} la máxima fricción y la máxima dilatancia respectivamente. La constante ϕ_{cv} es el ángulo de rozamiento máximo a volumen constante (sin dilatancia). Inicialmente, a medida que evoluciona el proceso elasto-plástico, el ángulo de dilatancia es negativo, por lo que no está acorde con el comportamiento dilatante del sólido. En consecuencia no se debe utilizar un valor negativo del ángulo de dilatancia. Una alternativa

sencilla a esta función de dilatación, viene dada por una relación entre ϕ y ψ . Esto es:

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi(\kappa^p) < \phi_{cv} \\ \psi(\kappa^p) - \phi_{cv} & \text{si } \psi(\kappa^p) \geq \phi_{cv} \end{cases} \quad (4.3.12)$$

4.4. Dominio elástico. Superficie de fluencia

4.4.1. Modelo de Mohr Coulomb y Modelo Rankine

El criterio de Mohr-Coulomb Φ^c ha sido ampliamente utilizado en análisis geotécnicos, sobre todo para el estudio y la descripción del fallo en materiales friccionales, granulares y geo-materiales. El comportamiento de estos materiales se caracteriza por una fuerte dependencia a la presión hidrostática y por una pequeña resistencia a tracción. El criterio de Mohr-Coulomb se basa en el supuesto de que el fenómeno plástico es, esencialmente, el resultado del deslizamiento y fricción entre las partículas del material. Según este criterio, el flujo plástico del material comienza cuando cierta combinación del esfuerzo cortante τ y el esfuerzo normal σ_n alcanzan un valor crítico:

$$|\tau| = c - \sigma_n \tan \phi \quad (4.4.1)$$

donde c es la cohesión y ϕ es el ángulo de fricción interna del material. En la ecuación 4.4.1 se asume que el esfuerzo normal σ_n en tracción es positivo. La misma puede ser expresada en términos de las tensiones principales:

$$\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cos \phi = c + \left(\frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \sin \phi \right) \tan \phi \quad (4.4.2)$$

Reordenando los términos de la ecuación anterior tenemos:

$$(\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min}) \sin \phi = 2c \cos \phi \quad (4.4.3)$$

Esta ecuación define la superficie de fallo de Mohr-Coulomb Φ^c :

$$\Phi^c(\sigma, c) = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min}) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \quad (4.4.4)$$

siendo σ_{max} y σ_{min} la tensión principal mayor y menor respectivamente. La superficie de Mohr-Coulomb puede representarse mediante múltiples superficies dadas por seis funciones escalares expresadas en el espacio de tensiones principales que delimitan el límite elástico:

$$\Phi_1^c(\sigma, c) = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \text{ para } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (4.4.5a)$$

$$\Phi_2^c(\sigma, c) = (\sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \text{ para } \sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3 \quad (4.4.5b)$$

$$\Phi_3^c(\sigma, c) = (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_2 + \sigma_1) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \text{ para } \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1 \quad (4.4.5c)$$

$$\Phi_4^c(\sigma, c) = (\sigma_3 - \sigma_1) + (\sigma_3 + \sigma_1) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \text{ para } \sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1 \quad (4.4.5d)$$

$$\Phi_5^c(\sigma, c) = (\sigma_3 - \sigma_2) + (\sigma_3 + \sigma_2) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \text{ para } \sigma_3 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \quad (4.4.5e)$$

$$\Phi_6^c(\sigma, c) = (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \text{ para } \sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2 \quad (4.4.5f)$$

La definición de Φ^c en términos de tensiones principales hace que sea una función isótropa en σ . Gráficamente esta función consiste en una pirámide hexagonal alineada con el eje hidrostático (véase figura 4.1) cuyo ápice


$$\sigma_t = \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi} \quad (4.4.6)$$
$$\sigma_c = \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (4.4.7)$$

De aquí resulta que el criterio de Mohr-Coulomb admite implícitamente que la relación de resistencia a tracción y compresión cumple con la siguiente expresión:

$$\mathcal{R} = \left| \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \right| = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (4.4.8)$$

Esta definición establece una importante limitación al adaptar este criterio a un determinado material, pues normalmente no se da esta correlación en materiales reales. Tal es el caso del hormigón, el cual tiene un ángulo de fricción interna de $\phi = 32^\circ$. Según la formulación clásica de Mohr-Coulomb, se obtiene para este ángulo una relación de resistencia de $\mathcal{R} = 3.25$. No obstante, la relación de resistencias en el hormigón posee valores cercanos a 10. Para solucionar este problema y conseguir una buena correlación entre la resistencia y ángulo de fricción S. Oller[287] propuso una modificación del criterio original de Mohr-Coulomb introduciendo unas constantes \mathbb{K} que dependen de la relación de resistencia \mathcal{R} y la resistencia requerida \mathcal{R}_r . Otra forma para mejorar este criterio y es la que es adaptada en este trabajo, es una modificación de esta superficie a través de la llamada tensión de corte².

La aproximación lineal del modelo de Mohr-Coulomb es pobre en confinamientos bajos, donde las curvas experimentales de esfuerzo-confinamiento exhiben una mayor no linealidad, pero para muchos materiales, donde el confinamiento está por debajo de la transición frágil-dúctil, es una aproximación razonable[223]. El criterio de fallo de Mohr-Coulomb es independiente de la tensión principal intermedia σ_2 , por lo que el plano de falla se manifiesta necesariamente paralela a esta dirección. Además, el mayor inconveniente para aplicar dicho criterio a la fractura quasi-frágil es la escasa aproximación que también presenta en la zona traccionada. No obstante, en este trabajo se utiliza como una primera aproximación cuando el modo fallo es a compresión.

Ensayos experimentales muestran que el comportamiento de los materiales quasi-frágiles bajo tensiones de tracción dominantes se describe satisfactoriamente con el modelo de Rankine[143]. Este modelo depende de un sólo parámetro: la resistencia a tracción del material f_t . Este modelo plantea como hipótesis que el proceso de fractura empieza cuando la máxima tensión principal alcanza la resistencia a tracción del material. Aunque hay varias formas de plantear matemáticamente este criterio, la más frecuente es la expresión siguiente:

$$\Phi^r(\boldsymbol{\sigma}, f_t) = \max\{\sigma_i\} - f_t, \forall i = 1, 2, 3 \quad (4.4.9)$$

Al igual que el caso anterior, el dominio de elástico de Rankine podría describirse mediante tres planos ortogonales expresados en función de las tensiones principales (Chen and Han, 1988):

$$\Phi_1^r(\boldsymbol{\sigma}, f_t) = \sigma_1 - f_t = 0 \quad (4.4.10a)$$

$$\Phi_2^r(\boldsymbol{\sigma}, f_t) = \sigma_2 - f_t = 0 \quad (4.4.10b)$$

$$\Phi_3^r(\boldsymbol{\sigma}, f_t) = \sigma_3 - f_t = 0 \quad (4.4.10c)$$

4.4.2. Modelo combinado de Mohr Coulomb (MC) y Rankine. Modelo de Mohr-Coulomb modificado (MCM)

En la teoría de plasticidad de superficies múltiples, el dominio elástico se define por múltiples superficies de fluencia convexas que se intersectan entre sí dando lugar a puntos singulares. En consecuencia, el

²A menudo el criterio de Rankine es llamado en la literatura como Criterio de Tensión de Corte o Criterio de la Máxima Tensión de Tracción.

dominio elástico del modelo combinado de Mohr-Coulomb y Rankine consiste en la unión de ambos dominios elásticos, estableciendo de esta manera el límite a partir del cual se inicia el comportamiento no lineal. Por tanto, el dominio elástico de este modelo en el espacio de tensiones de Kirchhoff queda definido mediante la siguiente expresión

$$\mathbb{E}_\tau = \{f_\alpha(\boldsymbol{\tau}, \kappa^p) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} | \Phi_\alpha(\boldsymbol{\tau}, \kappa^p) \leq 0\}, \forall \alpha \in [r, c] \quad (4.4.11)$$

donde $f_\alpha(\boldsymbol{\tau}, \kappa^p)$ son las funciones de fluencia o discontinuidad, κ^p es la variable de daño plástico y por último, Φ^r y Φ^c son el dominio elástico de Rankine y Mohr-Coulomb respectivamente. La superficie del dominio elástico $\partial \mathbb{E}_\tau$ se define entonces como:

$$\partial \mathbb{E}_\tau = \{f_\alpha(\boldsymbol{\tau}, \kappa^p) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R} | \Phi^\alpha(\boldsymbol{\tau}, \kappa^p) = 0\}, \forall \alpha \in [r, c] \quad (4.4.12)$$

Cualquier estado tensional fuera de estas superficies es inadmisibles; en consecuencia, el proceso elasto-plástico consiste en forzar el estado tensional actual de manera que se sitúe sobre la superficie de las funciones elasto-plásticas. Este procedimiento se conoce en la literatura como *return mapping*. La dependencia no lineal de la superficie de fluencia con las deformaciones inelásticas requiere que el algoritmo de retorno adopte un esquema iterativo de solución.

El modelo modificado de Mohr-Coulomb define la combinación de la superficie de Mohr-Coulomb en compresión y Rankine a tracción. En el espacio tensiones principales, el criterio MC modificado implica la intersección de la pirámide de la superficie MC definida por seis planos (ecuaciones 4.4.5a-4.4.5f), con una segunda pirámide formada tres planos ortogonales.

Como se ha dicho anteriormente, el dominio elástico combinado de Mohr-Coulomb y Rankine es una mejora del modelo estándar de Mohr-Coulomb, capaz de reproducir la dirección correcta de las tensiones de tracciones en geo-materiales como rocas y el concreto. Por consiguiente, en el presente trabajo, el comportamiento no lineal de los materiales frágiles se describe con un modelo elasto-plástico basado en la ley de Mohr-Coulomb, cuando los procesos mecánicos dominantes es la compresión y la ley de Rankine para tensiones de tracción.

Al adaptar la superficie de Rankine como criterio de fallo a tracción del material en combinación con la superficie de Mohr-Coulomb se recupera la dirección correcta de flujo plástico en tracción. Hay que destacar que este modelo permite dentro su formulación introducir un ablandamiento isótropo. Aunque físicamente no es justificable ya que la degradación del material lleva a una anisotropía inducida, se emplea como una primera aproximación para estudiar el comportamiento de los materiales quasi-frágiles.

4.4.2.1. Regla de flujo

La condición de carga, descarga y consistencia plástica para múltiples superficies fueron introducidas por Koiter[273] y son equivalentes a las condiciones de Kuhn-Tucker en la teoría de plasticidad clásica. La *regla de flujo* que define la evolución de las deformaciones plásticas para superficies múltiples se le conoce como *reglas de Koiter*:

$$\dot{\boldsymbol{e}}^p = \sum_{\alpha=1}^n \dot{\lambda}^\alpha \boldsymbol{m}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^n \dot{\lambda}^\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (4.4.13)$$

donde $\Psi^\alpha(\boldsymbol{\tau}, \kappa^p)$ es la función potencial de flujo plástico, λ^α es un escalar no negativo denominado factor de consistencia plástica para la función de discontinuidad $\Phi^\alpha(\boldsymbol{\tau}, \kappa^p)$, con $\alpha \in [1, 2, 3..n]$ y n el número de

superficies múltiples. Cuando el potencial plástico $\Psi^a(\boldsymbol{\tau}, \kappa^p)$ es igual a la función de discontinuidad $\Phi^a(\boldsymbol{\tau}, \kappa^p)$ se dice que el flujo es asociado, de lo contrario es no asociado.

Con el objeto de recuperar la física correcta del fenómeno de la dilatancia, se requiere un flujo potencial plástico no asociado para el modelo de Mohr-Coulomb. Existe una gran cantidad de funciones de potencial plástico que se han definido para lograr la dilatancia deseada sobre todo en materiales friccionales [140, 230]. En este trabajo se emplea la función potencial clásica presentada por D. Radenkovic(1961) que consiste en remplazar el ángulo de fricción interna ϕ del modelo de Mohr-Coulomb por el ángulo de dilatancia ψ . En otras palabras, la función de potencial plástico está dada por:

$$\Psi^c(\boldsymbol{\tau}, \kappa^p) = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min}) \sin \psi - 2c \cos \psi \quad (4.4.14)$$

Particularizando la ecuación 4.4.14 para el modelo combinado de Mohr-Coulomb y para un flujo asociado en la superficie Rankine, la tasa deformación plástica queda expresada como

$$\mathcal{L}_v \mathbf{e}^p = \mathbf{d}_p = \sum_{\alpha \in \{c, r\}} \dot{\lambda}^\alpha \mathbf{m}^\alpha(\boldsymbol{\tau}, q) = \sum_{\alpha \in \{c, r\}} \dot{\lambda}^\alpha \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \forall \boldsymbol{\tau} \in \{\partial \mathbb{E}_\tau^{c, r}\} \quad (4.4.15)$$

siendo Ψ^c el potencial no asociado en la superficie de Mohr-Coulomb anteriormente mencionado y $\Psi^r = \Phi^r$ el flujo asociado para el modelo Rankine. Obsérvese que la ecuación 4.4.15 está sujeta las condiciones de Kuhn-Tucker de carga, descarga y persistencia de las ecuaciones 4.2.13, 4.2.14, 4.2.15. Nótese además que a medida que evoluciona el proceso elasto-plástico, la ecuación 4.4.15 puede tener más de un multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ no nulo. La dificultad radica, no solo en cumplir las condiciones mencionadas, sino que además hay que identificar adecuadamente aquellas superficies que se involucran en el proceso elasto-plástico, a la que denominaremos superficies *activas* \mathbb{J}_{act} . Esto último constituye uno de los principales aspectos que se estudian en los modelos de plasticidad con superficies múltiples.

4.5. Integración numérica del modelo constitutivo de daño plástico

Un paso clave en el análisis no lineal por elementos finitos es la integración de la relaciones constitutivas para obtener el estado tensional del sólido. Estas relaciones definen un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que son integradas (numéricamente) con esquemas de integración explícitos o implícitos.

En un esquema explícito de integración, la superficie de fluencia, el gradiente de potencial de plástico y las leyes endurecimiento o ablandamiento, son evaluados explícitamente a partir de los valores previos convergidos de las tensiones y variables internas. Sin embargo, se introduce una sencilla corrección para restaurar las tensiones finales y los parámetros de endurecimiento a la superficie de fluencia, ya que la condición 4.2.14 de Kuhn-Tucker no se cumple en la integración. Además, otro aspecto importante a tomar en cuenta los métodos explícitos es la estabilidad del mismo³. Grandes incrementos provocaría la no convergencia de la solución, requiriendo pasos de tiempo pequeños para garantizar su estabilidad, razón por la cual se dice que los métodos explícitos son condicionalmente estables. Uno de los métodos explícitos más conocidos utilizados en plasticidad es el método de Euler hacia adelante (*forward Euler*).

En un método implícito, los gradientes y la ley de endurecimiento se evalúan con el estado tensional actual resultando un sistema de ecuaciones no lineales que debe resolverse de forma iterativa, que una vez

³En términos sencillos, un método numérico es estable si cambios pequeños en la condición inicial generan pequeñas modificaciones en la solución calculada

resueltas, conllevan a los valores de las variables internas. Los métodos implícitos son muy atractivos debido a que las tensiones resultantes satisfacen automáticamente las condiciones de Kuhn-Tucker. En los trabajos publicados por Ortiz y Simo (1986) y Crisfield (1991, 1997) se realiza una discusión exhaustiva de varios esquemas implícitos de integración utilizados en la teoría de plasticidad. Uno de los más populares es el algoritmo *backward Euler*. En su forma más general, las tensiones finales y los parámetros de endurecimiento se encuentran mediante la resolución de un pequeño sistema de ecuaciones no lineales por cada punto de Gauss del elemento finito, resueltas usualmente con un método de Newton-Raphson. Aunque este algoritmo es muy potente, es difícil de implementar y aplicar a relaciones constitutivas complejas, sobre todo en plasticidad con superficies múltiples.

Por otra parte, en comparación con los métodos implícitos, los métodos explícitos tienen la ventaja de ser más sencillos de implementar y no requieren la solución de un sistema de ecuaciones no lineales. No obstante, en este trabajo, aunque se emplea un esquema explícito de integración de la ecuación de movimiento (Diferencias Centradas), se utiliza un algoritmo implícito a nivel constitutivo, en este caso *backward Euler*, dado su robustez numérica. La sección siguiente se destina a describir el algoritmo *backward Euler* empleado en esta tesis para la integración del modelo constitutivo descrito, pero con la salvedad de que todo el proceso de integración se realiza en el espacio de tensiones principales, el cual es mucho más eficiente que utilizar una descripción en invariantes

4.5.1. Esquema de integración implícita *backward-Euler*.

4.5.1.1. Método implícito *backward-Euler*.

Antes de detallar la integración constitutiva del modelo de daño plástico en un esquema implícito de *backward Euler*, considere la siguiente ecuación diferencial de forma:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = \Theta(\mathbf{Z}, t) \quad (4.5.1)$$

sujeta a unas condiciones iniciales $\mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{Z}_0$ y $t \in [t_0, t_f]$. Aunque en apariencia simple, esta ecuación diferencial por lo general no tiene una solución analítica. El algoritmo numérico más simple para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales es conocido como el *método de Euler*. El método de Euler se deriva haciendo uso de la definición de la derivada:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{Z}}{\Delta t} \quad (4.5.2)$$

Por lo tanto, en un intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$ discretizado en una serie de sub-intervalos, $[t_0, t_f] = \bigcup_{n=1}^N [t_n, t_{n+1}]$ y $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ podemos aproximar la ecuación diferencial 2.4.1 por la expresión⁴

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = \Theta(\mathbf{Z}, t) \Rightarrow \frac{\mathbf{Z}_{n+1} - \mathbf{Z}_n}{\Delta t_{n+1}} \approx \Theta(\mathbf{Z}_{n+1}, t_{n+1}) \quad (4.5.3)$$

donde la ecuación 4.5.3 se conoce como esquema de integración implícito de *backward Euler*. La popularidad de este método se debe a que proporciona un marco adecuado para la aplicación de las condiciones de Kuhn-Tucker, lo que lleva al clásico algoritmo de retorno (*return mapping*).

⁴Note también que esta expresión puede aproximarse mediante $\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} = \Theta(\mathbf{Z}, t) \Rightarrow \frac{\mathbf{Z}_{n+1} - \mathbf{Z}_n}{\Delta t_{n+1}} \approx \Theta(\mathbf{Z}_n, t_n)$ constituye el método de *forward Euler*.

4.5.1.2. Integración implícita del modelo de daño plástico.

Suponga la discretización del intervalo de tiempo $[t_0, t_f] = \bigcup_{n=1}^N [t_n, t_{n+1}]$ con estos datos iniciales conocidos $\{\kappa_n, c_n, \phi_n, \psi_n, f_{t,n}, \mathbf{E}_n, \mathbf{E}_n^p\}$. Asuma también dado el gradiente de deformación \mathbf{F}_{n+1} en t_{n+1} . El objetivo principal es encontrar las variables de estado al final del intervalo de $[t_n, t_{n+1}]$ aplicando el esquema implícito de backward-Euler. Podemos empezar reescribiendo la ecuación 4.2.2 por su contraparte discreta como:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{F}_{n+1}^T + \mathbf{c}_e : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^p) \quad (4.5.4)$$

Con el fin de cumplir los requerimientos de objetividad, la regla de flujo dada por la ecuación 4.2.6 se expresa en la configuración de referencia Ω_0 como ⁵:

$$\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \sum_{\alpha} \Delta \lambda_{n+1}^{\alpha} \varphi^*(\mathbf{m}_{n+1}^{\alpha}) \quad (4.5.5)$$

Transformando la ecuación 4.5.5 a su descripción espacial se obtiene:

$$\varphi_*(\mathbf{E}_{n+1}^p) = \varphi_*(\mathbf{E}_n^p) + \varphi_*\left(\sum_{\alpha} \Delta \lambda_{n+1}^{\alpha} \varphi^*(\mathbf{m}_{n+1}^{\alpha})\right) \quad (4.5.6)$$

$$\mathbf{e}_{n+1}^p = \check{\mathbf{e}}_n^p + \sum_{\alpha} \Delta \lambda_{n+1}^{\alpha} \mathbf{m}_{n+1}^{\alpha} \quad (4.5.7)$$

La misma aproximación se puede realizar con las ecuaciones de evolución de las variables internas 4.2.8 y 4.2.9 y con las leyes de endurecimiento o ablandamiento 4.2.10, 4.2.11 y 4.2.12.

$$\kappa_{n+1}^p = \kappa_n^p + \left[\frac{r(\boldsymbol{\tau}_{n+1})}{g_f^p} + \frac{1-r(\boldsymbol{\tau}_{n+1})}{g_c^p} \right] \boldsymbol{\tau}_{n+1} : \Delta \mathbf{e}_{n+1}^p \quad (4.5.8)$$

$$c_{n+1} = c_n + c_{n+1} \cdot \left[\frac{r(\boldsymbol{\tau}_{n+1})}{c_t} \frac{dc_t}{d\kappa^p} + \frac{1-r(\boldsymbol{\tau}_{n+1})}{c_c} \frac{dc_c}{d\kappa^p} \right] (\kappa_{n+1}^p - \kappa_n^p) \quad (4.5.9)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{\partial \phi}{\partial \kappa^p} \Big|_{n+1} (\kappa_{n+1}^p - \kappa_n^p) \quad (4.5.10)$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \frac{\partial \psi}{\partial \kappa^p} \Big|_{n+1} (\kappa_{n+1}^p - \kappa_n^p) \quad (4.5.11)$$

$$f_{t,n+1} = f_{t,n} + \frac{\partial f_t}{\partial \kappa^p} \Big|_{n+1} (\kappa_{n+1}^p - \kappa_n^p) \quad (4.5.12)$$

Finalmente la forma discreta de las condiciones de Kunh-Tucker de carga, descarga y consistencia toman la siguiente expresión:

$$\Delta \lambda_{n+1}^{\alpha} \geq 0, \Phi_{n+1}^{\alpha} \leq 0 \text{ y } \Delta \lambda_{n+1}^{\alpha} \Phi_{n+1}^{\alpha} = 0 \quad (4.5.13)$$

siendo $\Phi^{\alpha} \forall \alpha \in \{c, r\}$ las funciones de fluencia de Mohr-Coulomb y Rankine respectivamente.

4.6. Algoritmo de retorno

4.6.1. Generalidades

Las condiciones de carga-descarga se pueden implementar fácilmente dentro de un programa de elementos finitos mediante el concepto de *estado elástico o tensión elástica de prueba*. Este concepto surge de

⁵En esta tesis usamos la siguiente notación: φ^* indica la operación conocida como *pull-back* y φ_* *push-forward*.

asumir un comportamiento elástico en el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$. En otras palabras, se tantea un estado tensional en base a los datos del paso anterior convergido tal que,

$$\mathbf{e}_{n+1}^{p,tr} = \check{\mathbf{e}}_n^p \quad (4.6.1)$$

$$\kappa_{n+1}^{p,tr} = \kappa_n^p \quad (4.6.2)$$

$$c_{n+1}^{tr} = c_n \quad (4.6.3)$$

$$\phi_{n+1}^{tr} = \phi_n \quad (4.6.4)$$

$$\psi_{n+1}^{tr} = \psi_n \quad (4.6.5)$$

$$f_{t_{n+1}}^{tr} = f_{t_n} \quad (4.6.6)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr} = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{F}_{n+1}^T + \mathbf{c}_e : (\mathbf{e}_{n+1} - \check{\mathbf{e}}_{p,n}) \quad (4.6.7)$$

Si se cumple que

$$\Phi(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr}, \mathbf{q}_{n+1}^{tr}) \leq 0 \quad (4.6.8)$$

el estado tensional actual está dentro de la superficie de fluencia y por tanto, las deformaciones son completamente elásticas y el estado de prueba asumido es correcto. En caso contrario, no se cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker, lo que significa que el estado de prueba asumido es incorrecto y por lo tanto se tiene que retornar a la superficie de fluencia. En otras palabras, se procede a integrar numéricamente el modelo constitutivo. Es en este punto donde se aplican los diferentes algoritmos de retorno desarrollados en el marco de la teoría de la plasticidad. Insertando la forma discreta de la regla de flujo 4.2.6 en la ecuación 4.2.2 se llega a:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{F}_{n+1}^T + \mathbf{c}_e : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^p) - \sum_{\alpha} \Delta\lambda_{n+1}^{\alpha} \mathbf{c}_e : \mathbf{m}_{n+1}^{\alpha} \quad (4.6.9)$$

Finalmente podemos reescribir la ecuación 4.6.9

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr} - \sum_{\alpha} \Delta\lambda_{n+1}^{\alpha} \mathbf{c}_e : \mathbf{m}_{n+1}^{\alpha} \quad (4.6.10)$$

Por lo tanto, el algoritmo de retorno tiene como objeto encontrar los valores de los multiplicadores plásticos $\Delta\lambda^{\alpha}$ que cumplan con las condiciones de Kuhn-Tucker junto con el nuevo estado tensional $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ y las variables internas \mathbf{q}_{n+1} .

4.6.2. Algoritmo de retorno en el espacio de tensiones principales

El algoritmo que se presenta a continuación es una especialización del esquema estándar de *predicción elástica y corrección plástica* ampliamente utilizado en la teoría de plasticidad y llevado a cabo mediante un procedimiento de retorno en el espacio de tensiones principales (en la fase de corrección plástica). Difiere en gran medida con la implementación que encontramos en la literatura, pues por lo general la superficie de Mohr-Coulomb y otras superficies son expresadas en función de los invariantes. La representación en invariantes a menudo envuelve funciones altamente no lineales que por lo general vienen acompañadas por funciones trigonométricas⁶. El algoritmo de retorno en el espacio de tensiones principales es un procedimiento aplicable

⁶Por ejemplo, en comparación con la descripción en tensiones principales de la superficie de Rankine $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 - f t = 0$, su expresión en invariante se escribe como $\Phi(I_1, J_2, \theta) = 2\sqrt{3J_2} \cos \theta + I_1 - 3f t = 0$ donde I_1 es el primer invariante del tensor de tensiones, J_2 es el segundo invariante del tensor desviador y θ es el ángulo de similaridad o ángulo de Lode.

para cualquier criterio de fluencia isótropo en general y será empleado en esta tesis por su simplicidad y por ser computacionalmente más efectivo.

Al considerar un modelo de material isotrópico, observe que los cálculos pueden llevarse a cabo con respecto a cualquier conjunto de ejes de coordenadas. Por lo tanto, la tensión elástica de prueba de la ecuación 4.6.10 se transforma en espacio de tensiones principales. Teniendo en cuenta el hecho de que la tensión retornada conserva las direcciones principales, la tensión actualizada se transforma de nuevo al sistema de coordenadas originales. A continuación describimos el procedimiento de retorno en el espacio de tensiones principales.

Asuma que un material quasi-frágil posea una respuesta homogénea e isótropa⁷. bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones elásticas y grandes deformaciones plásticas, se puede reescribir la ecuación 4.2.2 en su componentes esférica y desviadora como:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{c}_e : \mathbf{e}^e = \boldsymbol{\tau}_0 + 2G \cdot \mathbf{e}_d^e + K \cdot \mathbf{e}_v^e = \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_d + p\mathbf{I} \quad (4.6.11)$$

donde $\mathbf{e}_d^e = \mathbf{e}^e - \frac{1}{3}\mathbf{e}_v^e\mathbf{I}$ es la deformación desviadora elástica, $\mathbf{e}_v^e = tr[\mathbf{e}^e]$ es la deformación volumétrica elástica, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ es el módulo de elasticidad al cortante, $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ es el módulo de bulks, \mathbf{I} es el tensor identidad de segundo orden, $\boldsymbol{\tau}_d$ son las tensiones desviadoras y $p = \frac{\tau_{ii}}{3}$ es la presión hidrostática.

Considere ahora que la superficie de fluencia Φ^α , el flujo de potencial plástico Ψ^α y su gradiente \mathbf{m}^α se expresan explícitamente en función de las tensiones principales. Para ser coherente con la medida de tensión usada (en este caso la tensión de Kirchhoff), las tensiones principales las indicaremos τ_1, τ_2, τ_3 y, por convenio, salvo indicación contraria se tomará siempre de forma que $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$. Por tanto, el componente esférico y desviador en las direcciones principales del flujo potencial \mathbf{m}^α toma la forma:

$$m_v^\alpha = m_{ii}^\alpha \quad (4.6.12)$$

$$m_d^\alpha = \mathbf{m}^\alpha - \frac{1}{3}m_v^\alpha\mathbf{I} \quad (4.6.13)$$

Como el modelo de daño plástico asume un mecanismo de fallo isótropo, con unas cuantas manipulaciones algebraicas podemos expresar convenientemente la ecuación 4.6.10 en las direcciones principales de modo que

$$\tau_{n+1}^j = \tau_{n+1}^{j,trial} - \sum_\alpha \Delta\lambda_{n+1}^\alpha (2G[m_d^\alpha]^j + Km_{v,n+1}^\alpha) \quad \forall j = 1, 2, 3 \quad (4.6.14)$$

donde τ_{n+1}^j es el j-ésimo componente de la tensión principal del estado actual, $\tau_{n+1}^{j,tr}$ es j-ésimo componente de la tensión elástica principal de prueba y por último m_v^α y m_d^α es la componente esférica y la componente desviadora de \mathbf{m}^α respectivamente. Obsérvese que las tensiones principales actuales están expresadas en función parámetro de consistencia plástica $\Delta\lambda^\alpha$. Sustituyendo estas tensiones en aquellas superficies de fluencias activas $\Phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \in \mathbb{J}_{act}$ se obtiene un sistema de ecuaciones no lineales en $\Delta\lambda^\alpha$,

$$\Phi_\alpha(\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \Delta\lambda_3, \dots, \Delta\lambda_N) = 0 \text{ para } \alpha = 1, 2, 3 \dots N \in \mathbb{J}_{act} \quad (4.6.15)$$

siendo α el índice para cada una de las N superficies activas \mathbb{J}_{act} . El sistema anterior se resuelve mediante un esquema de Newton-Raphson cuyos valores de $\Delta\lambda^\alpha$ encontrados satisfacen las condiciones de Kuhn- Tucker de carga y descarga. Una vez obtenido los valores de $\Delta\lambda^\alpha$, se procede al cálculo de las deformaciones principales plásticas actuales $\mathbf{e}_{n+1}^{p,j}$, las tensiones principales actuales τ_{n+1}^j y las variables internas correspondientes \mathbf{q}_{n+1} .

⁷Esta hipótesis implica que el tensor constitutivo elástico \mathbf{c}_e posee simetría mayor $\mathbf{c}_e^{ijkl} = \mathbf{c}_e^{klij}$ y menor $\mathbf{c}_e^{ijkl} = \mathbf{c}_e^{jilk}$.

1. Tensión elástica y variables de estado de prueba:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{F}_{n+1}^T + \mathbf{c}_e : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^p)$$

$$\mathbf{q}_{n+1}^{tr} = \mathbf{q}_n$$

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1}^{tr} = \boldsymbol{\xi}_n$$

2. Actualización del estado tensional:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr} - \sum_{\alpha} \Delta \lambda_{n+1}^{\alpha} \mathbf{c}_e : \mathbf{m}_{n+1}^{\alpha}$$

3. Actualización de las variables internas:

$$\kappa_{n+1}^p = \kappa_n^p + \left[\frac{r(\boldsymbol{\tau}_{n+1})}{g_f^p} + \frac{1-r(\boldsymbol{\tau}_{n+1})}{g_c^p} \right] \boldsymbol{\tau}_{n+1} : \Delta \mathbf{e}_{n+1}^p$$

$$c_{n+1} = c_n + c_{n+1} \cdot \left[\frac{r(\boldsymbol{\tau}_{n+1})}{c_t} \frac{dc_t}{d\kappa^p} + \frac{1-r(\boldsymbol{\tau}_{n+1})}{c_c} \frac{dc_c}{d\kappa^p} \right] (\kappa_{n+1}^p - \kappa_n^p)$$

4. Leyes de endurecimiento y ablandamiento:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{\partial \phi}{\partial \kappa^p} \Big|_{n+1} (\kappa_{n+1}^p - \kappa_n^p)$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \frac{\partial \psi}{\partial \kappa^p} \Big|_{n+1} (\kappa_{n+1}^p - \kappa_n^p)$$

$$f_{t_{n+1}} = f_{t_n} + \frac{\partial f_t}{\partial \kappa^p} \Big|_{n+1} (\kappa_{n+1}^p - \kappa_n^p)$$

5. Condición de carga/descarga:

$$\Delta \lambda_{n+1}^{\alpha} \geq 0, \Phi_{n+1}^{\alpha} \leq 0, \Delta \lambda_{n+1}^{\alpha} \Phi_{n+1}^{\alpha} = 0$$

Cuadro 4.6.1: Implementación computacional del modelo constitutivo de daño plástico.

Por último se verifica la desigualdad $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$. Si se cumple la misma, se procede a computar el tensor de tensiones $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$ en coordenadas cartesianas⁸

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \sum_{i=1}^3 \tau_{n+1}^i \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_i \quad (4.6.16)$$

Los detalles de este método se muestran en el cuadro 4.6.1. En la sección siguiente se particulariza este algoritmo para el modelo de Mohr-Coulomb modificado.

⁸ Siguiendo la notación estándar de medios continuos, $\hat{\mathbf{e}}_i$ es la base orto-normal del tensor de tensiones.

4.7. Aplicación del algoritmo de retorno en tensiones principales al modelo modificado de Mohr-Coulomb

4.7.1. Algoritmo de retorno en el modelo de MC-Modificado

El algoritmo de retorno requiere la evaluación de la primera derivada con respecto al tensor de tensiones principales de la superficie de fluencia (flujo asociado) o del potencial plástico (en caso de un flujo no asociado). Debido a la isotropía de las funciones involucradas, el algoritmo de retorno se puede realizar en el espacio de tensiones principales. Como el modelo de Rankine y Mohr-Coulomb son funciones lineales en el tensor de tensiones principales, los gradientes son constantes.

No obstante, ambos criterios presentan singularidades (las singularidades en este caso surgen por el cruce dos o mas superficies de fluencias) en sus respectivas superficies de fluencia, donde el gradiente con respecto a las tensiones no está definido (véase figura 4.2). Owen y Hinton(1980) han desarrollado para el modelo estándar de MC una técnica resolver este problema que consiste en redondear la superficie de fluencia en las proximidades de los vértices mediante un criterio de Drucker-Prager. No obstante, aunque este procedimiento permite calcular el gradiente, las tensiones calculadas no son tan precisas si el flujo tiene lugar en la proximidad del vértice. El criterio combinado MC presenta las mismas singularidades de sus modelos génesis más las singularidades que se presentan en la intersección geométrica producto del acoplamiento de la superficie de Rankine y Mohr-Coulomb. Por lo tanto, para definir convenientemente el gradiente en los

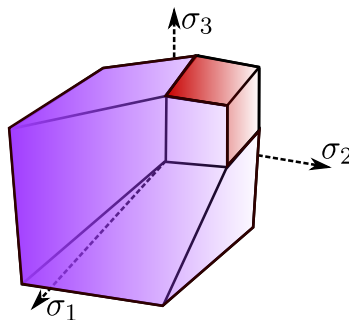


Figura 4.2: Mohr Coulomb Modificado.

puntos singulares se aplica la regla de Koiter. Dependiendo del lugar donde se presente el flujo plástico, el modelo modificado de MC presenta diez posibles flujos plásticos y por consiguiente requiere un total de diez algoritmos de retorno que a continuación se describen:

1. Flujo plástico en la parte comprimida.
 - a) *Flujo plástico en el plano principal.*
 - b) *Flujo plástico en el borde derecho.*
 - c) *Flujo plástico en el borde izquierdo.*
 - d) *Flujo plástico en el ápice.*
2. Flujo plástico en la parte traccionada.
 - a) *Flujo plástico en el plano de tracción σ_1 .*

b) Flujo plástico simultáneo en dos planos de tracción : σ_1 y σ_2 .

c) Flujo plástico simultáneo en los tres planos de tracción (ápice de Rankine) : σ_1 , σ_2 y σ_3 .

3. Modelo combinado de MC para estados tensionales ubicados en la intersección de la superficie de MC y Rankine.

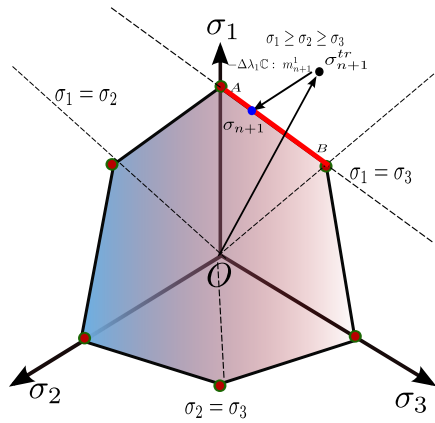
a) Flujo plástico en la intersección de plano principal de MC y plano σ_1 Rankine.

b) Flujo plástico en la intersección de plano principal y borde derecho de MC junto con plano de tracción σ_1 Rankine.

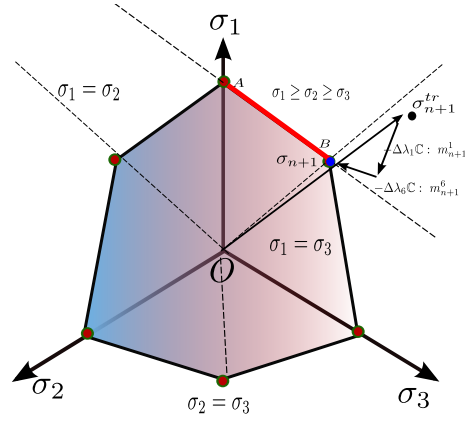
c) Flujo plástico en la intersección de plano principal y borde izquierdo de MC junto con planos de tracción σ_1 y σ_2 de Rankine.

4.7.2. Flujos plásticos en la parte comprimida

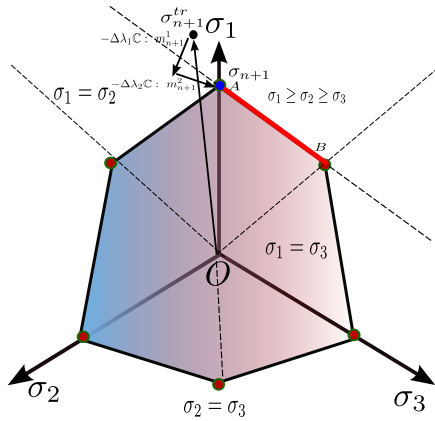
4.7.2.1. Caso I. Flujo plástico en el plano principal



(a) Retorno al plano principal.



(b) Retorno al lado derecho.



(c) Retorno al lado izquierdo.

Figura 4.3: Retorno a la superficie de Mohr-Coulomb.

La superficie de fluencia $\Phi^c(\tau, \kappa^p)$ en el plano principal de MC y su respectivo potencial plástico $\Psi^c(\tau, \kappa^p)$

Elemento Ω_i^e en punto de Gauss $\mathcal{G}_{i,g}^e$. Paso $n + 1$ en $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

1. Datos iniciales: $\tau_{n+1}^{tr}, F_{n+1}, e_{n+1}, \check{e}_n^p, q_n, \xi_n$

2. Datos objetivos: $\tau_{n+1}, e_{n+1}^p, q_{n+1}, \xi_{n+1}$

3. Transformación del estado tensional actuante a las direcciones principales.

$$\tau_{n+1}^{main, tr} = \mathcal{T}(\tau_{n+1}^{tr}) \text{ con } \tau_1^{tr} > \tau_2^{tr} > \tau_3^{tr}$$

4. Inicialización del proceso iterativo e identificación de las superficies N activas J_{act} :

$$k = 0, \Delta\lambda_\alpha^{(k)} = 0 \quad \forall \mathbb{J}^{act} = \alpha \in \{c, r\} | \Phi_{n+1}^\alpha > 0$$

$$\Upsilon_\alpha^{(k)} = \Phi_{n+1}^\alpha(\Delta\lambda_1^{(k)}, \Delta\lambda_2^{(k)}, \Delta\lambda_3^{(k)}, \dots, \Delta\lambda_N^{(k)})$$

5. Ciclo iterativo. Inicialización del método de Newton-Raphson

a) Cómputo de los incrementos de los multiplicadores plásticos:

$$\begin{pmatrix} \delta\lambda_1^{(k+1)} \\ \delta\lambda_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ \delta\lambda_N^{(k+1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \Delta\lambda_1}^{(k)} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \Delta\lambda_2}^{(k)} & \cdot & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \Delta\lambda_N}^{(k)} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \Delta\lambda_1}^{(k)} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \Delta\lambda_2}^{(k)} & \cdot & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \Delta\lambda_N}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Phi_N}{\partial \Delta\lambda_1}^{(k)} & \frac{\partial \Phi_N}{\partial \Delta\lambda_2}^{(k)} & \cdot & \frac{\partial \Phi_N}{\partial \Delta\lambda_N}^{(k)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Upsilon_1^{(k)} \\ \Upsilon_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Upsilon_N^{(k)} \end{pmatrix}$$

b) Actualización de multiplicadores plásticos, variables internas, variables de endurecimiento y residuos.

$$\Delta\lambda_\alpha^{(k+1)} = \Delta\lambda_\alpha^k + \delta\lambda_\alpha^{(k+1)}, q_{n+1}^{k+1} = q_n + \Delta q_{n+1}^{k+1}, \xi_{n+1}^{k+1} = \xi_n + \Delta\xi_{n+1}^{k+1}$$

$$\Upsilon_\alpha^{(k+1)} = \Phi_{n+1}^\alpha(\Delta\lambda_1^{(k+1)}, \Delta\lambda_2^{(k+1)}, \Delta\lambda_3^{(k+1)}, \dots, \Delta\lambda_N^{(k+1)})$$

c) Chequeo de convergencia.

$$\|\Upsilon_\alpha^{(k+1)}\| < \epsilon \text{ y } \tau_{n+1}^1 > \tau_{n+1}^2 > \tau_{n+1}^3$$

$$k = k + 1$$

6. Revisión de las condiciones discretas de Kuhn-Tucker.

$$\Delta\lambda_\alpha > 0 \text{ y } \Phi_{n+1}^\alpha < \epsilon \quad \forall \mathbb{J}^{act} = \alpha \in \{c, r\} | \Phi_{n+1}^\alpha > 0$$

7. Actualización y transformación a las coordenadas originales del estado tensional actual.

$$\tau_{n+1} = \mathcal{T}^{-1}(\tau_{n+1}^{main, tr})$$

Cuadro 4.7.1: Esquema iterativo de Newton-Raphson aplicado al modelo de daño plástico para garantizar consistencia plástica.

en el espacio de tensiones principales de Kirchhoff (véase figura 4.3a) se definen por:

$$\Phi_1^c(\tau, c) = (\tau_1 - \tau_3) + (\tau_1 + \tau_3) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \quad (4.7.1a)$$

$$\Psi_1^c(\tau, c) = (\tau_1 - \tau_3) + (\tau_1 + \tau_3) \sin \psi - 2c \cos \psi = 0 \quad (4.7.1b)$$

donde $c = c(\kappa^p)$ es la cohesión, $\phi = \phi(\kappa^p)$ es el ángulo de fricción interna y $\psi = \psi(\kappa^p)$ es el ángulo de dilatación. Con la regla de flujo en 4.4.13, computamos la tasa del tensor de deformación plástica⁹,

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau} = \dot{\lambda}_1 [(1 + \sin \psi) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - (1 - \sin \psi) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] \quad (4.7.2)$$

Finalmente, aplicando conjuntamente el método de implícito de backward Euler y la ecuación 4.6.14, las tensiones principales actuales $\tau_{n+1}^{j,main}$ tienen la forma compacta:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_1^{tr} - \Delta \lambda_1 [2G(1 + \frac{1}{3} \sin \psi) + 2K \sin \psi] \\ \tau_2 &= \tau_2^{tr} - \Delta \lambda_1 \sin \psi (\frac{4}{3}G - 2K) \\ \tau_3 &= \tau_3^{tr} - \Delta \lambda_1 [2G(1 - \frac{1}{3} \sin \psi) + 2K \sin \psi] \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la superficie de fluencia $\Phi^c(\tau, c)$ en 4.7.1a y resolviendo la ecuación no lineal resultante mediante el método Newton-Raphson descrito en el cuadro 4.7.1, se obtienen los valores de $\Delta \lambda_i$ y las tensiones principales actualizadas τ_{n+1}^{main} .

4.7.2.2. Caso II. Flujo plástico en el borde derecho

Para este caso de flujo plástico, se igualan dos tensiones principales ($\tau_2 = \tau_3$), estado tensional conocido como estado *cilíndrico* donde el flujo plástico tiene lugar en una arista de la superficie de Mohr-Coulomb (véase figura 4.3b). Este caso en particular presenta dos superficies *activas*. En consecuencia, dos multiplicadores plásticos no nulos y las superficies activas Φ_1^c y Φ_6^c (véase ecuación 2.3.13a y 2.3.13f), con sus correspondientes potenciales Ψ_1^c y Ψ_6^c . El tensor de tasa de deformación plástico se define usando la regla de Koiter 4.4.13:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Psi_1^c}{\partial \tau} + \dot{\lambda}_6 \frac{\partial \Psi_6^c}{\partial \tau} \quad (4.7.4)$$

$$\dot{\mathbf{e}}^p = (\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_6)(1 + \sin \psi) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \dot{\lambda}_6(\sin \psi - 1) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \dot{\lambda}_1(\sin \psi - 1) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (4.7.5)$$

Usando nuevamente la ecuación 4.6.14, el vector de tensiones principales queda:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_1^{tr} - [2G(1 + \frac{1}{3} \sin \psi(\kappa^p)) + 2K \sin \psi(\kappa^p)](\Delta \lambda_1 + \Delta \lambda_6) \\ \tau_2 &= \tau_2^{tr} + (\frac{4}{3}G - 2K) \sin \psi(\kappa^p) \Delta \lambda_1 + [2G(1 - \frac{1}{3} \sin \psi(\kappa^p)) - 2K \sin \psi(\kappa^p)] \Delta \lambda_6 \\ \tau_3 &= \tau_3^{tr} + [2G(1 - \frac{1}{3} \sin \psi(\kappa^p)) - 2K \sin \psi(\kappa^p)] \Delta \lambda_1 + (\frac{4}{3}G - 2K) \sin \psi(\kappa^p) \Delta \lambda_6 \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Sustituyendo los valores de las tensiones τ_{n+1}^j en la superficie de fluencia $\Phi^c(\tau, c)$ en 4.4.5a y 4.4.5f respectivamente y luego resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales resultante mediante el método Newton-Raphson (cuadro 4.7.1), se obtienen los valores de los multiplicadores plásticos correspondientes y las tensiones principales actualizadas τ_{n+1}^{main} .

⁹Recuérdese que $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0\}$ y $\mathbf{e}_3 = \{0, 0, 1\}$ son las bases ortonormales.

4.7.2.3. Caso III. Flujo plástico en el borde izquierdo

Al igual que el caso anterior, estamos ante un punto singular en la superficie de Mohr-Coulomb (véase figura 4.3c). Para este caso, tensiones principales τ_1 y τ_2 se igualan y se activan las funciones Φ_1^c y Φ_2^c (véase ecuación 4.4.5a y 4.4.5b) con sus correspondientes potenciales Ψ_1^c y Ψ_2^c . Usando nuevamente la ecuación 4.4.13, computamos la tasa deformación plástica como sigue:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Psi_1^c}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial \Psi_2^c}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (4.7.7)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}_1 (1 + \sin \psi) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \dot{\lambda}_1 (\sin \psi + 1) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + (\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2) (\sin \psi - 1) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (4.7.8)$$

Finalmente, con ecuación 4.6.14 y varias manipulaciones algebraicas, las tensiones principales actuales se expresan en su contraparte discreta como:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_1^{tr} - [2G(1 + \frac{1}{3} \sin \psi(\kappa^p)) + 2K \sin \psi(\kappa^p)] \Delta \lambda_1 + (\frac{4}{3}G - 2K) \sin \psi(\kappa^p) \Delta \lambda_2 \\ \tau_2 &= \tau_2^{tr} + (\frac{4}{3}G - 2K) \sin \psi(\kappa^p) \Delta \lambda_1 - [2G(1 + \frac{1}{3} \sin \psi(\kappa^p)) + 2K \sin \psi(\kappa^p)] \Delta \lambda_2 \\ \tau_3 &= \tau_3^{tr} + [2G(1 - \frac{1}{3} \sin \psi(\kappa^p)) - 2K \sin \psi(\kappa^p)] (\Delta \lambda_1 + \Delta \lambda_2) \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

4.7.2.4. Caso IV. Flujo plástico en el ápice

El ápice es un punto singular en donde coinciden las seis superficies de Mohr-Coulomb. Está situado en la parte traccionada del eje hidrostático a una distancia de $\sqrt{3}c \cot \phi$. El retorno de un estado tensional hacia el ápice requiere que las tensiones desviadoras se anulen y que la presión hidrostática $p = \frac{1}{3}(\tau_{ii})$ sea igual a $c \cot \phi$, produciendo un estado tensional final conocido como *esférico*. Para esta condición particular de flujo, el estado tensional de ubica fuera del dominio elástico que definen los seis planos de MC. No obstante, se puede definir convenientemente para este caso particular una nueva función de fluencia $\Phi(\boldsymbol{\tau}, c) = \Phi^H(\boldsymbol{\tau}, c)$ en el espacio *presión-tensión desviadora* con la restricción de que las tensiones desviadoras en t_{n+1} sean $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{des} = \mathbf{0}$; es decir,

$$\Phi^H(\boldsymbol{\tau}, c) = \Phi^H(p, c) = p - c \cot \phi = 0 \quad (4.7.10)$$

$$\Phi^D(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau}^{des} = \mathbf{0} \quad (4.7.11)$$

siendo $p = \frac{1}{3}\tau_{ii}$ la presión volumétrica y τ_{des} la tensión desviadora. Desde este punto de vista, luego de aplicar el método de *Backward-Euler*, se puede descomponer la ecuación 4.6.10 en su componente esférica y desviadora tal que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{n+1} &= \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr} - \sum_{\alpha} \Delta \lambda_{n+1}^{\alpha} \left(2G[\mathbf{m}_d^{\alpha}]_{n+1} + K\mathbf{m}_{v,n+1}^{\alpha} \mathbf{I} \right) \\ \boldsymbol{\tau}_{n+1} &= \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{des} + p_{n+1} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{des} &= \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{des,tr} - \sum_{\alpha} \Delta \lambda_{n+1}^{\alpha} \left(2G[\mathbf{m}_d^{\alpha}]_{n+1} \right) \\ p_{n+1} &= p_{n+1}^{tr} - \sum_{\alpha} \Delta \lambda_{n+1}^{\alpha} \left(K\mathbf{m}_{v,n+1}^{\alpha} \right) \\ \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr} &= \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{des,tr} + p_{n+1}^{tr} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.7.12)$$

Nótese que para este caso particular de flujo, se requieren dos vectores de retorno para ubicar el estado tensional final en el ápice de MC: un vector totalmente esférico y el otro completamente desviador. Por tanto, las

cantidades computadas utilizando estos vectores de flujo corresponden a la deformación plástica volumétrica y desviadora respectivamente. Observando que para este caso de flujo las componentes plásticas quedan totalmente desacopladas y definiendo $\mathbf{m}_d = \frac{\boldsymbol{\tau}^{des}}{\|\boldsymbol{\tau}^{des}\|}$ y $\mathbf{m}_v = \frac{1}{3}\mathbf{I}$, queda el siguiente sistema desacoplado de ecuaciones

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{des} = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{des,tr} - \Delta\lambda_{n+1}^{des} \left(\frac{\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{des,tr}}{\|\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{des,tr}\|} \right) = \mathbf{0} \quad (4.7.13)$$

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{tr} - \Delta\lambda_{n+1}^H K \quad (4.7.14)$$

Finalmente se sustituye 4.7.14 en 4.7.10, se procede a la resolución de la ecuación no lineal resultante en $\Delta\lambda^H$. Es aparente que por la condición en 4.7.11 se obtiene una solución de forma cerrada para $\Delta\lambda^{des}$, es decir

$$\Delta\lambda_{n+1}^{des} = \frac{\|\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{des,tr}\|}{2G} \quad (4.7.15)$$

4.7.3. Flujos plásticos en la parte traccionada. Modelo de Rankine

4.7.3.1. Flujo plástico en el plano de tracción σ_1

La función de discontinuidad, también considerada en este caso como función de flujo potencial plástico (flujo asociado) está dada por la ecuación 4.4.10a

$$\Phi_1^r(\boldsymbol{\tau}, f_t) = \tau_1 - f_t(\kappa^p) = 0 \quad (4.7.16)$$

donde τ_1 es la tensión principal máxima en el espacio de tensiones de Kirchhoff y $f_t(\kappa^p)$ la resistencia a tracción del material que depende de la evolución no lineal de variable interna de daño plástico κ^p . Como habíamos procedido en los apartados anteriores, para un proceso mecánico que active esta superficie de fluencia, después de aplicar la regla de Koiter, se tiene que la tasa de formación plástica en las direcciones principales está dada por:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Phi_1^r}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda}_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (4.7.17)$$

Luego de aplicar adecuadamente el esquema de integración de backward Euler, las tensiones principales dadas por la expresión 4.6.14 se pueden escribir, para este caso de flujo en particular, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tau_1^{n+1} &= \tau_1^{tr} - \Delta\lambda_1 \left(\frac{4}{3}G + K \right) \\ \tau_2^{n+1} &= \tau_2^{tr} - \Delta\lambda_2 \left(-\frac{2}{3}G + K \right) \\ \tau_3^{n+1} &= \tau_3^{tr} - \Delta\lambda_3 \left(-\frac{2}{3}G + K \right) \end{aligned} \quad (4.7.18)$$

Se procede de igual manera que en los apartados anteriores, sustituyendo el valor de las tensiones principales de 4.7.17 en 4.7.16 y resolviendo el sistema no lineal resultante. Luego se actualizan las tensiones y se transforman al sistema de coordenadas originales.

4.7.3.2. Flujo plástico en dos planos de tracción σ_1 y σ_2

Este procedimiento de retorno es idéntico al anterior, sólo que en este caso se tiene dos superficies activas a considerar: Plano σ_1 y σ_2 de Rankine.

$$\Phi_1^r(\tau, f_t) = \tau_1 - f_t(\kappa^p) = 0 \quad (4.7.19a)$$

$$\Phi_2^r(\tau, f_t) = \tau_2 - f_t(\kappa^p) = 0 \quad (4.7.19b)$$

Aplicando la regla de flujo en 4.4.13, la tasa de deformación plástica se expresa finalmente como

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Phi_1^r}{\partial \tau} + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial \Phi_2^r}{\partial \tau} = \dot{\lambda}_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \dot{\lambda}_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (4.7.20)$$

Al aplicar el esquema de integración de backward Euler, computar las tensiones principales actualizadas dadas por la expresión 4.6.14 y sustituir éstos en las ecuaciones 4.7.19a y 4.7.19b resulta el siguiente sistema no lineal de ecuaciones en $\Delta\lambda_1$ y $\Delta\lambda_2$

$$\Phi_1^r(\tau, f_t) = \tau_1 - \Delta\lambda_1\left(\frac{4}{3}G + K\right) + \Delta\lambda_2\left(\frac{2}{3}G - K\right) - f_t(\kappa^p) = 0 \quad (4.7.21)$$

$$\Phi_2^r(\tau, f_t) = \tau_2 + \Delta\lambda_1\left(\frac{2}{3}G - K\right) - \Delta\lambda_2\left(\frac{4}{3}G + K\right) - f_t(\kappa^p) = 0 \quad (4.7.22)$$

que se resuelve con el método Newton-Raphson (cuadro 4.7.1) anteriormente comentado. Luego se procede a la actualización de las tensiones junto con su cambio de base correspondiente τ_{n+1} y al cálculo de las nuevas deformaciones plásticas \mathbf{e}_{n+1}^p y elásticas \mathbf{e}_{n+1}^e .

4.7.3.3. Flujo plástico en tres planos de tracción σ_1 , σ_2 y σ_3

En este caso de flujo, este retorno nos lleva hacia el ápice de la superficie de Rankine. Por lo tanto, están *activas* todos los planos que delimitan el dominio elástico que define esta función. Asumiendo un flujo plástico asociado, el flujo potencial plástico se expresa con las mismas funciones de fluencia, es decir

$$\Phi_1^r(\tau, f_t) = \tau_1 - f_t(\kappa^p) = 0 \quad (4.7.23a)$$

$$\Phi_2^r(\tau, f_t) = \tau_2 - f_t(\kappa^p) = 0 \quad (4.7.23b)$$

$$\Phi_3^r(\tau, f_t) = \tau_3 - f_t(\kappa^p) = 0 \quad (4.7.23c)$$

Procediendo de manera idéntica que los casos de flujos anteriores, la tasa de deformación plástica se escribe mediante regla de flujo dada por 4.4.13

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Phi_1^r}{\partial \tau} + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial \Phi_2^r}{\partial \tau} + \dot{\lambda}_3 \frac{\partial \Phi_3^r}{\partial \tau} \quad (4.7.24)$$

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\lambda}_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \dot{\lambda}_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \dot{\lambda}_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (4.7.25)$$

Las tensiones principales actualizadas, quedan finalmente expresadas en función de los tres multiplicadores $\Delta\lambda_1$, $\Delta\lambda_2$ y $\Delta\lambda_3$, tomando la siguiente forma

$$\tau_1^{n+1} = \tau_1^{tr} - \Delta\lambda_1\left(\frac{4}{3}G + K\right) + \Delta\lambda_2\left(\frac{2}{3}G - K\right) + \Delta\lambda_3\left(\frac{2}{3}G - K\right) \quad (4.7.26a)$$

$$\tau_2^{n+1} = \tau_2^{tr} - \Delta\lambda_1\left(\frac{2}{3}G - K\right) - \Delta\lambda_2\left(\frac{4}{3}G + K\right) + \Delta\lambda_3\left(\frac{2}{3}G - K\right) \quad (4.7.26b)$$

$$\tau_3^{n+1} = \tau_3^{tr} - \Delta\lambda_1\left(\frac{2}{3}G - K\right) + \Delta\lambda_2\left(\frac{2}{3}G - K\right) - \Delta\lambda_3\left(\frac{4}{3}G + K\right) \quad (4.7.26c)$$

El sistema no lineal resultante a resolver se obtiene sustituyendo las ecuaciones anteriores en las tres superficies de fluencia Φ_1^r , Φ_2^r y Φ_3^r respectivamente, quedando el siguiente sistema no lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned}\Phi_1^r(\tau, f_t) &= \tau_1^{tr} - \Delta\lambda_1\left(\frac{4}{3}G + K\right) + \Delta\lambda_2\left(\frac{2}{3}G - K\right) + \Delta\lambda_3\left(\frac{2}{3}G - K\right) - f_t(\kappa^p) = 0 \\ \Phi_2^r(\tau, f_t) &= \tau_2^{tr} + \Delta\lambda_1\left(\frac{2}{3}G - K\right) - \Delta\lambda_2\left(\frac{4}{3}G + K\right) + \Delta\lambda_3\left(\frac{2}{3}G - K\right) - f_t(\kappa^p) = 0 \\ \Phi_3^r(\tau, f_t) &= \tau_3^{tr} + \Delta\lambda_1\left(\frac{2}{3}G - K\right) + \Delta\lambda_2\left(\frac{2}{3}G - K\right) - \Delta\lambda_3\left(\frac{4}{3}G + K\right) - f_t(\kappa^p) = 0\end{aligned}\quad (4.7.27)$$

Finalmente, con el algoritmo de retorno detallado en el cuadro 4.7.1 se procede a computar los valores de los multiplicadores plásticos $\Delta\lambda_1$, $\Delta\lambda_2$ y $\Delta\lambda_3$, donde luego de sustituir en 4.7.26a, 4.7.26b y 4.7.26c se obtienen las tensiones principales actualizadas.

4.7.4. Modelo combinado de MC para estados tensionales ubicados en la intersección de la superficie de MC y Rankine

El modelo modificado de MC requiere la definición de tres retornos adicionales debido al acoplamiento geométrico de la superficie de MC y Rankine (véase 4.2). En otras palabras, estos retornos surgen por la introducción de la tensión de corte que define la misma superficie de Rankine. Dado que el comportamiento del modelo de daño plástico es isotrópico, esta propiedad asegura que los retornos se limitan a aquellas partes del sextante de la superficie que cumplan la condición $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$.

En vista de que la algoritmia es análoga a los restantes procedimientos de retorno detallados, no tiene sentido precisar por separado cada uno de los detalles particulares de estos algoritmos de retorno, por lo cual solo se procederá a describir el primero de ellos, sin dejar de mencionar los aspectos relevantes de los restantes.

4.7.4.1. Modelo combinado de MC para estados tensionales ubicados en la intersección de la superficie principal de MC y plano σ_1 Rankine

Suponga que durante un proceso mecánico de carga se alcanza un estado tensional tal que se activen el plano principal de MC y el plano σ_1 Rankine. El procedimiento para cumplir con las condiciones de carga, descarga y persistencia de Kuhn- Tucker es análogo a los casos anteriores; sin embargo se complica debido a que se activan simultáneamente las superficies principales de fluencia de ambos criterios. Se asume un flujo potencial no asociado para el criterio de Mohr-Coulomb dado por Ψ_1^c y asociado para Rankine.

Al introducir las condiciones de carga, descarga y persistencia plástica para múltiples superficies, la tasa deformación plástica se escribe para esta condición de flujo como

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Phi_1^c}{\partial \tau} + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial \Phi_1^r}{\partial \tau} \quad (4.7.28)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}_1 [(1 + \sin \psi) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - (1 - \sin \psi) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3] + \dot{\lambda}_2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (4.7.29)$$

Aplicando la ecuación 2.4.27 computamos el vector de las tensiones principales actualizadas que sustituidas en la superficie principal de Mohr-Coulomb Φ_1^c y la superficie Rankine Φ_1^r queda el siguiente sistema no lineal

expresado en términos de $\Delta\lambda_1$ y $\Delta\lambda_2$

$$\begin{aligned}\Phi_1^c(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) &= \tau_1^{tr} - \tau_3^{tr} + (\tau_1^{tr} + \tau_3^{tr}) \sin \phi(\kappa^p) - 2c(\kappa^p) \cos \phi(\kappa^p) \\ &\quad - 2G[A] + 2G[C] - 2G \sin \phi(\kappa^p)[A] - 2G \sin \phi(\kappa^p)[C] - 2K \sin \phi(\kappa^p)[D] = 0\end{aligned}\quad (4.7.30)$$

$$\Phi_2^r(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = \tau_1^{tr} - 2G[A] - K[D] - f_t(\kappa^p) = 0 \quad (4.7.31)$$

siendo los términos

$$A = \Delta\lambda_1(1 + \frac{1}{3} \sin \psi(\kappa^p)) + \frac{2}{3} \Delta\lambda_1 \quad (4.7.32)$$

$$B = -\frac{2}{3} \Delta\lambda_1 \sin \psi(\kappa^p) - \frac{1}{3} \Delta\lambda_1 \quad (4.7.33)$$

$$C = -\Delta\lambda_1(\frac{1}{3} \sin \psi(\kappa^p) - 1) - \frac{1}{3} \Delta\lambda_1 \quad (4.7.34)$$

$$D = 2\Delta\lambda_1 \sin \psi(\kappa^p) + \Delta\lambda_1 \quad (4.7.35)$$

Computar los valores de $\Delta\lambda_1$ y $\Delta\lambda_2$ requiere la estrategia de Newton-Raphson. Observe la alta no linealidad introducida por la variación de la variable interna de daño plástico en la cohesión, la fricción, la dilatación y la resistencia a tracción del material. Una vez converge el sistema, se procede a computar de manera idéntica todas las demás variables actuantes.

4.7.4.2. Flujo plástico en la intersección de plano principal y borde derecho de MC junto con plano de tracción σ_1 Rankine

Para este caso, las tres superficies activas que definen la tasa de deformación son el plano principal de MC Φ_1^c , el borde derecho de la misma Φ_6^c y la superficie principal Φ_1^r (plano σ_1) de Rankine

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Phi_1^c}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \dot{\lambda}_6 \frac{\partial \Phi_6^c}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \dot{\lambda}_3 \frac{\partial \Phi_1^r}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (4.7.36)$$

$$\dot{\epsilon}^p = (\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_6)(1 + \sin \psi) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \dot{\lambda}_6(\sin \psi - 1) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \dot{\lambda}_1(\sin \psi - 1) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \dot{\lambda}_2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (4.7.37)$$

4.7.4.3. Flujo plástico en la intersección de plano principal y borde izquierdo de MC junto con plano de tracción σ_1 y σ_2 Rankine

Este caso de flujo es el más costoso de todos, pues entran en juego cuatro superficies de fluencia. Por ende, se requieren cuatro vectores de retorno. En consecuencia, la deformación plástica se expresa

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Phi_1^c}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial \Phi_2^c}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \dot{\lambda}_3 \frac{\partial \Phi_1^r}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \dot{\lambda}_4 \frac{\partial \Phi_2^r}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (4.7.38)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}_1(1 + \sin \psi)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + (\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2)(\sin \psi - 1) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \dot{\lambda}_3 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \dot{\lambda}_4 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (4.7.39)$$

4.8. Estrategia para seleccionar los retornos

Ya descrito todos los retornos para el modelo modificado de MC, queda por elegir cuál de ellos es el apropiado para cumplir con las condiciones de Kuhn-Tucker dado cualquier estado tensional. Obsérvese que si al menos una sola superficie de fluencia está activa (es decir; si $\Delta\lambda^\alpha > 0$ para una sola $\alpha \in \{1, 2, 3, 4...m\}$,

1 Predicción Elástica. Paso $n+1$ en $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}$. Dado F_{n+1} , e_{n+1} , e_n^p , q_n y ξ_n evaluamos los estados prueba.

$$\begin{aligned} e_{n+1}^{p,tr} &:= \check{e}_n^p \\ e_{n+1}^{e,tr} &:= e_{n+1} - \check{e}_n^p \\ \tau_{n+1}^{tr} &:= 2Ge_{d,n+1}^{e,tr} + Ke_{v,n+1}^{e,tr} I \\ q_{n+1}^{tr} &:= q_n \\ \xi_{n+1}^{tr} &:= \xi_n \end{aligned}$$

2 Cálculo de las tensiones principales y direcciones principales. Descomposición espectral del tensor de tensiones τ^{tr} .

$$\tau_1^{tr} > \tau_2^{tr} > \tau_3^{tr} \text{ y } e_i \forall i = \{1, 2, 3\}$$

3 Verificación de la condición de fluencia plástica.

Si $\tau_1^{tr} - \tau_3^{tr} + (\tau_1^{tr} + \tau_3^{tr}) \sin \phi(\kappa^p) - 2c(\kappa^p) \cos \phi(\kappa^p) < 0$
entonces $(\bullet)_{n+1} = (\bullet)_{n+1}^{tr}$ y va a Salida.

4 . Aplicación del algoritmo de retorno.

a) Retorno hacia la superficie principal de Mohr-Coulomb.

b) Revisar validez del retorno. Si $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$ entonces el retorno es válido. Ir a Paso 5.

c) Retorno a los bordes izquierdo-derecho de la supercie de MC.

Si $T : \tau_{n+1}^{tr} > 0$

Aplicar retorno al borde derecho.

Sino

Aplicar retorno al borde izquierdo.

d) Revisar validez del retorno. Si $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$ entonces el retorno es válido. Ir Paso 5.

e) Retorno al ápice.

5 Compute el tensor de tensiones actualizado y el tensor de deformaciones elásticas.

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \sum_{i=1}^3 \tau_i e_i \otimes e_i \\ e_{n+1}^e &= \frac{s_{n+1}}{2G} + \frac{p_{n+1}}{3K} I \\ e_{n+1}^p &= e_{n+1} - e_{n+1}^e \end{aligned}$$

Cuadro 4.7.2: Algoritmo de retorno para el modelo a compresión de Mohr-Coulomb

siendo m el número de superficies que delimitan el espacio elástico), por consiguiente, la condición de $\Phi_{n+1}^{\alpha,tr} > 0$ implica que $\Delta \lambda_\alpha > 0$, en común acuerdo con las conclusiones obtenidas en la plasticidad de una sola superficie. No obstante, si varias superficies de fluencia están activas, la condición de $\Phi_{n+1}^{\alpha,tr} > 0$ no implica que

$\Delta\lambda^\alpha > 0$. De igual manera, es posible tener la condición de $\Phi_{n+1}^{\alpha, tr} > 0$ y al final, luego de aplicar los retornos correspondientes, tener $\Phi_{n+1}^\alpha < 0$ [352].

En consecuencia, el estado elástico de prueba no es suficiente para determinar las superficies activas \mathbb{J}_{act} , por lo que se requiere de un proceso iterativo adicional. Simo et al [112] propusieron un método de este estilo para determinar las superficies activas. Su procedimiento consiste básicamente seleccionar y descartar aquellas superficies de prueba posibles $\mathbb{J}_{act}^{tr} = \{\alpha \in [1, 2, 3, 4 \dots m]\} | \Phi_{n+1}^{\alpha, tr} > 0$ que se tomaron como superficies activas $\mathbb{J}_{act} \subseteq \mathbb{J}_{act}^{tr}$ hasta que finalmente en el ciclo iterativo k se logre la condición $\Delta\lambda^\alpha > 0 \forall \mathbb{J}_{act}^k$. Se recomienda ir a la referencia [352] para profundizar los detalles de la algoritmia. No obstante estos algoritmos no aparentan ser suficientemente generales, por lo que en determinadas ocasiones, sobre todo cuando un modelo constitutivo integra el fenómeno del ablandamiento, puede presentarse que $\mathbb{J}_{act} \not\subseteq \mathbb{J}_{act}^{tr}$.

Un procedimiento mucho más general y riguroso para la determinación de las superficies activas es intentar buscar todas las combinaciones posibles de superficies activas (o en su defecto, todo los posibles algoritmos de retorno), hasta que se encuentre la combinación que satisface todas las condiciones discretas de Kuhn-Tucker. Obviamente, el método será más caro cuanto más combinaciones de superficies se requieran. Peric y Souza[273] desarrollaron para el modelo de Tresca y MC un método secuencial y simple que mediante criterios puramente geométricos eligen cuál retorno en borde derecho e izquierdo es el más factible. Este método, detallado en la siguiente sección, es aplicado en esta tesis para poder integrar adecuadamente el modelo de daño plástico utilizando la superficie de MC modificado.

4.8.1. Selección del retorno en borde derecho o izquierdo en MC

La adecuada selección del retorno es crucial en los modelos de plasticidad de superficies múltiples, como es el caso del modelo modificado de MC. Una mala elección de ella conllevaría estados tensionales erróneos, que no sólo dificultarían la convergencia, si no que también, en sistemas de integración explícita, podrían traer inestabilidades numéricas. Observe que el estado tensional en los bordes de MC está dado por

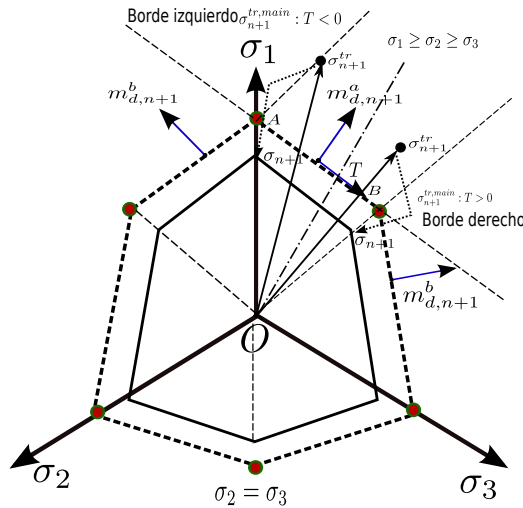


Figura 4.4: Selección de retornos en el modelo de MC.

$$\tau_i = \tau_j \text{ o } s_i = s_j \quad (4.8.1)$$

para $\{\tau_i, \tau_j\}$ o $\{s_i, s_j\}$ con $i \neq j$ siendo τ_i y s_i las tensión principal i y las tensiones principales desviadoras i en el espacio de tensiones de Kirchhoff respectivamente. De acuerdo con la convención $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$, $s_2 = s_3$ corresponde a aquellos puntos situados en el borde derecho y $s_1 = s_2$ corresponde al borde izquierdo. Ahora considere la parte desviadora cuando el flujo plástico tiene lugar en cualquiera del borde derecho o izquierdo. Nótese que en ambos casos, se requieren dos vectores de retorno:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{tr} - 2G(\Delta\lambda^a \mathbf{m}_d^a + \Delta\lambda^b \mathbf{m}_d^b) \quad (4.8.2)$$

siendo $\mathbf{m}_{d,n+1}^a$ y $\mathbf{m}_{d,n+1}^b$ la componente desviadora de los flujos \mathbf{m}_{n+1}^a y \mathbf{m}_{n+1}^b . La línea a puntos-trozos de la figura 4.4 es la proyección desviadora del plano paralelo a \mathbf{m}^a que contiene la línea hidrostática. Si $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr}$ se ubica a la derecha de este plano, note que un retorno hacia el borde izquierdo daría como resultado un valor negativo en el multiplicador $\Delta\lambda^b$, la cual viola la condición de Kuhn-Tucker $\Delta\lambda^a > 0$. Por lo tanto el retorno que garantiza que todos lo multiplicadores plásticos sean positivos es el derecho. De igual manera, si $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr}$ está situada en la parte izquierda, el retorno más factible es el del lado izquierdo. El procedimiento para seleccionar el borde de flujo apropiado es simple. Sea \mathbf{T} el tensor desviador ortogonal al tensor desviador \mathbf{m}_d^a apuntando a la derecha. Los valores propios de este tensor de flujo ortogonal \mathbf{T} son [273]:

$$\mathbf{T} = \{1 - \sin \psi, 2, 1 + \sin \psi\} \quad (4.8.3)$$

$$(4.8.4)$$

Por tanto, para seleccionar el borde de retorno más apropiado computamos primero el siguiente producto escalar:

$$S = \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{tr,main} : \mathbf{T} = (1 - \sin \psi) \tau_{1,n+1}^{tr} - 2\tau_{1,n+1}^{tr} + (1 - \sin \psi) \tau_{3,n+1}^{tr} \quad (4.8.5)$$

Si $S > 0$ se realiza el retorno al lado derecho, de lo contrario se realiza el lado izquierdo. Ya en mano toda esta información, el cuadro 4.8.1 se presenta continuación la algoritmia completa retorno para el modelo de MCM.

4.9. Conclusión y discusión

En este capítulo se ha introducido el modelo constitutivo que se empleará para caracterizar el comportamiento de los materiales quasi-frágiles. En principio, este modelo fue elaborado en pequeñas deformaciones y aquí extendemos el mismo para tratar problemas en grandes deformaciones, considerando como hipótesis base que un material quasi-frágil bajo cargas monotónicas crecientes está sujeto a procesos de deformaciones elásticas pequeñas y grandes deformaciones plásticas. La idea clave es que este modelo contiene los ingredientes fundamentales para llevar a cabo la transición continuo-discreto además de describir el proceso de deterioro del material quasi-frágil en el inicio del proceso del reblandecimiento. La variable fundamental de este modelo es la variable de daño plástico κ^p que nos proporciona mediante un criterio energético una descripción objetiva del deterioro de un punto del material. Esta variable define el comienzo de la inserción de la fractura discreta dentro del medio continuo, razón por la cual se ha dedicado un capítulo completo a este modelo.

Aunque en principio es posible emplear un modelo de plasticidad de Drucker-Prager o cualquier otra superficie de fluencia que pueda describir satisfactoriamente el comportamiento quasi-frágil se ha elegido el modelo de MC y Rankine como una primera aproximación para estudiar comportamiento del material quasi-frágil. Se ha detallado los aspectos relevantes de como realizar el proceso de integración implícita empelando el algoritmo de retorno en el espacio de tensiones principales, el cual es simple y robusto. Su extensión a otros modelos es completamente análoga.

Por último, con la introducción de una nueva formulación que en el siguiente capítulo se detallará, verificaremos mediante los ejemplos numéricos la aplicabilidad del modelo de daño plástico en los materiales quasi-frágiles y los procesos de localización de deformaciones.

1 . Hacer paso 1 y 2 del cuadro 4.7.2.

2 . Verificación de plasticidad.

Si $\Phi_1^c(\tau_{n+1}^{tr}, q_{n+1}^{tr}) < 0$ y $\Phi_1^r(\tau_{n+1}^{tr}, q_{n+1}^{tr}) < 0$ entonces:
 $(\bullet)_{n+1} = (\bullet)_{n+1}^{tr}$ y va a Salida.

3 . Retorno hacia la superficie principal de Mohr-Coulomb.

Si $\Phi_1^c(\tau_{n+1}^{tr}, q_{n+1}^{tr}) > 0$ entonces haga el paso 4 de cuadro 4.7.2
 Sino vaya al paso 5.

4 . Verificación de consistencia plástica a tracción después de aplicar el retorno hacia Mohr-Coulomb.

Si $\tau_{i,n+1} \leq f_t \forall i \in \{1, 2, 3\}$ entonces vaya al paso 12.
 Sino vaya al paso 7.

5 . Retorno hacia la superficie de Rankine.

Si sólo $\Phi_1^r > 0$ entonces:
 Aplique retorno con un vector en plano σ_1 .
 Sino Si sólo $\Phi_1^r > 0$ y $\Phi_2^r > 0$
 Aplique retorno con dos vectores en planos σ_1 y σ_2 .
 Sino Si $\Phi_1^r > 0$, $\Phi_2^r > 0 > \Phi_3^r > 0$
 Aplique retorno con tres vectores hacia el ápice de Rankine.

6 . Verificación de consistencia plástica.

Si $\Delta\lambda_\alpha > 0$ $\Phi^\alpha < \epsilon$ y $\forall \alpha \in \{c, r\}$ y $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$ entonces:
 El retorno es válido. Vaya a 12.

7 . Retorno hacia la intersección Plano σ_1 Rankine (Φ_1^r) y Φ_1 Mohr-Coulomb.

8 . Verificación de consistencia plástica en la intersección Plano σ_1 Rankine y Φ_1 Mohr-Coulomb.

Si $\Delta\lambda_\alpha > 0$ $\Phi^\alpha < \epsilon$ y $\forall \alpha \in \{c, r\}$ y $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$ entonces:
 El retorno es válido. Vaya a 12.

9 . Retorno hacia los bordes en la intersección de MC y Rankine.

Si $T : \tau_{n+1}^{tr} > 0$ entonces:
 Aplique retorno en borde derecho con Φ_1^c y Φ_6^c de MC y plano σ_1 Rankine.
 Sino
 Aplique retorno en borde izquierdo con Φ_1^c y Φ_2^c de MC y plano σ_1 y σ_2 .

10 . Verificación de consistencia plástica del retorno hacia las aristas.

Si $\Delta\lambda_\alpha > 0$ $\Phi^\alpha < \epsilon$ y $\forall \alpha \in \{c, r\}$ y $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$ entonces el retorno es válido.

11 . Retorno al ápice de MC.

12 . Compute el tensor de tensiones actualizado y el tensor de deformaciones elásticas.

$$\tau_{n+1} = \sum_{i=1}^3 \tau_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{n+1}^e = \frac{s_{n+1}}{2G} + \frac{p_{n+1}}{3K} \mathbf{I}, \mathbf{e}_{n+1}^p = \mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^e \quad (4.8.6)$$

13 . Salida

Cuadro 4.8.1: Algoritmo de retorno en el espacio de tensiones principales para el modelo constitutivo de daño plástico aplicado a la superficie de fluencia de MC modificado.

Modelado discreto de la fractura. Ingredientes fundamentales

El científico encuentra su recompensa en lo que Henri Poincaré llama el placer de la comprensión, y no en las posibilidades de aplicación que cualquier descubrimiento pueda conllevar.

Albert Einstein

5.1. Introducción

Este capítulo está destinado a describir lo que a nuestro entender son los ingredientes fundamentales para el modelado de la fractura discreta en los materiales quasi-frágiles. Constituye el corazón de la tesis, pues los algoritmos y la formulación desarrollada permite la inserción de la fractura discreta de una forma más objetiva. Tal y como se ha mencionado en el capítulo anterior, el modelo de daño plástico describe la transición continuo-discreto de la fractura en el material quasi-frágil. Contiene toda la información requerida para introducir la fractura discreta dentro de la malla de elementos finitos.

El enfoque de modelo discreto de fractura fue introducido por primera vez por Ngo y Scordelis[274] para el análisis de vigas de concreto armado simplemente apoyadas. En su modelo introducían la fractura discreta mediante una duplicación nodal en rutas predefinidas de fractura pero sin abordar el problema de la propagación de la misma. Posteriormente este modelo fue mejorado por Ingraffea et al [191, 192, 341] introduciendo de una manera automática la redefinición de las conectividades de los elementos finitos en el contorno de la fractura. Dado que resolvían una ecuación de equilibrio, el ancho de banda de la matriz de rigidez quedaba destruida aumentándose el coste computacional. Por otra parte, en el modelo de Fractura Ficticia introducido por Hillerborg[175], las fisuras individuales se modelaban usando puntos nodales independientes que inicialmente ocupaban la misma posición espacial. La fractura sólo se propagaba a través de una dirección predefinida en el contorno del elemento finito. Sin embargo, la respuesta era altamente dependiente de la malla de elementos finitos empleada.

Basado en la idea de Ngo, Scordelis e Ingraffea, en este trabajo se ha desarrollado un procedimiento de refinamiento local adaptativo en 2D y 3D para elementos triangulares y tetraedros respectivamente, al que hemos llamado *Algoritmo de Refinamiento Local Adaptativo* (Adaptative Local Refinement Algorithm ALRA). Este algoritmo permite la creación de nuevos nodos, la redefinición de las conectividades y la inserción de nuevos elementos en la malla de elementos finitos acorde con las conectividades creadas de una manera

automática. Es una herramienta que se ha diseñado para realizar la inserción de la fractura discreta y así simular la rotura en el sólido acorde con una determinada dirección de la fractura. Para un caso de simulación bidimensional de fractura discreta, la dirección de fractura se define mediante una línea. En 3D este proceso es mucho más complejo ya que la dirección de fractura se define mediante un plano de rotura. Asimismo, con este algoritmo de refinamiento local adaptativo es posible mejorar el campo tensional dentro de un sector de la malla añadiendo más elementos en las zonas donde se presentan mayores gradientes de tensiones y además reducir la dependencia de la malla en los procesos de localización de deformaciones.

La inserción de la fractura discreta se pudiera realizar a nivel de punto de Gauss del elemento, una vez que el mismo haya alcanzado un valor crítico de daño o un nivel de daño total¹. Sin embargo, la discretización dada por elementos finitos hace que sea mucho más sencillo si la inserción la fractura discreta se asocia al daño a un determinado nodo. Muchos investigadores motivados por esta facilidad *geométrica* [99, 223, 222, 309, 312] introducen un factor de daño nodal, basado en un ponderado indicador de daño computado a partir de los elementos adyacentes a un determinado nodo.

En este trabajo seguimos esta misma línea introduciendo la fractura en un nodo de la malla de elementos finitos y empleando adecuadamente las dos variantes de inserción de la fractura: a) *Inserción de la fractura a lo largo del contorno del elemento* y b) *Inserción de la fractura acorde con la dirección de la fractura computada*. Aquí sugerimos una más: c) *Una combinación adecuada de ambas variantes*. No obstante, nuestro indicador de daño está dado por la misma variable de daño plástico κ^p definido en el capítulo anterior, explícitamente computado en el nodo y sin necesidad de emplear una ponderación. Esto se lleva a cabo mediante una nueva formulación mixta explícita a la que hemos denominado *Método Estabilizado De Elementos Finitos Mixtos Explícitos* (Stabilized Mixed Explicit Finite Element Method) o simplemente MEX-FEM, por sus siglas en inglés, siendo la contribución original más importante de este trabajo. Este método, sumamente sencillo, pero con una base matemática sólida, viene no sólo a mejorar enormemente el esquema tradicional de integración explícita, sino que además, como mostraremos más adelante, los resultados de los procesos de localización de deformaciones son virtualmente independientes de la malla de elementos finitos usada y es capaz de abordar y dar resultados satisfactorios a problemas quasi-incompresibles. El mismo puede ser aplicado, sin pérdida de generalidad, a modelos de plasticidad y a modelos de daño en pequeña y grandes deformaciones.

Dado la importancia del contenido de este capítulo, el mismo se ha estructurado convenientemente en tres partes fundamentales las cuales serán ampliamente detallados en los apartados siguientes:

1. Algoritmo de Refinamiento Local Adaptativo ALRA.
2. Inserción geométrica de la fractura discreta.
3. Formulación mixta en esquema explícito MEX-FEM:
 - a) Pequeñas deformaciones.
 - b) Grandes deformaciones.

¹Para el caso del modelo de daño plástico, el nivel de daño total es equivalente a decir que $\kappa^p = 1$.

5.2. Algoritmo de Refinamiento Local Adaptativo (ARLA)

5.2.1. Introducción

Esta sección tiene como objetivo describir el Algoritmo de Refinamiento Local Adaptativo (ARLA), diseñado no sólo para permitir un refinado conforme de elementos simpliciales (elementos triangulares o tetraedros) en la malla de elementos finitos, sino también para realizar la reconectividad necesaria cuando se inserta explícitamente una fractura discreta dentro de la malla. Nuestro algoritmo define todas las formas posibles en las que un elemento triangular o un tetraedro puede dividirse. Se basa en que la reconectividad de los elementos finitos puede mapearse en una matriz *sparse*².

La importancia de refinar una malla de elementos finitos con el fin de mejorar la solución obtenida es bastante conocido en la mecánica computacional. El uso de este tipo de algoritmos resultó ser muy atractiva para incorporarla dentro de códigos de elementos finitos y se aplica extensivamente en diversas áreas de ingeniería, sobre todo en la mecánica de sólidos y la mecánica de fluidos. A diferencia de un algoritmo de remallado adaptable³, que además de ser computacionalmente costoso e introducir dificultades a la hora de transferir (interpolar) las variables entre dos mallas distintas, el algoritmo de refinamiento es más simple. La desventaja asociada a un algoritmo de refinamiento es que la calidad de la malla disminuye siempre y cuando no se tenga un adecuado control del refinado.

En la literatura se encuentran una gran diversidad de algoritmos de refinamiento que describen múltiples formas para dividir elementos simpliciales. Muchas de estas técnicas se basan en algún tipo de subdivisión por lado; son muy efectivas y relativamente simples cuando dichas técnicas son implementadas de manera secuencial. Sin embargo, no es tan obvio emigrar un algoritmo secuencial de este tipo a un entorno paralelo de programación.

El primer trabajo registrado que utiliza un algoritmo de refinamiento local adaptativo fue realizado por R. Babuscka et al. dentro del marco del proyecto FEARS [12]. Desde entonces, los algoritmos de refinamientos ganaron popularidad dentro del método de los elementos finitos empleándose en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales de tipo elípticas[16], en visualización y optimización de volúmenes[153], problemas de magnetismo[161, 174, 206] y generación óptimas de mallas mediante una distribución equitativa de un valor estimado del error[151, 195].

Entre las estrategias que comúnmente se emplean para realizar un refinamiento local adaptable se encuentran el refinamiento uniforme o refinamiento regular, la bisección [12, 100, 161, 174, 215, 240, 405] y refinamiento basados en algoritmos de generación de mallas como Delaunay[272]. El algoritmo de refinamiento regular consiste en bisecar simultáneamente todos los lados de aquellos triángulos y tetraedros que han sido seleccionados para ser refinados produciendo a partir de ellos, 4 triángulos hijos más pequeños u 8 nuevos elementos tetraédricos. En la figura 5.1 se muestra regulares y sucesivos refinamientos no conformes realizados en un elemento finito triangular y un tetraedro. Esta algoritmia es la más sencilla de todas, sin embargo, al no generar localmente elementos conformes, requiere de un proceso numérico adicional para conectar aquellos nodos *colgantes* si se desea cuidar la conformidad de la malla. Por otro lado, en el refinado por bisección, ilustrado en la figura 5.2 para un tetraedro, sólo uno de los bordes del triángulo o del tetraedro se divide en dos partes iguales, produciendo dos nuevos triángulos o tetraedros. La principal ventaja del re-

²Este tipo de matrices también se le conoce como matrices dispersas. Por tanto usaremos indistintamente estos dos términos a lo largo del capítulo

³Conocido en inglés como Adaptive Remeshing Methods.

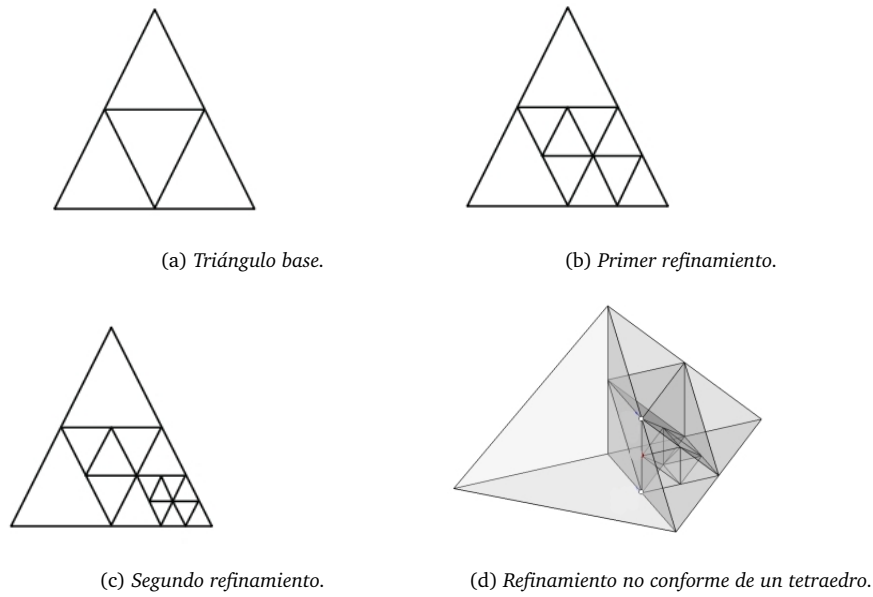


Figura 5.1: Refinamientos sucesivos no conformes.

finamiento de bisección es que produce automáticamente mallas de elementos conformes. El inconveniente radica en que cuando no se aplica un buen criterio para seleccionar las aristas, se pudiera obtener, después de refinamientos sucesivos, una mala calidad de la malla. Se han propuesto diferentes metodologías para la

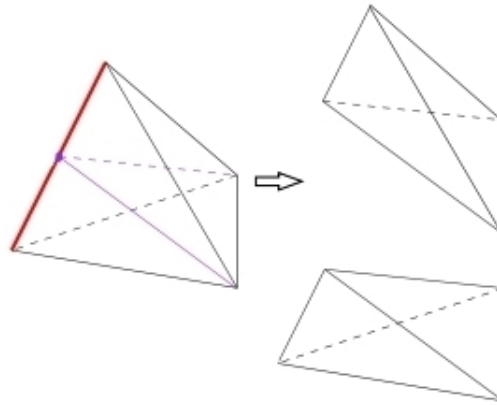


Figura 5.2: Refinamiento por bisección.

selección de las aristas pudiéndose clasificar en dos categorías: a) *El enfoque de refinamiento por la arista más larga*⁴ [179] y b) *El enfoque de refinamiento alrededor de un vértice*⁵ [347]. En el algoritmo de refinamiento por arista más larga, propuesto por Rivara et al. [328], la arista más larga del triángulo o del tetraedro se biseca. La terminación finita de este procedimiento de refinado es evidente porque cuando se atraviesa los elementos correspondientes se finaliza con una malla conforme. Los algoritmos de refinamiento basados en la bisección de triángulos por la arista más larga garantizan la conservación de la calidad de la triangulación de entrada. Esto es debido a las propiedades de la bisección. La figura 5.3 se observa un proceso de trian-

⁴Longest edge approach.

⁵Newest vertex approach.

gulaci3n usando el criterio de la arista m1s larga. N3tese como al final del refinado (figura 5.3d) se puede lograr una relaci3n de aspecto aceptable en los elementos que conforman la malla. El primer algoritmo de

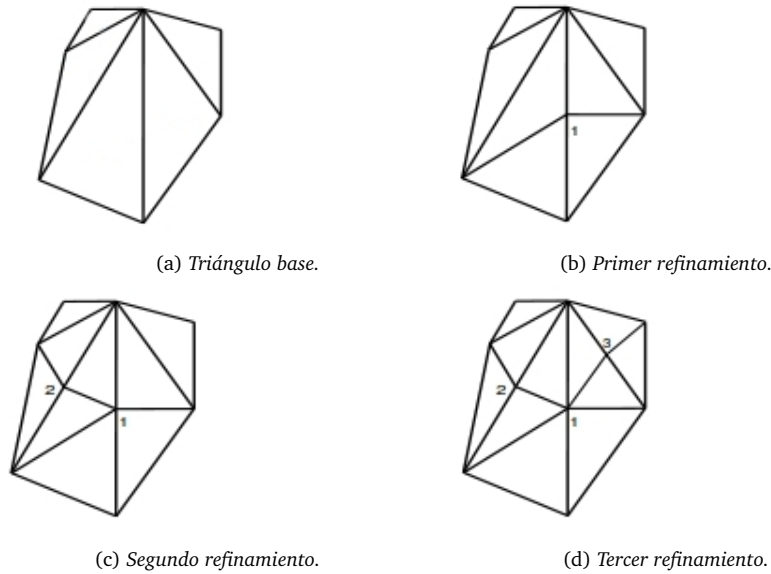


Figura 5.3: Refinamiento por la arista m1s larga.

refinamiento por v3rtices usando elementos triangulares fue propuesto por Sewell[347] y m1s tarde generalizado por Bansch[10] para problemas tridimensionales. Consiste en dividir los tri1ngulos que est1n alrededor de un 1nico v3rtice de referencia P , como se muestra en la figura 5.4. Trabajos m1s recientes sobre esta algoritmia se describen en los documentos de Kossaczky[224] y Anwei Liu y Barry Joe[227]. El concepto de refinamiento por v3rtices es muy simple en dos dimensiones: una vez que se determinan las aristas a refinar en la malla inicial de tri1ngulos, la arista refinada del tri1ngulo reci3n generado es la arista opuesta a su nuevo v3rtice. Desafortunadamente, la generalizaci3n a tres dimensiones no es trivial y los algoritmos propuestos por varios autores son en esencia equivalentes pero empleando interpretaciones distintas. Se ha demostrado te3ricamente que los tetraedros generados por este tipo de algoritmo tienen un n1mero finito de casos, lo que garantiza la no degeneraci3n de tetraedros producidos por bisecciones repetidas. Existen una gran diversidad

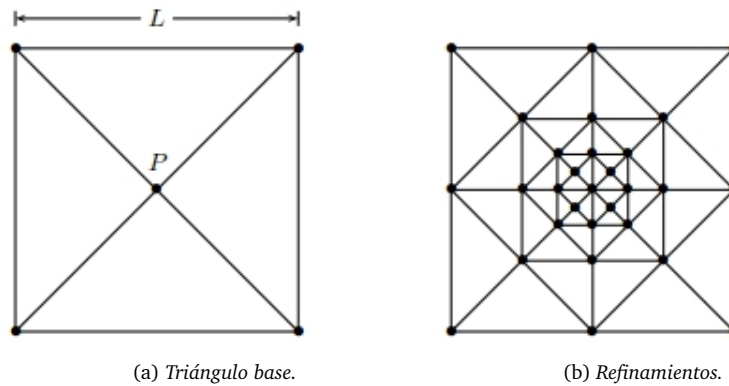


Figura 5.4: Refinamiento por v3rtices.

de trabajos reportados en la literatura sobre algoritmos paralelizados de refinamientos de mallas triangulares

y tetraédricas[100, 179, 215, 240] y algunos de ellos utilizan esquemas de bisección[405]. Aunque en principio el algoritmo de refinamiento local adaptativo ALRA se codificó en secuencial y fue enfocado para tratar problemas de la mecánica de sólidos y fractura, se migró con facilidad a una versión en paralelo empleando la Interfaz de Paso de Mensajes MPI y seguidamente aplicado a problemas de fluidos incompresibles. Los detalles de esta implementación están reportados en el trabajo de R. Rossi et al. [331]. Existen también reportados en la literatura otras estrategias de refinamiento que se basan en estructuras de datos[80] y algoritmos de refinamientos usando algún criterio de subdivisión de Delaunay[272].

El algoritmo ALRA se caracteriza por su simplicidad ya que con todos los patrones de división definidos se pueden realizar los refinamientos pertinentes garantizando siempre la conformidad de la malla al final del proceso de refinado. Para llevar a cabo dicho proceso, sólo se requiere la selección de los elementos a refinar. De ahí deriva la facilidad con la que se puede introducir algún criterio de refinamiento y a la vez proporcionar un algoritmo que puede ser implementado con facilidad, aprovechando las estructuras de datos de álgebra lineal existentes. Nuestra técnica supone la disponibilidad de librerías de matrices *sparse* preferiblemente aquellas preparadas para el montaje de la matriz global de rigidez⁶. Nuestro algoritmo de refinamiento biseca en la mitad de los bordes de los elementos. Por otra parte, nuestro objetivo también es dividir el elemento por una dirección de fractura dada, lo que implica que el refinado no necesariamente se realiza en la mitad de la arista (como se hace un remallado uniforme). No obstante, esto no es un inconveniente, pues los patrones creados para el refinamiento son independientes de la posición nodal. El único problema radica en conservar la calidad de la malla ya que insertar una fractura discreta en una dirección determinada pudiera producir elementos con muy mala relación de aspecto el cual podría provocar problemas numéricos. En esquemas explícitos hay que eludir este tipo de situaciones, primero porque se evita que el esquema explícito pierda estabilidad, y segundo lugar, evitar pasos de tiempos pequeños. Por eso es razonable pensar que la inserción de la fractura no está sólo condicionada por su dirección si no también por la algoritmia explícita empleada. En este trabajo creemos razonable que la inserción de la fractura discreta ha de efectuarse empleando un criterio de relación de aspecto, pues si la fractura pasa cerca de los bordes de los elementos, es recomendable (e incluso la mejor opción) realizar la fractura por caras mediante una simple duplicación nodal. En las secciones siguientes se abordará nuevamente este tema. A continuación se describe en detalle el proceso numérico de refinamiento utilizado por ALRA.

5.2.2. Algoritmo de división global

Esta sección describe los procesos realizados por el algoritmo de refinamiento propuesto. El objetivo es obtener una malla conforme de elementos finitos que son seleccionados de manera arbitraria o mediante algún criterio definido y que bien podrían contener la totalidad de los elementos. Nuestro enfoque se basa en la división de aquellos elementos que han sido identificados como candidatos para el refinamiento con la introducción de nuevos nodos en los puntos medios de sus bordes, dividiendo cada triángulo en cuatro triángulos más pequeños o cada tetraedro en ocho partes. Los elementos adyacentes se dividen en consecuencia para preservar una conectividad conforme.

El algoritmo asume que cada nodo de la malla de elementos finitos posee un identificador global único o *GID* (Global Identifier). Cada borde del elemento, por consiguiente, está unívocamente identificado por los *GIDs* de sus nodos. De esta manera, se asocia biunívocamente cada borde $GID(I, J)$ con la posición (I, J) de la matriz *sparse* correspondiente. Hay que señalar que esta matriz es simétrica, por lo que sólo serán

⁶En nuestro caso se ha empleado las utilidades de Boost Libraries (<http://www.boost.org/>).

asignadas las componentes ($J > I$), o sea, las entradas de la parte superior de dicha matriz.

En este trabajo, este algoritmo se ha articulado en seis pasos ya que entendemos que la única forma viable de presentar el mismo es proporcionando un pseudo-código comentado. Por lo tanto, describiremos a continuación cada uno de los pasos como sigue:

1. En primer lugar se construye la matriz *sparse* A la cual contiene las entradas no nulas de los pares ordenados (I, J) que representan cada una de las aristas $GIDs(I, J)$ que conforman el modelo. Tal matriz se construye con facilidad si se conocen los nodos vecinos N_v de un nodo N , es decir; aquellos nodos con la que el nodo N comparte una conectividad en común. Por lo tanto, se asigna un valor no nulo (en este trabajo se ha adoptado como convención el valor de -1) a la entradas (I, J) de la matriz A de los $GIDs$ dados por el nodo N y sus nodos vecinos N_v respectivamente. A continuación se presenta el pseudo-código.

```
loop on nodes in model part
  Nv = Get neighborg nodes list
  loop in neighborg nodes list Nv
    (I,J) = GIDs of the node N and nodes in Nv
    if J > I
      allocate A(I,J) = - 1
```

2. El segundo paso consiste en identificar y seleccionar mediante algún criterio de refinamiento los elementos que serán refinados. El algoritmo de refinamiento propuesto es completamente independiente del criterio empleado para la selección de los elementos. La decisión de cuáles elementos se refinarán se deja al usuario, lo que permite la posibilidad de emplear cualquier tipo de criterio de refinamiento. Un criterio de refinamiento que pudiera emplearse sería por ejemplo, un criterio basado en una estimación del error o en la selección de la arista más larga.

En nuestra propuesta, los elementos seleccionados para refinarse se dividen por todos sus bordes, lo que resulta en cuatro triángulos u ocho tetraedros por cada elemento original refinado. Esta división conserva la calidad de los elementos refinados, no obstante, los elementos que comparten uno o más bordes con los elementos seleccionados para el refinamiento se dividen en consecuencia para preservar la conformidad de la malla. Sin embargo, en este caso no hay ninguna garantía de la calidad de la malla final. Por supuesto, se pudiera utilizar diferentes estrategias de refinamiento en este punto, sin que implique cambiar el algoritmo.

Para identificar los bordes que serán refinados se ha adoptado la convención de introducir -2 a la entrada I, J de la matriz *sparse* A . Con la ayuda de una variable auxiliar (un contador), se computa la totalidad de los nuevos nodos que serán creados e insertados en la mitad del borde con $GIDs(I, J)$.

```
counter = 0
loop on local elements
  if user requests splitting
```

```

loop on edges of the element
  (I,J) = GID of the edges of the element
  if J > I
    A(I,J) = -2
    counter = counter + 1

```

3. En el tercer paso se conocen los bordes que serán refinados y el número total de nodos serán creados. Por tanto, sabiendo el número total de nodos existentes en la malla de elementos finitos se procede a crear una lista que contenga el identificador global *GID* de los nuevos nodos de modo que éstos se enumeren consecutivamente, preferiblemente para evitar saltos de enumeración y garantizar que ningún identificador global se repita.
-

```

new_id = Get the last GID of container nodes.
for I in rows of Sparse Matrix A
  for J in rows of Sparse Matrix A
    if(IdMatrix_local(I,J) == -2)
      A(I,J) = new_id
      new_id = new_id + 1

```

4. En este paso tenemos disponible toda la información necesaria para llevar a cabo la creación y la inserción de los nuevos nodos en el punto medio de los bordes *GIDs*(*I,J*) de los elementos que serán refinados. Por lo tanto, los mismos se crearán con el identificador global que se ha definido en la entrada (*I,J*) de la matriz *sparse* A. Seguidamente se procede a proyectar los datos nodales⁷ del borde *GID*(*I,J*) correspondiente. Con las funciones de forma $\mathbf{N} = [N_1; N_2; ..N_n]$ que se han definido dentro del elemento, dicha proyección es bastante simple, ya que sólo existen dos funciones de forma no nulas. Dicha operación es directa, es decir; para el caso general, sea (π_I, π_J) los datos nodales correspondiente a los nodos con (*I,J*), los datos nodales π_{IJ} del nuevo nodo se calcularán con las funciones de forma $(N_I; N_J)$ del elemento⁸:

$$\pi_{IJ} = N_I \pi_I + N_J \pi_J \quad (5.2.1)$$

En resumen, el pseudo-código correspondiente para este paso es como sigue:

```

loop in I rows and J column in Sparse Matrix A for all (J>I)
  if(A(I,J)> 0)
    generate new node in the middle of edge (I,J)
    interpolate from I and J

```

⁷Se entenderá como dato nodal cualquier variable calculada en el nodo de un elemento. Entre ellas podemos mencionar el desplazamiento, velocidades, reacciones, etc.

⁸Tome en cuenta que como el nodo se inserta en la mitad de la arista *GID*(*I,J*), las funciones de forma $(N_I; N_J)$ toman como valor (0.5, 0.5) respectivamente.

-
5. Este paso es el corazón del la algoritmia. Se lleva a cabo la creación de los nuevos elementos usando los nuevos nodos que han sido generados en el paso anterior. Para llevar a cabo esta operación, realizamos un bucle sobre los elementos que se refinarán y se verifica por cada arista la existencia de un nuevo nodo. Si el nuevo nodo está asociado a cualquiera de los bordes de elemento, se procede entonces a refinar dicho elemento. El refinamiento se hará acorde con la cantidad de aristas que se han dividido en el elemento, pues éstas definen el patrón de refinamiento que será aplicado. En la siguiente sección abordaremos el tema de división de elementos simpliciales. Una vez realizado tal operación, se transfiere adecuadamente los datos del elemento a refinar a los nuevos elementos generados⁹.
-

```
loop on elements to be refined
  if any elemental edge is splitted
    gather newly created nodes
    split element
    interpolate elemental data
```

6. Por último, para tener un orden y evitar saltos de numeración en los elementos, los mismos se renumeran nuevamente en orden ascendente. El algoritmo propuesto tiene la ventaja de ser independiente de cualquier estructura de datos pudiéndose introducir con relativa facilidad dentro de códigos computacionales.

Finalmente, el problema abierto pendiente es la optimización de la calidad de las mallas refinadas y el desbalance de fuerza que localmente se obtiene al final del proceso de refinado. No obstante, no es objetivo de la tesis discutir estas cuestiones, dejándose este problema para futuras líneas de investigación. Una posibilidad para explorarse en el primer caso podría ser el uso de las ideas tomadas del algoritmo de *Longest edges division*.

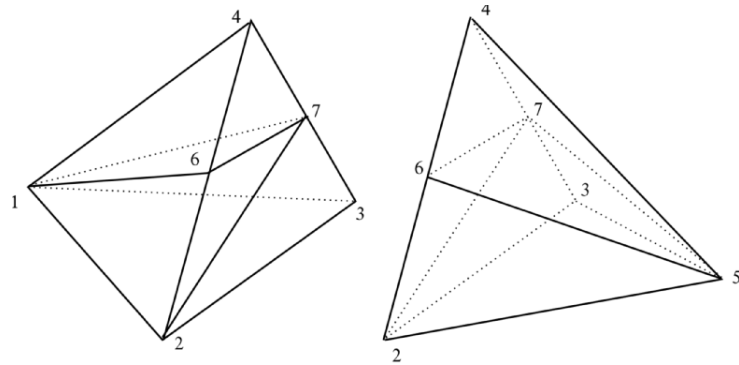
5.2.3. División de elementos simpliciales

Como se había comentado en la introducción de esta sección, la aplicación propuesta para dividir triángulos y tetraedros se basa en la disponibilidad de una librería de álgebra lineal y de un procedimiento de división eficiente. El objetivo este apartado es describir nuestra implementación del proceso de división elemental y discutir cómo elegir el modo de división a fin de garantizar una malla conforme al final del proceso de refinamiento. La idea básica es que la información disponible durante el quinto paso del algoritmo de refinamiento tiene que ser suficiente para definir unívocamente la división de los elementos bajo la restricción adicional de que todas las caras de un elemento dado debe coincidir con las caras del elemento vecino, es decir, el refinamiento ha de ser conforme.

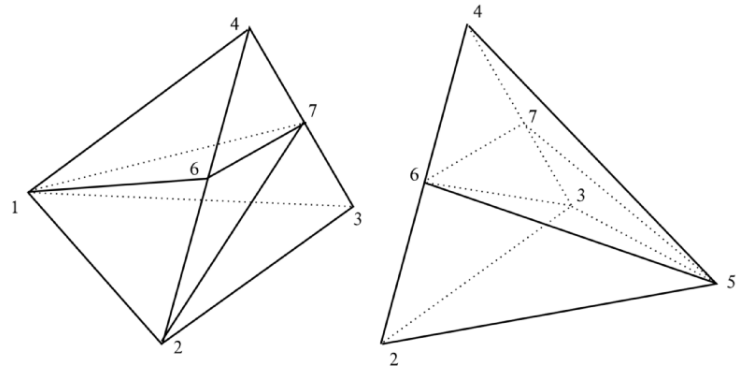
Esto se entiende mejor con un ejemplo práctico: considere los dos tetraedros que se muestran en la figura 5.5. La figura muestra dos tetraedros con *GID* (1, 2, 3, 4) y (2, 5, 3, 4) respectivamente, los cuales serán

⁹En otras palabras, los elementos nuevos son triángulos o tetraedros lineales, los mismos heredan toda la información almacenada en el punto de Gauss del elemento padre. Cuando se emplee la formulación mixta que abordaremos más adelante, la información se transfiere exactamente como se describe en el paso (4), ya que los puntos de Gauss se localizan en la misma posición nodal.

divididos por la adición de los nuevos nodos 6 y 7. En la parte superior (figura 5.5a), se observa que se ha logrado dividir correctamente los elementos ya que el borde (2, 7) existe en ambos tetraedros. Por otro lado, en la parte inferior (5.5b), cuando se añaden los nodos 6 y 7, el tetraedro ubicado en la parte derecha se divide por el borde (3, 6) mientras que su vecino lo hace por borde (2, 7). Como consecuencia, la división realizada es errónea ya que la cara compartida entre los dos tetraedros (2, 3, 4) se biseca de diferente manera, lo que lleva a una malla no conforme. Una manera de resolver este problema sería compartir la información entre los elementos comparten una cara en común indicando cómo y de qué manera se han de refinar.



(a) División correcta del tetraedro.



(b) División errónea del tetraedro.

Figura 5.5: División de tetraedros.

En esta tesis evitamos tal comunicación seleccionando un patrón de división basado exclusivamente en los datos locales disponibles. La idea central de nuestro enfoque es que esta información se proporciona declarando cómo un triángulo o un tetraedro han de dividirse. Para llevar a cabo este proceso se indica a los bordes que no se dividirán la dirección hacia al cual los bordes del correspondiente elemento refinado se colapsará. Asumiendo que un borde se identifica con los *GIDs* I y J y sean $LID(I)$ y $LID(J)$ el identificador local correspondiente a los vértices del elemento, se procede a realizar entonces por cada borde del elemento una operación del tipo:

```

if(edge is not splitted)
  if( $GID(I) < GID(J)$  )
    collapse_towards =  $LID(I)$ 
  else
    collapse_towards =  $LID(J)$ 

```

Índice de borde	Borde Id	LID1	LID2	Posibles Refinamientos		
0	4	0	1	0	1	4
1	5	0	2	0	2	5
2	6	0	3	0	3	6
3	7	1	2	1	2	7
4	8	1	3	1	3	8
5	9	2	3	2	3	9

Cuadro 5.1: Definición de los bordes de un tetraedro y los posibles resultados de refinamiento.

```

else
    collapse_towards = edge_id

```

donde la variable “collapse towards” (asignada por cada arista del elemento) nos dirá la dirección hacia el cual deberíamos mover el nodo central del borde a fin de orientar correctamente el colapso. Para entender mejor el concepto, obsérvese la figura 5.6. Dada la cara abc , asuma que los bordes (b, c) y (c, a) se dividen. Si también el borde (a, b) también se refina, el triángulo se divide en 4 más pequeños. Por otro lado, si los bordes (b, c) y (c, a) se refinan, surgen entonces dos posibles formas de refinamiento que corresponden a situaciones de refinamiento al que hemos identificado como colapso del borde (a, b) hacia a y hacia b respectivamente.

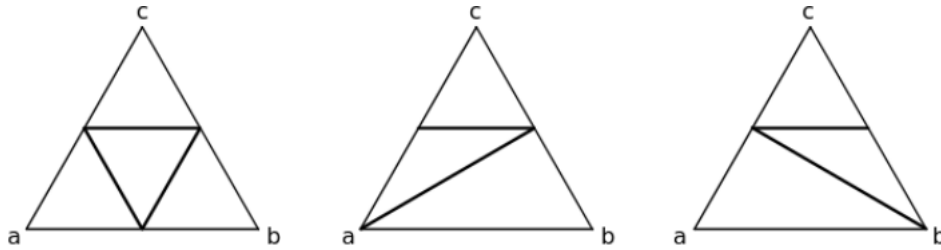


Figura 5.6: Colapso de a arista de un triángulo.

En la práctica, el patrón general para la división de los triángulos y tetraedros se identifica escribiendo en un vector auxiliar de tamaño 3 y 6 respectivamente (número de bordes del elemento) una etiqueta, que prescribe para cada borde el nodo que se debe utilizar para la división. Un número menor que 4, indica el *LID* del nodo hacia el cual los nuevos bordes han de orientarse. Por otra parte, un número superior a 4 indicará el *LID* del nuevo nodo y que corresponde a un único “edge id”.

La tabla 5.1 muestra las diferentes posibilidades por cada cada borde, junto con el numeración local que utilizamos para identificar los bordes. Por ejemplo, el primer borde, con índice 0, se identifica mediante los *ids* locales (0, 1), el segundo con (0, 2) y así sucesivamente. Por tanto asociaremos para el primer borde cualquier valor de 0 o 1 (los *LIDs* de sus nodos) cuando el borde no sea dividido o su “edge id” (identificador de borde) en el caso de se requiera la división.

Para el caso de la división de tetraedros, ya que existen por bordes tres posibles opciones de refinamiento y un total de seis bordes, el número total de combinaciones posibles es de $3^6 = 729$ las cuales deben ser consideradas como patrones potenciales de división. Todas las combinaciones se han implementado en una subrutina auxiliar creada para tal fin. Así pues, el proceso de selección en general se verá en pseudocódigo

como sigue:

```
#define an array with the LIDs associated to each edge
edge_id[0] = 4;
edge_id[1] = 5;
edge_id[2] = 6;
edge_id[3] = 7;
edge_id[4] = 8;
edge_id[5] = 9;

edge_counter = 0
for LID1=0 to 2:
  for LID2=1 to 3 and LID2 not equal to LID1:
    obtain GID1, GID2 associated to the nodes with LID1, LID2
    if(edge is not splitted)
      if(GID1 < GID2)
        edge_id[edge_counter] = LID1
      else
        edge_id[edge_counter] = LID2
    else
      do nothing (already set before the loop)
  edge_counter = edge_counter + 1
```

Aplicando este algoritmo a los dos tetraedros en la figura 5.5a se puede construir las tablas 5.2 y 5.3. El resultado final será asociar al tetraedro de la parte izquierda la numeración 000189 y al derecho 006249. Esta información es suficiente para seleccionar de manera unívoca y correcta un patrón de división conforme a los dos tetraedros de interés. Por otro lado, si tenemos en cuenta la división no conforme que aparece en la esquina inferior derecha de la figura 5.5b y construimos su lista de aristas, se verifica inmediatamente que se ha seleccionado un modo distinto de división. La tabla 5.4 muestra los índices obtenidos para este caso y destaca el punto en el que la elección es diferente de la estrategia que proponemos. Nótese que como se esperaba, el patrón de división final es 026249 y no coincide con la convención propuesta.

La originalidad de este procedimiento, es que el refinamiento se realiza a partir de los datos locales obtenidos. Una vez identificado el patrón de división, el algoritmo nos proporciona las conectividades de los nuevos elementos, información suficiente para proceder a la creación e inserción de los nuevos elementos en la malla de los elementos finitos.

Borde id	LID1	LID2	new LID	GID1	GID2	Nuevo GID	Razón de Selección
4	0	1	0	1	2	1	borde no divido y $GID1 < GID2$
5	0	2	0	1	3	1	borde no divido y $GID1 < GID2$
6	0	3	0	1	4	1	borde no divido y $GID1 < GID2$
7	1	2	1	2	3	2	borde no divido y $GID1 < GID2$
8	1	3	8	2	4	6	inserta nuevo nodo 6 en borde 8
9	2	3	9	3	4	7	inserta nuevo nodo 7 en borde 9

Cuadro 5.2: Tetraedro arriba-izquierda GIDs original 1234 - identificador: 000189

Borde id	LID1	LID2	new LID	GID1	GID2	Nuevo GID	Razón de Selección
4	0	1	0	2	5	2	borde no divido y $GID1 < GID2$
5	0	2	0	2	3	2	borde no divido and $GID1 < GID2$
6	0	3	6	2	4	6	inserta nuevo nodo 6 en borde 2
7	1	2	2	5	3	3	borde no divido $GID1 > GID2$
8	1	3	4	5	4	4	borde no divido and $GID1 > GID2$
9	2	3	9	3	4	7	inserta nuevo nodo 7 en borde 5

Cuadro 5.3: Tetraedro arriba-derecha GIDs original 2534 - identificador: 006249

Borde id	LID1	LID2	Nuevo LID	GID1	GID2	new GID	sigue convención?
4	0	1	0	2	5	2	OK
5	0	2	2	2	3	3	NO SIGUE CONVENCIÓN!
6	0	3	6	2	4	6	OK
7	1	2	2	5	3	3	OK
8	1	3	4	5	4	4	OK
9	2	3	9	3	4	7	OK

Cuadro 5.4: Tetraedro arriba-derecha - GIDs original 2534 - identificador: 026249

5.3. Modelado discreto-geométrico de la fractura

5.3.1. Del continuo a lo discreto.

Tradicionalmente el método de elementos finitos se ha centrado en el modelado continuo de la fractura mediante los modelos de fisura difusa (*Smeared Crack Model*) adaptando enfoques de plasticidad y daño en un intento de proporcionar una descripción adecuada del proceso de fallo en los materiales quasi-frágiles. Sin embargo, para muchas aplicaciones es necesario degradar el sólido en un conjunto de entidades físicas independientes. La capacidad numérica para degradar un continuo es fundamental para el modelado numérico de la fractura discreta en los materiales quasi-frágiles.

El mecanismo de fallo en los materiales quasi-frágiles está generalmente asociado con fenómenos anisótropos de fractura[99]. El desarrollo de microfisuras dentro de un sólido quasi-frágil se producen en direcciones que tratan de maximizar la tasa de liberación de energía y simultáneamente minimizar la densidad de energía de deformación. Estas fracturas macroscópicas suelen seguir rutas sinuosas debido a la falta de ho-

mogeneidad en el material que luego se transforman en deformaciones inelásticas localizadas lo que resulta en procesos de descarga en el material circundante[222]. La capacidad que tiene un continuo para llevar a cabo mecanismos de fractura es de suma importancia en el estudio de material quasi-frágiles

La transición continuo-discreto en los modelos numéricos se refiere al cambio de la descripción continua de la microfisuración a la descripción discreta y localizada de la fractura macroscópica. Es evidente que los procesos inelásticos de un material quasi-frágil se realizan principalmente a través de una interacción micromecánica, no obstante, no es posible considerar discretamente todas estas interacciones. En general, es la densidad de la discretización espacial de los elementos finitos que determina la escala a la que se realiza la descripción discreta de fractura. La transición continuo-discreto en los materiales quasi-frágiles es un proceso de continua creación de microfisuras que se convierte finalmente en fracturas macroscópicas al fusionarse unas con otras. Estas fracturas macroscópicas normalmente se alinean con la dirección de la deformación principal máxima; se manifiestan como superficies de contacto e introducen nuevos grados de libertad que están asociados con los nodos que han sido introducidos para definir geoméricamente la fractura.

En esta tesis se retoma nuevamente la idea de Ngo y Scordelis[274] e Ingraffea et al. [191] para representar el proceso y evolución de la fractura discreta en los materiales quasi-frágiles. No obstante, la trayectoria de la fractura no es impuesta a priori como en principio propusieron, sino que es el mismo modelo de daño plástico que funciona como puente en la transición continuo-discreto. En adición, la fractura no sólo consiste en una duplicación nodal, sino que además, nuestro propósito es romper el elemento en la dirección de la fractura, si es factible. Este método fue aplicado por Owen et al [99, 223, 309] en 2 dimensiones y aquí extendemos y desarrollamos dicha idea a 3 dimensiones.

Para entender mejor este último concepto, observe la figura 5.7. Suponga que en un momento dado el nodo central llega al nivel de daño tal que el cubo ha de dividirse en dos cuerpos independientes rompiéndose en una dirección θ de fractura. Las 3 alternativas posibles para insertar la fractura discreta en el continuo son:

1. *Fractura por caras*(figura 5.7b).
2. *Fractura rompiendo elementos*(figura 5.7c)
3. *Modelo combinado de fractura por caras y por elementos*(figura 5.7d).

El modelo de fractura por caras es el más sencillo de todos tanto en aspecto de implementación como en coste computacional. No es más que la duplicación nodal propuesta por Ngo y Scordelis. En este caso, la orientación de la fractura discreta se alinea con aquellos elementos que aproximen mejor la dirección de la fractura θ , siguiendo de ese modo un proceso conocido como *fractura por caras* donde se crean sistemáticamente una serie de nuevos puntos nodales pero sin la creación de nuevos elementos tal y como se muestra en la figura 5.7b. Nótese que la facilidad de esta estrategia radica en que no requiere cambio alguno en la topología de la malla salvo la reconectividad que conlleva insertar un nodo. No obstante, este método es dependiente de la malla de elementos, por lo que para capturar una adecuada respuesta se ha de usar una refinada discretización logrando a menudo resultados satisfactorios para la mayoría de las simulaciones numéricas. El hecho de que muchos investigadores se inclinen por esta metodología reside en la capacidad de controlar el paso de tiempo utilizado en el algoritmo de integración explícita. El modelo de *romper* elementos describe mejor la dirección de la fractura. Sin embargo, la principal dificultad radica en que insertar una fractura discreta conlleva a un cambio en la topología de la malla de elementos finitos creando nuevos nodos y

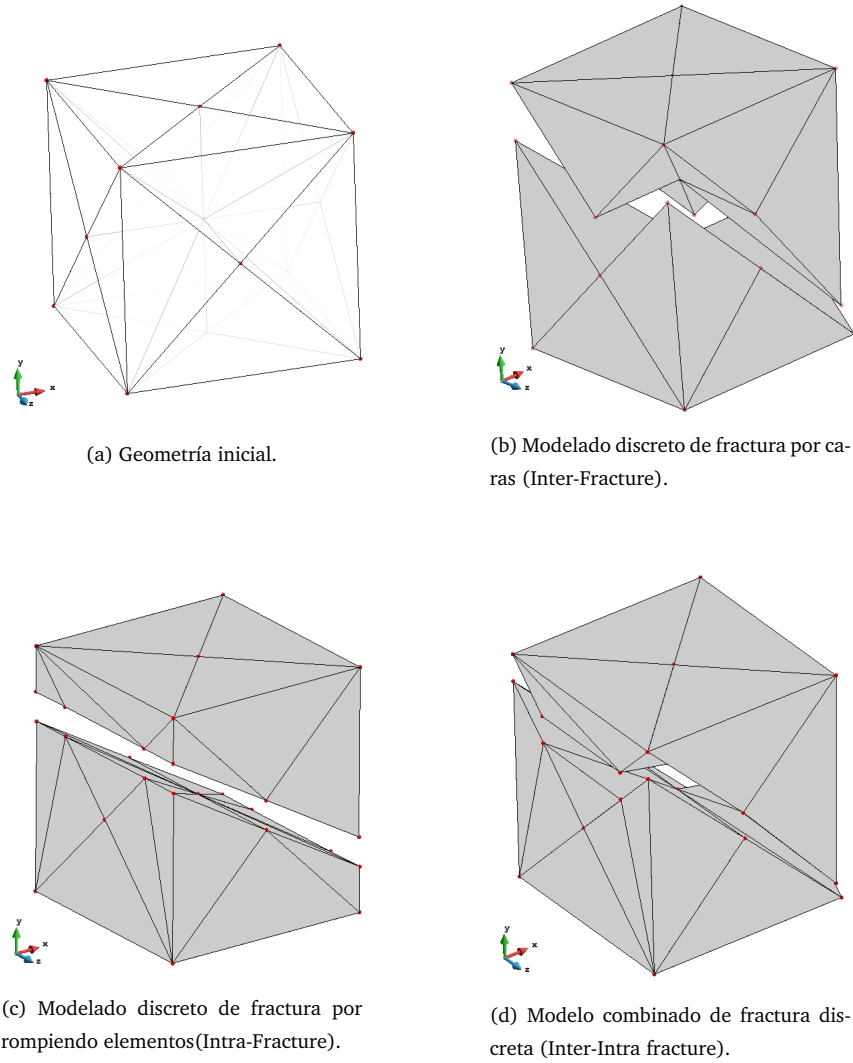


Figura 5.7: **Modelo de fractura discreta.** Modelos discretos de fractura empleados en elementos finitos.

elementos acorde con la dirección de fractura como se muestra en la figura 5.7c. Nótese que en 3D la fractura se define mediante un plano de falla que divide a los elementos que interceptan con dicho plano. Este método es impopular ya que muchos investigadores argumentan sobre el coste computacional y lo complejo que resulta el modelado de este tipo de fractura. En este trabajo, este procedimiento se realiza muy fácilmente con ALRA, primero refinando los elementos acorde con la dirección de fractura y luego realizando la duplicación nodal correspondiente. Otra razón de por qué resulta impopular es que los elementos generados después de la fractura pueden tener una mala relación de aspecto, reduciendo drásticamente el paso de tiempo en la integración explícita, por lo que se requiere especial cuidado a la hora de realizar este tipo de fractura.

Con el fin controlar estos últimos inconvenientes, en esta tesis se propone un modelo *combinado de fractura discreta* (figura 5.7d). Aunque se requiere un cambio en la topología de la malla, no todos los elementos que interceptan con el plano de falla se cortan. El criterio para decidir si se corta o no un elemento dependerá de que tan refinado se desee hacer la inserción geométrica la fractura. Aquí hemos adoptado un criterio puramente geométrico basado en el ángulo φ entre el plano de falla y las caras cortadas por este plano en los elementos finitos circundantes y midiendo también la distancia de los nuevos puntos nodales

con los puntos existentes mediante una relación de distancia $r = d_i/d$ tal y como se muestra en las figuras 5.8a y 5.8b. Esto implica la existencia espacial de una región poligonal en la que sólo es posible insertar la fractura y puede visualizarse en la figura 5.8c. Cualquier punto producto del corte entre el plano de fallo y la cara del elemento ubicado fuera de esta región, dicho elemento será descartado para *romperse*. Por supuesto, el ángulo φ entre el plano de fractura y las caras del elemento tendrán que poseer valores razonables que cuiden el aspecto de los elementos. Valores de φ en el rango de 25° y 30° produce resultados razonables, sin degradar sustancialmente el paso de tiempo Δt y la relación de aspecto de los elementos.

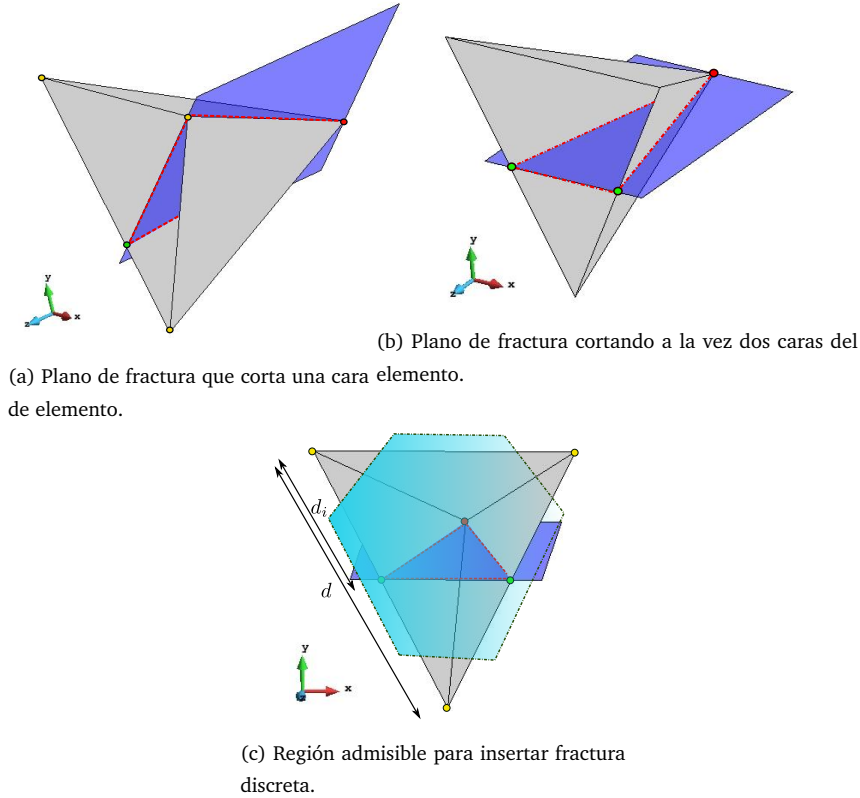


Figura 5.8: Modelo tridimensional de fractura discreta. *Modelos discretos de fractura empleados en elementos finitos.*

En general, el proceso de inserción de una fractura discreta en un medio continuo sigue de tres pasos fundamentales[99, 223, 222]: en primer lugar se requiere computar un *factor de fallo local* F_k^e , el cual está asociado con la dirección local de fallo θ_k^e , y es un indicador del nivel de daño en el material quasi-frágil convencionalmente definido como la relación de la deformación inelástica de fractura ε_f y la deformación crítica de fractura ε_f^c . Este último es un parámetro del material que está ligado intrínsecamente con la energía de fractura \mathcal{G}_f del material. Por tanto, F_k^e se define entonces como:

$$F_k^e = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f^c} \quad (5.3.1)$$

Como segundo paso, el factor local de fallo F_k^e es utilizado para determinar el comienzo la fractura dentro de dominio. Es lógico pensar en la inserción de la fractura discreta dentro del elemento (a nivel de punto de Gauss) cuando se disipa toda la energía de fractura, lo que corresponde a un factor de fallo F_k^e igual a la

unidad. Sin embargo, dado que el elemento finito se define mediante puntos nodales, hace que sea más fácil introducir estas fracturas si el factor local de fallo F_k^e en el punto de gauss se asocia a un factor de fallo en el nodo F_n . Algunos investigadores[99, 223] motivados por esta facilidad, introducen el concepto de *factor y dirección de fallo no local* que computan a partir del promedio ponderado del factor y dirección de fallo de los elementos vecinos a un nodo, es decir

$$F_n = \frac{\sum_{e=1}^{Ne} F_k^e w_k^e}{\sum_{e=1}^{Ne} w_k^e} \quad (5.3.2)$$

$$\theta_n = \frac{\sum_{e=1}^{Ne} \theta_k^e w_k^e}{\sum_{e=1}^{Ne} w_k^e} \quad (5.3.3)$$

donde la suma se realiza sobre los elementos adyacentes o vecinos (Ne) a un nodo y w_k^e se toma como el volumen del elemento. Una vez determinando el factor no local F_n y tan pronto como este valor llegue la unidad, se inserta la fractura discreta en la dirección no local de fallo θ_n computada. No es realista suponer que sólo un nodo falle en un determinado paso de tiempo. Puede ocurrir que una serie de nodos colapsen a la vez en un mismo paso de tiempo, por lo que se hace necesario buscar una secuencia de fractura antes de llevar a cabo la actualización de la topología de la malla. Naturalmente esto afectará el patrón de fractura al final del proceso. La manifestación física de fracturas múltiples se basa firmemente en la viabilidad energética [222]. Las magnitudes del factor fallo representa la analogía numérica de esta viabilidad y determinan las secuencias de actualización topológica de la malla.

Sin embargo, el empleo directo de fórmulas no locales requiere de cierto cuidado. Esto se debe a que en los modelos de fractura basados ya sea en la teoría de plasticidad, daño o cualquier modelo de disipación energética, la deformación localiza en una banda de elementos finitos y además dichos modelos adolecen de lo que comúnmente se conoce como dependencia de la malla o *mesh dependent* en inglés. Cuando se computa el valor del fallo no local F_n en los nodos donde se está localizando la deformación, hay elementos que están entrando en procesos irreversibles de daño mientras que otros se descargan elásticamente. La única manera de que el factor no local llegue a la la unidad es que todos los elementos circundantes al nodo hayan disipado toda su energía de fractura, sin embargo, el proceso de localización se encuentra en una banda alineada de elementos finitos. En este trabajo, nuestro indicador de daño es la misma variable objetiva de daño plástico κ_p y directamente computada en el nodo mediante la introducción de una novedosa formulación: MEX-FEM. Por otra parte, se resuelve también el problema de la dependencia de la malla sin necesidad de usar un algoritmo de rastreo. MEX-FEM será explicado en la sección siguiente.

Finalmente, una vez se observa la viabilidad de insertar la fractura, ya sea rompiendo el elemento o fracturando por caras, se procede a la actualización topológica de la malla acorde con los nuevos nodos y elementos que han sido creados. Normalmente, una vez terminado dicha operación, los elementos finitos colindantes al nodo que ha fallado se reinician bajo el argumento de que todo el daño acumulado en los elementos atravesados por la fractura se ha fusionado en la creación de la fisura discreta. Sin embargo, con la probable creación de nuevos elementos finitos en una parcela malla debido a la *fractura por rotura de elementos*, se requiere del mapeo (interpolación) de todas las variables de estado. Dado que el mapeo de las variable de estado es computacionalmente caro para poca una mejora en la resolución numérica, algunos investigadores prefieren también reinicializar los nuevos elementos. No obstante, en este trabajo aplicamos el mapeo de las variables de estado ya que entendemos que los elementos atravesados por la fractura poseen cierto nivel de daño. Sólo se reinicializa el punto de gauus de los elementos relacionado con el punto fracturado.

El proceso de inserción de la fractura discreta es un proceso algorítmicamente geométrico que dependerá en todo caso de cómo la misma computacionalmente se implemente. En nuestro caso, la base está en ALRA, el cual nos facilita todos los datos necesarios para llevar a cabo dicho proceso numérico. Sin embargo, la principal dificultad no radica en la fractura misma, es más bien las situaciones complicadas y ambiguas de contacto que surgen con creación de las superficies de contacto producto de la introducción fractura discreta. En *2D* esta dificultad es enorme pero en *3D* dicha dificultad es extrema. Es esta la principal motivación por la cual se ha adoptado combinar las estrategias de contacto explicado en el capítulo 3.

5.4. Formulación mixta en un esquema explícito

5.4.1. Introducción

La solución de los problemas en la mecánica de sólidos ha sido uno de los principales motores en el desarrollo del Método de Elementos Finitos (FEM), que a su vez ha permitido a los ingenieros hacer frente a una amplia variedad de problemas anteriormente intratables. En la mecánica computacional de sólidos y estructuras, es habitual elegir los desplazamientos como incógnitas y calcular las deformaciones por diferenciación del campo de los desplazamientos. Dado que no es posible realizar una reducción adicional en la elección del campo desconocido, los enfoques basados en la formulación estándar de desplazamientos se conocen como *formulaciones irreducibles*. Estas formulaciones son muy efectivas en el tratamiento de una amplia gama de problemas prácticos, sin embargo, en ciertos casos, conducen a un comportamiento rígido o dependiente de la malla. Por ejemplo, el rendimiento de los elementos estándares de orden inferior es pobre en condiciones de elasticidad quasi-incompresibles y plasticidad compresible y quasi-incompresible, mostrando un *bloqueo volumétrico* que se manifiesta como un comportamiento exageradamente rígido. Existe una vasta literatura proponiendo soluciones para este tipo de problemas, con las primeras propuestas basadas en técnicas de integración reducida o en el uso de deformaciones asumidas, véase, por ejemplo, el método de B-bar[182, 183] y el método de F-bar[109].

Los enfoques mixtos basados en desplazamiento-presión (\mathbf{u}, p) se emplearon a partir los años 90 para la solución de problemas incompresibles [149, 248, 358, 373]. Tales técnicas mostraron también ser factibles en aplicaciones a problemas compresibles (véase, por ejemplo [344])). En esta tesis se propone y se desarrolla una formulación mixta estabilizada dentro de un esquema de explícito de integración con el objetivo de mejorar la precisión de la discretización de los elementos finitos tanto en un análisis quasi-estático como dinámicos y a la vez abordar de manera más objetiva el fenómeno de la localización de las deformaciones y la fractura discreta. La idea es combinar diferentes variables primarias, en nuestro caso desplazamientos y deformaciones, siguiendo el mismo concepto descrito en la referencia [245]. Este enfoque garantiza que el campo de las deformaciones converja con el refinamiento de la malla a la misma velocidad que el campo de los desplazamientos manifestando mayor exactitud en el campo de las tensiones ya sea en un análisis lineal o no lineal.

La convergencia de las formulaciones mixtas está subordinada por la condición de estabilidad de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) [12, 131], llamado habitualmente *Condición inf-sup*, que establece los requisitos de compatibilidad entre las funciones de interpolación de los campos involucrados y descarta los de igual orden de interpolación, en particular, las interpolaciones lineal/lineal. Siguiendo las ideas de [95, 114, 184, 185, 186, 299], se necesita una técnica de estabilización para permitir el uso del mismo orden de interpolación para las dos variables primarias de interés. Para tal fin, en este trabajo se emplea el Método de Multiescala Variacional (VMS)[184]. La aplicación de la formulación mixta desplazamiento-deformación $\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}$ en esquemas implícitos implica mayor número de grados de libertad (*Dofs*) por nodo, lo que resulta en sistemas de ecuaciones lineales de mayor tamaño. Uno de los objetivos del presente trabajo es obviar esta limitación mediante un esquema de integración explícita. Demostraremos que un enfoque completamente explícito es factible cuando se emplea la tecnología mixta de interés y que es competitivo y superior con el caso irreducible. Mostraremos además que para una malla dada, el paso de tiempo crítico es más grande en la formulación mixta que en la formulación irreducible. Por otra parte, se resuelve el problema de la dependencia de la malla, obteniendo una descripción más objetiva de los procesos de localización de deformaciones.

Asimismo, y aunque no fue un objetivo de la tesis, la formulación propuesta es capaz de proporcionar una solución cercana al problema quasi-incompresible.

5.4.2. Formulación mixta en desplazamiento-deformación ($\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}$)

5.4.2.1. Planteamiento continuo del problema. Generalidades

En la mecánica de sólidos deformables, adicional al campo de los desplazamientos \mathbf{u} , las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ pueden ser consideradas como variables independientes. Los grados de libertad *Dofs* para un problema tridimensional se incrementan de 3 *Dofs* $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ a 9, incluyendo los componentes del tensor simétrico de las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}\}$. Por consiguiente, la formulación *fuerte* de la ecuación de movimiento puede escribirse como:

Hallar el campo de los desplazamientos \mathbf{u} , sus respectivas derivadas temporales (velocidad $\dot{\mathbf{u}}$ y aceleración $\ddot{\mathbf{u}}$) y el campo de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$, dadas unas fuerzas másicas \mathbf{b} , tales que:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \text{ en } \Omega \quad (5.4.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ en } \Omega \quad (5.4.2)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$ es el volumen ocupado por el sólido en un espacio de n_{dim} dimensiones, ρ denota la densidad del material, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ es la medida de deformación correspondiente¹⁰ y $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy, expresado como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.4.3)$$

donde \mathbf{C} es el tensor constitutivo de cuarto orden. Además de las ecuaciones (5.4.1) y (5.4.2), que se deben satisfacer para cualquier tiempo $t \in \mathbb{I}$ del intervalo de tiempo de interés $\mathbb{I} = (0, T)$, el problema está sujeto a unas apropiadas condiciones de contorno, conocidas como condición de Dirichlet y condición de Von Neumann situadas en el contorno del dominio $\partial\Omega = \partial\Omega^u \cup \partial\Omega^\sigma$, siendo $\partial\Omega^u$ y $\partial\Omega^\sigma$ conjuntos abiertos y disjuntos ($\partial\Omega^u \cap \partial\Omega^\sigma = \emptyset$) donde predominan las condiciones mencionadas. Por lo general, estas condiciones de contorno son establecidas mediante desplazamientos $\bar{\mathbf{u}} : \partial\Omega^u \times \mathbb{I} \mapsto \mathbb{R}^{n_{dim}}$, velocidades $\bar{\dot{\mathbf{u}}} : \partial\Omega^u \times \mathbb{I} \mapsto \mathbb{R}^{n_{dim}}$ y tracciones $\bar{\mathbf{t}} : \partial\Omega^\sigma \times \mathbb{I} \mapsto \mathbb{R}^{n_{dim}}$ prescritas. De igual manera, el problema está sujeto a unas condiciones iniciales de contorno, donde es habitual expresar las mismas introduciendo un campo de desplazamientos \mathbf{u}_0 , velocidades \mathbf{v}_0 y tracciones iniciales $\bar{\mathbf{t}}_0$ requiriendo que¹¹:

$$\dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \text{ y } \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \text{ en } \partial\Omega_u \quad (5.4.4)$$

$$\bar{\mathbf{t}}|_{t=0} = \bar{\mathbf{t}}_0 \text{ en } \partial\Omega_\sigma \quad (5.4.5)$$

Después de multiplicar las ecuaciones (5.4.1) y (5.4.2) por sus respectivas funciones de peso e integrando por partes la ecuación (5.4.1), la formulación variacional del problema es:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\omega} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\omega} \quad (5.4.6)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Omega = 0 \quad \forall \boldsymbol{\gamma} \quad (5.4.7)$$

¹⁰Para el caso de pequeñas deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla^s \mathbf{u}$ y en grandes deformaciones se puede tomar como el tensor de deformaciones de Almansi $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x^T \mathbf{u} - \nabla_x^T \mathbf{u} \cdot \nabla_x \mathbf{u})$.

¹¹Las condiciones iniciales están en todo el dominio Ω del problema. Sin embargo, sin pérdida de generalidad, normalmente las mismas son introducidas en $\partial\Omega$.

donde $\omega \in \mathcal{V}$ y $\gamma \in \mathcal{T}$ son las funciones de prueba para el campo de los desplazamientos y el campo de las deformaciones respectivamente; \mathcal{V} y \mathcal{T} son los espacios de los desplazamientos y deformaciones admisibles.

5.4.2.2. Discretización espacial y temporal

Para definir la forma discreta del problema, se ha de introducir apropiadamente un campo de desplazamientos discretos $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h$, sus derivadas temporales discretas (velocidad $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}_h$ y aceleración $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}}_h$) y un campo de deformaciones discretas $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_h$ en las ecuaciones (5.4.6) y (5.4.7) mediante las funciones de interpolación estándar usadas en elementos finitos:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \omega_h : \sigma_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \omega_h \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}_h \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \omega_h \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \omega_h \cdot \mathbf{b} \, d\Omega \quad \forall \omega_h \quad (5.4.8)$$

$$\int_{\Omega} \gamma_h \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_h \, d\Omega = \int_{\Omega} \gamma_h \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) \, d\Omega \quad \forall \gamma_h \quad (5.4.9)$$

donde ahora $\omega_h \in \mathcal{V}_h$ y $\gamma_h \in \mathcal{T}_h$ son las funciones de prueba definidas sobre el espacio de los elementos finitos \mathcal{V}_h y \mathcal{T}_h respectivamente. La condición de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) impone restricciones (*condición inf-sup*) en las funciones de interpolación para garantizar estabilidad y unicidad de la solución [12, 131]. De ahí que los espacios de solución para los desplazamientos y las deformaciones no puedan ser escogidos libremente. Lamentablemente, muchos elementos de bajo orden, incluyendo el elemento con igual orden lineal de interpolación para los desplazamientos y las deformaciones, de especial interés en este trabajo, no cumple las condiciones de LBB, por lo que no son estables y presentan oscilaciones en el campo de los desplazamientos que contaminan la solución. Afortunadamente, las restricciones de las condiciones LBB pueden evitarse mediante la utilización de apropiadas técnicas de estabilización numérica que pueden proveer la estabilidad necesaria para la convergencia. Los métodos de elementos finitos estabilizados consisten en añadir a la forma discreta términos que son función de los residuos de las ecuaciones (5.4.8) y (5.4.9) evaluados dentro de los elementos y que disminuyen con el refinamiento de la malla.

Además, como las ecuaciones (5.4.8) y (5.4.9) son discretas en el espacio pero continuas en el tiempo, se requiere un algoritmo de discretización temporal. En este trabajo se usa el esquema explícito de *Diferencias Centradas* (Central Differences (CD)) explicado en el capítulo 3.

5.4.3. Método de los elementos finitos estabilizados

5.4.3.1. Multi-escalas variacionales de resolución

El método de estabilización empleado se basa en el concepto de *Sub-escalas o Multi-Escalas Variacionales* (VMS) [185]. La idea fundamental que introduce el Método de las Sub-escalas es que al definir una malla de elementos finitos quedan establecidas dos *escalas o niveles de resolución*, una que corresponde a la malla y será captado mediante la aproximación de los elementos finitos (escala gruesa) y otra más fina, que corresponde a la parte que no se logra captar y que denominaremos simplemente sub-escala (“sub-scale” o “sub-grid scale”). La solución del problema continuo contiene componentes de ambas escalas. De acuerdo con este concepto, si bien se admite que existe una componente no resuelta de la solución que no se puede captar, sin embargo, se debería aproximar al menos de alguna manera los efectos de esta componente de la solución sobre la componente que se resuelve numéricamente. El objetivo de dicho método es mejorar las propiedades de estabilidad de la formulación teniendo en cuenta una aproximación *adecuada* de estos efectos. En base a este

concepto, el campo de los desplazamientos y deformaciones serán aproximados como:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}} \quad (5.4.10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \boldsymbol{\varepsilon}_h + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.4.11)$$

Las velocidades $\dot{\mathbf{u}}$ y las aceleraciones $\ddot{\mathbf{u}}$ se obtienen por diferenciación temporal de los desplazamientos, o sea:

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}}_h + \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \quad (5.4.12)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{u}}_h + \ddot{\tilde{\mathbf{u}}} \quad (5.4.13)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_h \in \mathcal{T}_h$ y $(\mathbf{u}_h, \dot{\mathbf{u}}_h, \ddot{\mathbf{u}}_h) \in \mathcal{V}_h$ son las componentes discretas del campo de deformaciones y desplazamientos (incluida sus derivadas temporales) mientras que $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \tilde{\mathcal{T}}$ y $(\tilde{\mathbf{u}}, \dot{\tilde{\mathbf{u}}}, \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}) \in \tilde{\mathcal{V}}$ son las deformaciones y desplazamientos (incluida sus derivadas temporales) correspondientes al espacio de sub-escalas $\tilde{\mathcal{T}}$ y $\tilde{\mathcal{V}}$ respectivamente. Al considerar las correspondientes funciones de prueba en la sub-escala $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \tilde{\mathcal{V}}$ y $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \in \tilde{\mathcal{T}}$, nótese que la aproximación de la solución en el campo de deformaciones y desplazamientos se extiende ahora a $\mathcal{T} \simeq \mathcal{T}_h \oplus \tilde{\mathcal{T}}$ y $\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}_h \oplus \tilde{\mathcal{V}}$ respectivamente. Cada método particular de elementos finitos estabilizados se define de acuerdo a como se escogen los espacios $\tilde{\mathcal{V}}$ y $\tilde{\mathcal{T}}$. El método clásico de Galerkin de obtiene cuando $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\mathcal{T}} = \{0\}$.

Por otra parte, el tensor de tensiones en la ecuación 5.4.3 toma la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \boldsymbol{\sigma}_h + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.4.14)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}_h \quad (5.4.15)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_h) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.4.16)$$

en el cual $\boldsymbol{\sigma}_h$ y $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ son respectivamente las tensiones *continuas* y las tensiones de la escala fina. Observe que se ha empleado la aproximación $\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) \approx \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_h)$. Esta aproximación y la descomposición aditiva en el tensor de tensiones en la ecuación (5.4.14) está justificado en los [73, 74, 245].

Comentario 1:

La propuesta 5.4.14 es lícita en régimen elástico. Como es sabido, en plasticidad el tensor constitutivo \mathbf{C} no es lineal en $\boldsymbol{\varepsilon}$ con lo cual la expresión anterior deja de ser estrictamente cierta. No obstante, si se considera a $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ como una pequeña perturbación del campo $\boldsymbol{\varepsilon}_h$, es decir $\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\| \ll \|\boldsymbol{\varepsilon}_h\|$ (el efecto de la sub-escala es de orden $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \approx \mathcal{O}(h^2)$ (véase [156])), es razonable admitir que las sub-escalas no genera deformaciones plásticas, o bien que las mismas son despreciables frente a las inducidas por $\boldsymbol{\varepsilon}_h$, con lo cual la aproximación $\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) \approx \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_h)$ y la ecuación 5.4.14 conserva sentido aún en el campo inelástico.

A fin de demostrar la validez de la ecuación 5.4.14, si las tensiones se escriben como en la ecuación 5.4.3, la misma puede aproximarse mediante el desarrollo de una serie de Taylor¹² de primer orden alrededor de $\boldsymbol{\varepsilon}_h$, despreciando los términos de orden cuadrático y mayores:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_h + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (5.4.17)$$

$$\approx \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_h) + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_h} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathcal{O}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})^2 \quad (5.4.18)$$

$$\approx \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon})|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_h} : \boldsymbol{\varepsilon}_h + \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon})|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_h} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.4.19)$$

¹² La serie de Taylor de primer orden de la función $f(x+\Delta x)$ alrededor del punto Δx expresa como $f(x+\Delta x) = f(x_0) + f'(x)|_{x=x_0} \Delta x$.

donde $\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon})$ es el tensor constitutivo secante no lineal evaluado en $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_h$ y el producto $\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon})|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_h} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ representa el incremento de tensiones por el efecto de la sub-escala, la cual es pequeña en comparación con $\boldsymbol{\sigma}_h$.

5.4.4. Método de los elementos finitos mixtos estabilizados explícitos

5.4.4.1. Caso I: Pequeñas Deformaciones

Considere el caso en que la medida de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ dado en ecuación 5.4.2 se escribe de la forma $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \nabla^s \mathbf{u}$, el cual corresponde a la medida de deformaciones infinitesimales. Por tanto, la ecuación puede 5.4.20 puede leerse como:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla^s \mathbf{u} \, d\Omega = 0 \quad \forall \boldsymbol{\gamma} \quad (5.4.20)$$

Introduciendo las ecuaciones (5.4.10), (5.4.11) (5.4.13) y (5.4.14) en (5.4.6) y (5.4.7), el problema se lee ahora como:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\omega}_h : \boldsymbol{\sigma}_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\omega}_h : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_h \cdot \rho (\ddot{\mathbf{u}}_h + \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}) \, d\Omega = \mathbf{f}_{ext}(\boldsymbol{\omega}_h) \quad \forall \boldsymbol{\omega}_h \quad (5.4.21)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^s \tilde{\boldsymbol{\omega}} : \boldsymbol{\sigma}_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla^s \tilde{\boldsymbol{\omega}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \rho (\ddot{\mathbf{u}}_h + \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}) \, d\Omega = \mathbf{f}_{ext}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (5.4.22)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma}_h \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma}_h \cdot \nabla^s \mathbf{u}_h \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}_h) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\gamma}_h \quad (5.4.23)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla^s \mathbf{u}_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \quad (5.4.24)$$

donde en la ecuación 5.4.23 ha sido integrado por partes y se ha asumido que $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ y $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ se anulan en el contorno $\partial\Omega_e$ [73, 74, 245]. Las fuerzas externas $\mathbf{f}_{ext}(\boldsymbol{\omega}_h)$ se escriben de la forma:

$$\mathbf{f}_{ext}(\boldsymbol{\omega}_h) = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}_h \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_h \cdot \mathbf{b} \, d\Omega \quad (5.4.25)$$

Debido a la aproximación empleada en (5.4.10) y (5.4.11), ahora la ecuación (5.4.1) se desdobla en dos ecuaciones (5.4.21) y (5.4.22), cada una de ellas relacionadas con la sub-escala correspondiente. Asimismo, la ecuación (5.4.2) se desdobla en las ecuaciones (5.4.23) y (5.4.24). Observe además que hasta el momento no se ha realizado aún la discretización en el tiempo.

Dado que las ecuaciones (5.4.22) y (5.4.24) no se resuelven dentro del espacio de los elementos finitos, se requiere que al menos localmente se introduzca una aproximación de las mismas. El objetivo de estas aproximaciones es obtener una estimación de los efectos de las sub-escalas $\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ cuya evaluación numérica en las ecuaciones de balance sea viable y no necesariamente calcular exactamente el valor de las mismas.

Definamos los residuos correspondientes a las ecuaciones en la sub-escala de los elementos finitos como:

$$\mathbf{r}_{\varepsilon,h} = \nabla^s \mathbf{u}_h - \boldsymbol{\varepsilon}_h \quad (5.4.26)$$

$$\mathbf{r}_{u,h} = \rho \ddot{\mathbf{u}}_h - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h - \mathbf{b} \quad (5.4.27)$$

Esto nos permite escribir las ecuaciones (5.4.22) y (5.4.24) como:

$$\int_{\Omega} \tilde{\omega} \cdot (\nabla \cdot (\mathbf{C} : \tilde{\epsilon})) d\Omega - \int_{\Omega} \rho \tilde{\omega} \cdot \ddot{\tilde{\mathbf{u}}} d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{\omega} \cdot \mathbf{r}_{u,h} d\Omega \quad (5.4.28)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\gamma} \cdot \tilde{\epsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{\gamma} \cdot \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{\gamma} \cdot \mathbf{r}_{\epsilon,h} d\Omega \quad (5.4.29)$$

Los términos de la derecha en las ecuaciones (5.4.28) y (5.4.29) son las proyecciones $\mathcal{P}(\bullet)$ de los residuos sobre el espacio de las sub-escalas. Por tanto, las expresiones (5.4.28) y (5.4.29) relacionan las sub-escalas $\tilde{\epsilon}$ y $\tilde{\mathbf{u}}$ con los residuos de la ecuación diferencial aproximada por elementos finitos, representado por $\mathbf{r}_{\epsilon,h}$ y $\mathbf{r}_{u,h}$ respectivamente. Obsérvese que no son necesarios los valores punto a punto, sino sólo el valor de la integral correspondiente al término de estabilización en (5.4.21) y (5.4.23). Hasta este punto la presentación del método de las sub-escalas es general.

Existen diversas posibilidades para definir la aproximación a las sub-escalas. En principio, el espacio de la escala fina podría ser cualquier espacio complementario al espacio de elementos finitos. Tómese en cuenta que en la ecuación (5.4.28) aparece la segunda derivada temporal de $\tilde{\mathbf{u}}$, por lo que la misma necesita discretizarse en el tiempo. Es necesario, en primer lugar, seguir la evolución en el tiempo de la sub-escala $\tilde{\mathbf{u}}$, y es segundo lugar, el método de integración de la sub-escala tiene que ser compatible con el esquema explícito empleado en el espacio de los EF, por lo que también se requiere resolver de forma explícita la sub-escala de los desplazamientos $\tilde{\mathbf{u}}$. La subescala de las deformaciones $\tilde{\epsilon}$ puede ser tratada implícitamente (véase [95]).

Para llevar a cabo estas ideas, considérese una partición uniforme en el tiempo $[0, T]$ de tamaño Δt , tal que el tiempo $t^n = n\Delta t$. Por simplicidad, se asume Δt constante. Empleando el método de diferencias centradas¹³ en la ecuación (5.4.28), las aceleraciones en la sub-escala se escriben:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^n = \frac{1}{\Delta t^2} (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - 2\tilde{\mathbf{u}}^n + \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}) \quad (5.4.30)$$

Comentario 2:

Es posible introducir un coeficiente de amortiguamiento $\tilde{\xi} \in (0, 1)$ a fin de considerar un esquema disipativo en la sub-escala de los desplazamientos. En tal sentido, la ecuación 5.4.30 se reescribe como:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^n = \frac{1}{\Delta t^2} (\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - (2 - \tilde{\xi})\tilde{\mathbf{u}}^n + (1 - \tilde{\xi})\tilde{\mathbf{u}}^{n-1}) \quad (5.4.31)$$

Sustituyendo (5.4.30) en (5.4.28) y sean \mathcal{P}_{ϵ} y \mathcal{P}_u las proyecciones sobre los espacios $\tilde{\mathcal{T}}$ y $\tilde{\mathcal{V}}$ respectivamente, el problema se lee ahora como: dados $\tilde{\mathbf{u}}^n$ y $\tilde{\mathbf{u}}^{n-1}$, hallar $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ y $\tilde{\epsilon}^{n+1}$ tal que:

$$\mathcal{P}_u \left(\nabla \cdot \mathbf{C}(\epsilon_h) : \tilde{\epsilon}^{n+1} - \frac{\rho}{\Delta t^2} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \right) = \mathcal{P}_u \left(\frac{\rho}{\Delta t^2} (2\tilde{\mathbf{u}}^n - \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}) + \mathbf{r}_{u,h}^n \right) \quad (5.4.32)$$

$$\mathcal{P}_{\epsilon} (\tilde{\epsilon}^{n+1} - \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) = \mathcal{P}_{\epsilon} (\mathbf{r}_{\epsilon,h}^{n+1}) \quad (5.4.33)$$

Se requiere resolver de forma aproximada las ecuaciones (5.4.32) y (5.4.33) para obtener los valores de $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ y para $\tilde{\epsilon}^{n+1}$. Aplicando el mismo procedimiento que en [96], se pueden aproximar las sub-escalas mediante un análisis de Fourier del problema (véase apéndice D). Por consiguiente, $\tilde{\epsilon}^{n+1}$ y $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ pueden aproximarse dentro de cada elemento Ω_e por:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \approx \tau_{u_t} \frac{\rho}{\Delta t^2} (2\tilde{\mathbf{u}}^n - \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}) + \tau_{u_t} \mathcal{P}_u (-\mathbf{r}_{u,h}^n) \text{ en } \Omega_e \quad (5.4.34)$$

$$\tilde{\epsilon}^{n+1} \approx \tau_{\epsilon} \mathcal{P}_{\epsilon} (\mathbf{r}_{\epsilon,h}^{n+1}) \text{ en } \Omega_e \quad (5.4.35)$$

¹³El método de diferencias centradas es habitualmente llamado método de Verlet (Loup Verlet 1967) en dinámica molecular.

donde τ_{u_t} y τ_ε son los parámetros de estabilización en cada elemento Ω_e del que hablaremos más adelante.

Para definir completamente el método y calcular las variables de las sub-escalas, se requiere seleccionar adecuadamente las proyecciones \mathcal{P}_u y \mathcal{P}_ε . La sección siguiente abordaremos las alternativas disponibles.

5.4.4.2. Estabilización mediante sub-escalas algebraicas (ASGS)

La elección más simple para las proyecciones es tomar las mismas como la identidad \mathcal{I} cuando se aplica a la residuos en las ecuaciones (5.4.34) y (5.4.35). Este procedimiento se le conoce como *método de las sub-escalas algebraicas* (Algebraic Sub-Scales (ASGS))[94]. De hecho, también se puede pensar que la proyección es escalada por los parámetros de estabilización τ_{u_t} y τ_ε que actúan como factores de amplificación de la escala de los residuos sobre la malla de elementos finitos. Por lo tanto, las sub-escalas se leen como:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \approx \tau_{u_t} \frac{\rho}{\Delta t^2} (2\tilde{\mathbf{u}}^n - \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}) + \tau_{u_t} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h^n + \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}_h^n) \text{ en } \Omega_e \quad (5.4.36)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1} \approx \tau_\varepsilon (\nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_h^{n+1}) \text{ en } \Omega_e \quad (5.4.37)$$

No obstante, en este trabajo no emplearemos dicho método ya que el siguiente método, que se explicará a continuación es mucho más robusto. De igual manera, no es objetivo de esta tesis discutir las ventajas y las desventajas de cada uno de los métodos de estabilización dentro de un esquema explícito. Dicho estudio es una línea abierta para futuras investigaciones. No obstante, hay que resaltar que este método introduce un error de consistencia al problema ya que cambia la matriz de masa del sistema.

5.4.4.3. Estabilización mediante sub-escalas ortogonales(OSS)

Codina[94] propuso como definición razonable para el espacio de las sub-escalas $\tilde{\mathcal{V}}$ y $\tilde{\mathcal{T}}$ el espacio ortogonal al espacio de los elementos finitos \mathcal{V}_h y \mathcal{T}_h [156]. Esta definición da origen a una formulación ingeniosa y precisa denominada *método de las sub-escalas ortogonales* (Orthogonal Sub-Scales (OSS)) y es el método empleado en esta tesis. De acuerdo con este planteamiento, el espacio de las deformaciones y desplazamientos se aproxima como $\mathcal{T} \simeq \mathcal{T}_h \oplus \mathcal{T}_h^\perp$ y $\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}_h \oplus \mathcal{V}_h^\perp$ respectivamente. Por practicidad se introduce el operador de proyección $\mathcal{P}_h^\perp(\bullet) = (\bullet) - \mathcal{P}_h(\bullet)$, donde $\mathcal{P}_h(\bullet)$ representa la proyección sobre el espacio de los elementos finitos (véase apéndice B). Si además se asume, como es usual, que el campo de las fuerzas másicas \mathbf{b} puede ser descrito completamente en el espacio de \mathcal{V}_h se tiene que $\mathcal{P}_h^\perp(\mathbf{b}) = 0$ [71, 87, 156]. Por consiguiente, se puede tomar $\tilde{\mathbf{u}}$ y $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ como:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \simeq \tau_{u_t} \frac{\rho}{\Delta t^2} (2\tilde{\mathbf{u}}^n - \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}) + \tau_{u_t} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h^n - \mathcal{P}_h(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h^n)) \quad (5.4.38)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1} \simeq \tau_\varepsilon (\nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1} - \mathcal{P}_h(\nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1})) = \tau_\varepsilon (\nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h^{n+1}) \quad (5.4.39)$$

siendo $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h^{n+1} = \mathcal{P}_h(\nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1})$.

El residuo en la ecuación (5.4.27) puede escribirse en función de la parte volumétrica y desviadora del tensor de tensiones, es decir, $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h = \nabla \cdot \mathbf{S}_h + \nabla p_h$, siendo \mathbf{S} el tensor desviador. En problemas quasi-incompresibles o incompresibles, sólo el gradiente de la presión ∇p_h necesita incluirse en el residuo para asegurar la estabilidad en el campo de las presiones. Esto permite estabilizar la presión minimizando la magnitud del término de estabilización. El hecho de no considerar una parte del residuo introduce un cierto error de consistencia, pero en el método de OSS este error es de orden óptimo y no altera la velocidad de convergencia del esquema y no cambia la matriz de masa del sistema como ASGS.

Por otra parte, como se comentó con anterioridad, se puede introducir un efecto simple de amortiguamiento numérico a fin de considerar un esquema disipativo y eliminar las frecuencias espurias en la sub-escala de los desplazamientos, y que pueden afectar la estabilidad del sistema. En tal sentido, despreciando el término desviador en la ecuación (5.4.38) e introduciendo un coeficiente de disipación $\tilde{\xi} \in [0, 1]$, se obtiene una versión modificada de OSS[71]. En consecuencia, \tilde{u} estará ahora dado por:

$$\tilde{u}^{n+1} \simeq \tau_{u_t} \frac{\rho}{\Delta t^2} ((2 - \tilde{\xi})\tilde{u}^n - (1 - \tilde{\xi})\tilde{u}^{n-1}) + \tau_{u_t} (\nabla p_h^n - \mathcal{P}_h(\nabla p_h^n)) \quad (5.4.40)$$

Cabe destacar que el segundo término de la derecha de la ecuación 5.4.40 es muy habitual en formulaciones mixtas desplazamiento-presión ($u - p$) de mecánica de fluidos y mecánica de sólidos.

5.4.4.4. Parámetros de estabilización

Hasta ahora hemos introducido los parámetros de estabilización τ_{u_t} y τ_e sin dar una expresión algebraica de los mismos. Estos parámetros de estabilización han sido establecidos para problemas no transitorios (véase [71, 245, 74, 87]) los cuales dependerán en forma proporcional a h y L_0 , siendo h la medida de longitud característica de cada elemento finito y L_0 es la longitud característica del problema el cual se toma como el diámetro del dominio computacional Ω . De forma análoga se han establecido otros parámetros de estabilización para el caso de una formulación implícita en desplazamientos-presión (u, p) [88, 156] o por ejemplo mediante el análisis de convergencia o el método del cálculo finito [185, 299]. Codina desarrolló, en el marco de las ecuaciones de Oseen [95], las consideraciones necesarias para definir los parámetros de estabilización mediante un análisis de Fourier, basada por primera vez en razonamientos físicos. Los valores de los parámetros de estabilización dependen de los coeficientes de la ecuación diferencial y se establecen mediante la comparación de las normas \mathcal{L}^2 del residuo y de las sub-escalas (\tilde{u}, \tilde{e}) sobre cada elemento. Empleando este razonamiento, y dado que la sub-escala de los desplazamientos requiere de una ecuación de evolución, los parámetros de estabilización τ_{u_t} y τ_e para el caso elástico se aproximan en cada elemento como (véase apéndice D):

$$\tau_{u_t} \approx \left(\frac{\rho}{\Delta t^2} + \frac{1}{\tau_{u_s}} \right)^{-1} \text{ y } \tau_e \approx c_e \frac{h}{L_0} \quad (5.4.41)$$

donde $\tau_{u_s} = c_u h L_0 / \mu_0$ es el parámetro de estabilización estático[245], $c_u > 0$ y $c_e > 0$ son constantes algorítmicas adimensionales y $\mu_0 > 0$ es módulo de rigidez inicial al corte.

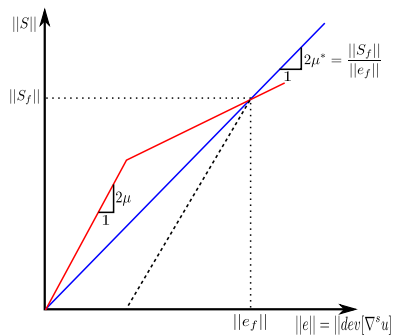


Figura 5.9: Gráfico de tensiones desviadoras vs. deformaciones desviadoras en un modelo elasto-plástico.

Por otra parte, Cervera[71] y Quino[156] coinciden que cuando se desarrolla el flujo plástico, las deformaciones desviadoras totales, particularmente las plásticas, crecen con respecto a las tensiones desviadoras en forma considerablemente mayor que en régimen elástico. Este comportamiento sugiere la definición de un coeficiente μ^* que se puede interpretar como un módulo de rigidez al corte efectivo en la curva deformación-tensión desviadora tal y como se muestra en la figura 5.9. Este coeficiente representa el efecto del flujo plástico en la relación entre las tensiones desviadoras y las deformaciones desviadoras totales; por lo tanto, debe considerarse cuando se desarrolle el régimen plástico. Si las deformaciones plásticas son relativamente pequeñas en comparación con las elásticas se puede obtener resultados adecuados y un comportamiento estable del campo de la presión utilizando el módulo de cizallamiento elástico μ . En caso contrario, en los procesos de plasticidad con alta concentración de deformaciones se pueden presentar un pequeño bloqueo volumétrico producto del flujo plástico. Una manera de contrarrestar este efecto es hacer que los parámetros de estabilización varíen en la misma proporción que lo hace μ^* . De esta manera, el módulo de cizallamiento es:

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} \mu & \text{en carga o descaraga elástica;} \\ \mu^* & \text{en carga plástica.} \end{cases} \quad (5.4.42)$$

Esto nos permite redefinir nuevamente los parámetros de estabilización para tomar en cuenta los efectos de la plasticidad, o sea:

$$\tau_{u_t} \approx \left(\frac{\rho}{\Delta t^2} + \frac{1}{\tilde{\tau}_{u_s}} \right)^{-1} \text{ y } \tau_\varepsilon \approx c_\varepsilon \frac{h}{L_0} \frac{\tilde{\mu}}{\mu_0} \quad (5.4.43)$$

siendo el parámetro de estabilización estático definido ahora como $\tilde{\tau}_{u_s} = c_u h L_0 / \tilde{\mu}$ [71]. Es evidente que cuando $\tilde{\mu}$ disminuye, el parámetro de estabilización de la subescala de los desplazamientos aumenta, lo que permite estabilizar el campo de las presiones aún en procesos no lineales con concentración de deformaciones. Por otra parte, observe que el valor de τ_{u_t} está acotado a un valor máximo cuando el parámetro de estabilización estático tiende a cero. Es muy fácil deducir que:

$$\lim_{\mu^* \rightarrow 0} \tau_{u_t} = \lim_{\mu^* \rightarrow 0} \left(\frac{\rho}{\Delta t^2} + \frac{1}{\tilde{\tau}_{u_s}} \right)^{-1} = \frac{\Delta t^2}{\rho} \quad (5.4.44)$$

cuya expresión es idéntica a la obtenida por Oñate et al. [298] pero empleando razonamientos distintos.

Los parámetros de estabilización se entenderán que son evaluados dentro de los elementos, pero es posible asumir que dichos valores sean constantes en una malla cuasi-uniforme. También es numéricamente factible realizar la proyección de los mismos, o sea $\tau_u^h = \mathcal{P}_h(\tau_u^e)$ y $\tau_\varepsilon^h = \mathcal{P}_h(\tau_\varepsilon^e)$, siendo \mathcal{P}_h la proyección \mathcal{L}^2 sobre el espacio de los elementos finitos. Tal estrategia es útil cuando tiene lugar procesos irreversibles y localización de deformaciones. La experiencia numérica en análisis estáticos muestra que los valores de c_ε y c_u se pueden escoger en el rango de $[0.01, 1.0]$.

Comentario 3:

Dado que los esquemas explícitos son condicionalmente estables, la variación rápida de μ^ puede desestabilizar el esquema explícito. Una manera sencilla de abordar este problema es redefinir nuevamente el módulo de cizallamiento μ^* introduciendo un coeficiente de retardo $\zeta \in [0, 1]$. Por lo tanto, este nuevo coeficiente de cizallamiento $\tilde{\mu}^*$ está dado por una expresión del tipo:*

$$\tilde{\mu}^{*n+1} = (1 - \zeta)\mu^{*n+1} - \zeta\mu^{*n} \quad (5.4.45)$$

5.4.4.5. Ecuación discreta y estabilizada de la ecuación de movimiento. Formulación mixta estabilizada explícita

Para definir la ecuación discreta y estabilizada de la ecuación de movimiento (5.4.21), la misma tiene que ser discretizada en el tiempo. Interesa resolver esta ecuación mediante el esquema de Diferencias Centradas (DC) y empleando el método de estabilización de OSS. Al igual que la formulación irreducible, los desplazamientos \mathbf{u} y deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ en el tiempo t^{n+1} se computan a partir de la ecuación de equilibrio dinámico evaluada en el tiempo t^n . Naturalmente este método mixto-implícito es condicionalmente estable pero superior a su contraparte irreducible. En consecuencia, la ecuación (5.4.21) se expresa en el tiempo t^n como:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\omega}_h : \boldsymbol{\sigma}_h^n d\Omega + \int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\omega}_h : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^n d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_h \cdot \rho (\ddot{\mathbf{u}}_h^n + \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^n) d\Omega = \mathbf{f}_{ext}^n(\boldsymbol{\omega}_h) \quad \forall \boldsymbol{\omega}_h \quad (5.4.46)$$

Al emplear el método de estabilización OSS, el término $\int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_h \cdot \rho \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^n d\Omega = \mathbf{0}$ por la condición de ortogonalidad, lo que simplifica la ecuación de equilibrio. Sustituyendo la ecuación (5.4.39) en (5.4.46), la ecuación discreta y estabilizada de equilibrio dinámico evaluada en $t = t^n$ se escribe como:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\omega}_h : \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_h^n) : \boldsymbol{\varepsilon}_h^n d\Omega + \tau_{\varepsilon}^n \int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\omega}_h : \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_h^n) : (\nabla^s \mathbf{u}_h^n - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h^n) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_h \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}_h^n d\Omega = \mathbf{f}_{ext}^n(\boldsymbol{\omega}_h) \quad \forall \boldsymbol{\omega}_h \quad (5.4.47)$$

Por otra parte, sustituyendo la ecuación (5.4.39) en la ecuación (5.4.23) evaluada en t^{n+1} se obtiene:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma}_h \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_h^{n+1} d\Omega + \tau_{\varepsilon}^{n+1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma}_h \cdot (\nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h^{n+1}) d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma}_h \cdot \nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}_h) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} d\Omega \quad (5.4.48)$$

Por la propiedad de idempotencia del operador de proyección, es decir, $\mathcal{P}_h(\mathcal{P}_h(\bullet)) = \mathcal{P}_h((\bullet)_h) = (\bullet)_h$, y tomando en cuenta que la sub-escala de los desplazamientos en t^{n+1} está dado por la ecuación (5.4.38) o (5.4.40), las deformaciones continuas $\boldsymbol{\varepsilon}_h^{n+1}$ se expresa finalmente:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma}_h \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_h^{n+1} d\Omega &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma}_h \cdot \nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1} d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}_h) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} d\Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}_h^{n+1} &= \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h^{n+1} - \mathcal{P}_h((\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}_h) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \end{aligned} \quad (5.4.49)$$

Si no se considera la sub-escala de los desplazamientos, el segundo término de la ecuación (5.4.49) es nulo, obteniéndose que $\boldsymbol{\varepsilon}_h^{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h^{n+1} = \mathcal{P}_h(\nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1})$, es decir; las deformaciones continuas no son más que la proyección \mathcal{L}^2 de las deformaciones discontinuas $\nabla^s \mathbf{u}_h$. Por otro lado, dado que el segundo término del lado derecho de la ecuación (5.4.49) es pequeño frente a $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h^{n+1}$, se puede tomar $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_h \approx \boldsymbol{\varepsilon}_h$. En tal caso, la ecuación de movimiento estabilizada de equilibrio dinámico en (5.4.48) se reescribe como:

$$(1 - \tau_{\varepsilon}^n) \int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\omega}_h : \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_h^n) : \boldsymbol{\varepsilon}_h^n d\Omega + \tau_{\varepsilon}^n \int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\omega}_h : \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_h^n) : (\nabla^s \mathbf{u}_h^n) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_h \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}_h^n d\Omega = \mathbf{f}_{ext}^n(\boldsymbol{\omega}_h) \quad \forall \boldsymbol{\omega}_h \quad (5.4.50)$$

Reagrupando los términos, se obtiene la expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_h^{stab,n} = (1 - \tau_{\varepsilon}) \boldsymbol{\varepsilon}_h^n - \tau_{\varepsilon} \nabla^s \mathbf{u}_h^n \quad (5.4.51)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\omega}_h : \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_h^n) : \boldsymbol{\varepsilon}_h^{stab,n} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_h \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}_h^n d\Omega = \mathbf{f}_{ext}^n(\boldsymbol{\omega}_h) \quad (5.4.52)$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}^{stab}$ son las *deformaciones estabilizadas*, $\boldsymbol{\sigma}^{stab} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^{stab}$ son las *tensiones estabilizadas* y por último, la expresión $\mathbf{f}_{int}^{stab} = \int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\omega}_h : \boldsymbol{\sigma}^{stab} d\Omega$ es el vector de *fuerzas internas estabilizadas*. Esto permite reescribir la ecuación (5.4.52) como:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_h \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}_h^n d\Omega = \mathbf{f}_{ext}^n(\boldsymbol{\omega}_h) - \mathbf{f}_{int}^{stab,n}(\boldsymbol{\omega}_h) \quad (5.4.53)$$

Si se toman en cuenta las fuerzas viscosas, la ecuación (5.4.53) toma el formato matricial de equilibrio dinámico:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_h^n + \mathbf{D} \dot{\mathbf{u}}_h^n = \mathbf{f}_{ext}^n - \mathbf{f}_{int}^{stab,n} \quad (5.4.54)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa y \mathbf{D} la matriz de amortiguamiento. Nótese, y es punto clave de la formulación propuesta, que los desplazamientos \mathbf{u}_h^{n+1} se obtienen a partir de los valores del paso t^n y más específicamente de $\boldsymbol{\epsilon}_h^{stab,n}$, por lo que la ecuación (5.4.49) es perfectamente compatible con un esquema explícito. Por ende, el problema en cuestión queda completamente definido y desacoplado. Una vez se computen los valores de los desplazamientos \mathbf{u}_h^{n+1} , seguidamente se computan el valor de los desplazamientos de la sub-escala $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ y por último los valores de las deformaciones nodales $\boldsymbol{\epsilon}_h^{n+1}$ con la ecuación (5.4.49). Este esquema es completamente explícito y superior a la formulación irreducible estándar y sólo requiere la resolución de un sistema diagonal de ecuaciones, lo que es una gran ventaja del método propuesto. A partir de ahora, a esta formulación propuesta la denominaremos *Método De Elementos Finitos Mixtos Explícitos* (Mixed Explicit Finite Element Method) o simplemente **MEX-FEM**, por sus siglas en inglés. Cuando no se considere la sub-escala de los desplazamientos ($\tilde{\mathbf{u}} = 0$) le llamaremos Mex-Fem estándar.

5.4.5. Aspectos de implementación computacional

La integración temporal es efectiva si las matrices de masa \mathbf{M} en (5.4.66) es diagonal y la matriz de amortiguamiento \mathbf{D} es la matriz de amortiguamiento de Rayleigh. Por otra parte, si las operaciones computacionales son realizadas a nivel de elementos y nodos de la malla de elementos finitos, una implementación paralela de un código explícito resulta relativamente fácil.

Considere ahora un elemento tetraedro de cuatro nodos empleando las mismas funciones lineales de interpolación para los desplazamientos y deformaciones. Al contrario que su contraparte irreducible, las deformaciones no son constantes dentro del elemento. A fin de evaluar correctamente las integrales sobre el dominio de los elementos finitos Ω_e se requieren cuatro punto de integración. En nuestro caso hemos empleado una cuadratura cerrada Gauss-Lobatto, en la cual los puntos de Gauss se sitúan sobre los nodos de los elementos finitos. Nótese que al emplear el método de Galerkin, las funciones de prueba $\boldsymbol{\omega}_h$ para el espacio de los desplazamientos y $\boldsymbol{\gamma}_h$ para el espacio de las deformaciones son las funciones de interpolación, convencionalmente escritas en notación matricial como $\mathbf{N}_{\alpha} = [\mathbf{N}_{\alpha}^1 \mathbf{N}_{\alpha}^2 \mathbf{N}_{\alpha}^3 \mathbf{N}_{\alpha}^4] \forall \alpha \in \mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}$. Los desplazamientos y las deformaciones nodales dentro del elemento se interpolan como:

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^4 \mathbf{N}_u^i \mathbf{u}_h^i \text{ y } \boldsymbol{\epsilon}_h = \sum_{i=1}^4 \mathbf{N}_{\epsilon}^i \boldsymbol{\epsilon}_h^i \quad (5.4.55)$$

siendo \mathbf{N}_u^i la submatriz diagonal de 3×3 ($\mathbf{N}_u^i = \text{diag}\{N_i, N_i, N_i\}$) de las funciones de interpolación del campo de los desplazamientos en el nodo i ($\mathbf{u}_h^i = \{u_{x,h}^i, u_{y,h}^i, u_{z,h}^i\}$) y \mathbf{N}_{ϵ}^i la submatriz diagonal de 6×6 ($\mathbf{N}_{\epsilon}^i = \text{diag}\{N_i, N_i, N_i, N_i, N_i, N_i\}$) de las funciones de interpolación del campo de las deformaciones en el nodo i ($\boldsymbol{\epsilon}_h^i = \{\epsilon_{xx,h}^i, \epsilon_{yy,h}^i, \epsilon_{zz,h}^i, \epsilon_{xy,h}^i, \epsilon_{xz,h}^i, \epsilon_{yz,h}^i\}$).

Por otra parte, en la ecuación (5.4.53), $\nabla^s \omega_h = \mathbf{B}_u$ es el clásico operador matricial de gradiente simétrico en el cual $\mathbf{B}_u = [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4]$, donde cada sub-matriz \mathbf{B}_i se escribe como:

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Z} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial X} & \frac{\partial N_i}{\partial Z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Y} & \frac{\partial N_i}{\partial X} \end{pmatrix}^T \quad (5.4.56)$$

De igual manera el operador de divergencia $\nabla \cdot \gamma_h$ en (5.4.49) toma la forma de $\mathbf{B}_\varepsilon = [\mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_3^T \mathbf{B}_4^T]$. Es común emplear en un método explícito de integración el computo de unas *velocidades intermedias* y evaluar el campo de las aceleraciones en t^n en función de ellos. Este proceso es completamente equivalente a evaluar las aceleraciones con la ecuación 3.1.7. El proceso de integración temporal de la ecuación de movimiento en un esquema explícito-mixto es idéntico al procedimiento realizado en un esquema irreducible, salvo que se requieren fundamentalmente dos pasos adicionales (4 y 5), los cuales se describen a continuación:

- 1. Cómputo de las fuerzas internas estabilizadas $\mathbf{f}_{int}^{stab,n}$.
- 2. Cómputo de las velocidades intermedias:

$$\dot{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}} = [2\mathbf{M} + \Delta t \mathbf{D}]^{-1} [(2\mathbf{M} - \Delta t \mathbf{D}) \dot{\mathbf{u}}_h^{n-\frac{1}{2}} + 2\Delta t (\mathbf{f}_{ext}^n - \mathbf{f}_{int}^{stab,n})]$$
- 3. Actualización de los desplazamientos $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_h^{n+\frac{1}{2}}$.
- 4. Evaluación de la sub-escala de los desplazamientos $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ empleando (5.4.38) o (5.4.40)
- 5. Actualización de las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}_h^{n+1}$ con (5.4.49).
- 6. Ir a siguiente paso.

Cuadro 5.4.1: Proceso de integración explícita mixta.

Sin embargo, para evitar realizar operaciones computacionales adicionales, los pasos 4 y 5 pueden ejecutarse en única rutina de cálculo. Más aún, pueden aplicarse técnicas de paralización computacional ya que las operaciones involucradas se realizan a nivel de elementos y nodos de la malla. Nuestra formulación puede ser incorporada en cualquier código de elementos finitos explícitos agregando estos pasos y modificando adecuadamente las formulaciones de EF para que tomen en cuenta las deformaciones estabilizadas y sin necesidad alguna de retocar completamente el código. El razonamiento importante es que el procedimiento de integración en el tiempo de un esquema explícito mixto se realiza de manera idéntica al caso irreducible (incluyendo las fuerzas de contacto), con apenas agregar una subrutina que compute las proyección de las deformaciones y las deformaciones estabilizadas. Destacamos que el cálculo de las proyecciones es muy barato, el coste por paso de tiempo del esquema propuesto es muy similar a la del algoritmo irreducible, por lo que es muy interesante en vista de la ventaja de la precisión garantizada por la formulación mixta.

5.4.5.1. Algunas expresiones matriciales de equilibrio dinámico en esquema mixto

Para fines de estudiar la estabilidad y la precisión de un esquema mixto explícito propuesto, interesa el caso particular en que no se considere la sub-escala de los desplazamientos en 5.4.10. La sub-escala de los desplazamientos es importante por su efecto estabilizador en el campo de las presiones cuando tiene lugar procesos de plasticidad o en materiales quasi-incompresibles. En un análisis elástico con valores de razón

de Poisson menores que 0.40, su efecto no es tan notorio. Teniendo en cuenta la definición $\boldsymbol{\varepsilon}^{stab}$ dado en la ecuación 5.4.51, la ecuación 5.4.54 puede reescribirse en un arreglo matricial como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_h(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}_h(t) + \underbrace{\mathbf{K}_\tau \mathbf{u}_h + \mathbf{G}_\tau^T \boldsymbol{\varepsilon}_h}_{\mathbf{f}^{int}(t)} = \mathbf{f}^{ext}(t) \quad (5.4.57a)$$

$$\check{\mathbf{G}}\mathbf{u}_h - \check{\mathbf{M}}\boldsymbol{\varepsilon}_h = \mathbf{0} \quad (5.4.57b)$$

donde 5.4.57a representa la ecuación estabilizada de equilibrio dinámico y 5.4.57b nos dice que $\boldsymbol{\varepsilon}_h$ es la proyección de $\nabla^s \mathbf{u}_h$. En las ecuaciones 5.4.57b, $\check{\mathbf{M}}$ es la matriz diagonal de masa asociada al campo de deformaciones; \mathbf{G}_τ y $\check{\mathbf{G}}$ son los operadores discretos de gradiente simétrico y \mathbf{K}_τ es la matriz de rigidez convencional. Para cualquier par de nodos A y B en un elemento, estas matrices pueden escribirse como:

$$\check{\mathbf{M}}^{AB} = \delta_{AB} \left(\sum_{\Omega_e}^B \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_A^T \mathbf{N}_B d\Omega \right) \quad (5.4.58)$$

$$\mathbf{G}_\tau^{AB} = (1 - \tau_\epsilon) \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_A^T \mathbf{C} \mathbf{N}_B d\Omega \quad (5.4.59)$$

$$\check{\mathbf{G}}^{AB} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_A^T \mathbf{N}_B d\Omega \quad (5.4.60)$$

$$\mathbf{K}_\tau^{AB} = \tau_\epsilon \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_A^T \mathbf{C} \mathbf{B}_B d\Omega \quad (5.4.61)$$

donde δ_{AB} es el símbolo de delta de Kronecker ($\delta_{AB} = 1$ for $A = B$, $\delta_{AB} = 0$ if $A \neq B$), \mathbf{N} son las funciones de forma del elemento y \mathbf{B} es el operador matricial convencional que contiene los derivados de las funciones de forma. Es conveniente reescribir las ecuaciones 5.4.57a y 5.4.57b como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_\tau & \mathbf{G}_\tau^T \\ \check{\mathbf{G}} & -\check{\mathbf{M}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{ext} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.4.62)$$

Este arreglo matricial es útil para aproximar mediante el cómputo de los valores propios el paso de tiempo crítico Δt_{cr}^{mix} en una formulación mixta explícita. Por este motivo introducimos las matrices

$$\mathbf{K}_{mix} := \begin{pmatrix} \mathbf{K}_\tau & \mathbf{G}_\tau^T \\ \check{\mathbf{G}} & -\check{\mathbf{M}} \end{pmatrix} \quad (5.4.63)$$

$$\mathbf{M}_{mix} := \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.4.64)$$

Escrito en esta forma, el sistema discreto es muy similar al desarrollado para el caso irreducible, excepto que ahora envuelven dos variables independientes, es decir, el campo de desplazamiento nodal \mathbf{u}_h y el campo de deformación nodal $\boldsymbol{\varepsilon}_h$. Sin embargo, obsérvese que como $\check{\mathbf{M}}$ es diagonal y la ecuación 5.4.57b no presenta ninguna dependencia del tiempo, podemos expresar formalmente las deformaciones en función del campo de los desplazamientos $\boldsymbol{\varepsilon}_h = \check{\mathbf{M}}_\tau^{-1} \check{\mathbf{G}}\mathbf{u}_h$ y sustituirlo en la ecuación estabilizada de equilibrio dinámico 5.4.57a. Esto nos permite introducir una nueva matriz de rigidez mixta, estabilizada y condensada $\overline{\mathbf{K}}$:

$$\overline{\mathbf{K}} := \mathbf{K}_\tau + \mathbf{G}_\tau^T \check{\mathbf{M}}_\tau^{-1} \check{\mathbf{G}} \quad (5.4.65)$$

por lo que es posible reescribir una forma equivalente de la ecuación 5.4.57a en términos únicamente de los desplazamientos nodales:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_h(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}_h(t) + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{u}_h = \mathbf{f}^{ext}(t) \quad (5.4.66)$$

En la práctica, en esquemas de integración explícita, estas matrices no se ensamblan, pero si son importantes para el estudio de la estabilidad y convergencia. Antes de continuar cabe señalar que el formato utilizado en la escritura del sistema discreto obtenido es ligeramente diferente del empleado en la referencia [245]. El enfoque que seguimos se deriva de utilizar una regla de integración nodal en el cálculo de la proyección. Obsérvese también que este enfoque no es atractivo para el caso de una formulación mixta implícita ya que resulta en una matriz no simétrica.

5.4.6. Método de los elementos finitos mixtos estabilizados explícitos. Caso II: Grandes Deformaciones

5.4.6.1. Formulación continua y discreta

Considérese a continuación problemas que involucren grandes deformaciones. El procedimiento a realizar es completamente análogo al de pequeñas deformaciones, salvo que ahora hay que considerar que la forma fuerte del problema en cuestión dado por las ecuaciones 5.4.1 y 5.4.2 tiene que expresarse en cualquiera de dos siguientes configuraciones : una material, habitualmente llamada configuración de referencia Ω_0 , y otra denominada configuración espacial Ω_t . El paso de una u otra expresión se hace mediante el cambio de variables en función de la transformación o ecuación de movimiento $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(t)$ y de las operaciones de transporte de tensores presentadas en el apéndice A. Es obvio también que la medida de deformación entre una configuración y otra es distinta, empleándose en la configuración material la medida de deformación de Green-Lagrange \mathbf{E} y en la configuración espacial la medida de deformación de Almansi \mathbf{e} .

En la configuración material, la ecuación mixta de equilibrio dinámico en forma local y las condiciones de contorno definen el problema en forma fuerte como:

Dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}} : \partial\Omega_0^\sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$, hallar $[\mathbf{u}, \mathbf{E}]^T \in \mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{T}_0$, para cada instante de tiempo $t \in \mathbb{I} = [0, T]$, tales que:

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \text{ en } \Omega_0 \quad (5.4.67)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) - \mathbf{E}(\mathbf{u}) = 0 \text{ en } \Omega_0 \quad (5.4.68)$$

siendo \mathbf{P} el primer tensor de Piola-Kirchhoff que viene dado por la relación¹⁴ $\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$ y una relación constitutiva del tipo $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c} : \mathbf{e}$ siendo $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Kirchhoff; $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{x}$ es el gradiente de deformación, $J = \det(\mathbf{F})$ se le conoce como Jacobiano y $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ es la medida de deformaciones de Green-Lagrange dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C}(\mathbf{X}) - \mathbf{I}) \quad (5.4.69)$$

siendo $\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ el tensor de deformación de Cauchy-Green¹⁵. Es posible también expresar el tensor de Green-Lagrange en función del tensor gradiente de los desplazamientos como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left((\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})^T + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}) + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})^T \cdot (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}) \right) \quad (5.4.70)$$

¹⁴Recuerde que $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ y $\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$.

¹⁵A fin de evitar confusión en las notaciones, escribiremos \mathbf{C} o $\mathbf{C}(\mathbf{E})$ como el tensor constitutivo y $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ el el tensor de deformación de Cauchy-Green

Al igual que el caso de pequeñas deformaciones, las ecuaciones 5.4.67 y 5.4.68 están sujetas a unas condiciones iniciales de contorno tales que:

$$\dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \text{ y } \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \text{ en } \partial\Omega_0^u \quad (5.4.71)$$

$$\bar{\mathbf{t}}|_{t=0} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 = \bar{\mathbf{t}}_0 \text{ en } \partial\Omega_0^\sigma \quad (5.4.72)$$

y \mathbf{n}_0 es la normal saliente en $\partial\Omega_0^\sigma$. En la configuración espacial Ω_t , las variables tales como las fuerzas másicas, las tracciones prescritas, etc., expresadas en función de las coordenadas espaciales (indicadas mediante el subíndice t), la ecuación fuerte y mixta de equilibrio dinámico se escribe como: dados los valores prescritos de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}}_t : \partial\Omega_t^\sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$, hallar $[\mathbf{u}, \mathbf{e}]^T \in \mathcal{W} = \mathcal{V} \times \mathcal{T}$ en cualquier instante de tiempo $t \in \mathbb{I} = [0, T]$ tales que:

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}_t = \rho_t \ddot{\mathbf{u}} \text{ en } \Omega_t \quad (5.4.73)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) - \mathbf{e}(\mathbf{u}) = 0 \text{ en } \Omega_t \quad (5.4.74)$$

de acuerdo con las condiciones de contorno

$$\dot{\mathbf{u}}|_t = \mathbf{v}_t \text{ y } \mathbf{u}|_t = \mathbf{u}_t \text{ en } \partial\Omega_t^u \quad (5.4.75)$$

$$\bar{\mathbf{t}}|_t = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t = \bar{\mathbf{t}}_t \text{ en } \partial\Omega_t^\sigma \quad (5.4.76)$$

siendo $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ el tensor de Almansi:

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (5.4.77)$$

$$(5.4.78)$$

donde $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ es el tensor izquierdo de deformación de Cauchy-Green y \mathbf{n}_t es el vector normal unitario a $\partial\Omega_t$.

5.4.6.2. Discretización espacial. Formulación débil

La forma débil de la ecuación de equilibrio dinámico se puede expresar tanto en la configuración material como en la configuración espacial. Para plantear la forma débil es necesario definir el espacio de funciones de ponderación o variaciones admisibles. Este espacio contiene los desplazamientos $\boldsymbol{\omega}$ y deformaciones $\boldsymbol{\gamma}$ que, superpuestos en la configuración deformada Ω_t , verifican la condición de contorno en $\partial\Omega_t^u$, pero también pueden referenciarse respecto a las coordenadas materiales. En coordenadas materiales se define el espacio de desplazamientos y deformaciones admisibles como:

$$\mathcal{V}_0 = \{\boldsymbol{\omega}_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega_0) | \boldsymbol{\omega}_0(\Omega_0) = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega_0^u\} \quad (5.4.79)$$

$$\mathcal{T}_0 = \{\boldsymbol{\gamma}_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega_0) | \boldsymbol{\gamma}_0(\Omega_0) = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega_0^u\} \quad (5.4.80)$$

en donde las funciones de ponderación $\boldsymbol{\omega}_0$ y $\boldsymbol{\gamma}_0$ son independientes del tiempo. Por tanto, después de realizar las respectivas integraciones por partes, la formulación variacional del problema en su descripción material queda descrito como:

$$\int_{\Omega_0} \nabla_x \boldsymbol{\omega}_0 : \mathbf{P} \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega_0 = \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{b}_0 \, d\Omega_0 \quad \forall \boldsymbol{\omega}_0 \quad (5.4.81)$$

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\gamma}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\gamma}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) \, d\Omega_0 = 0 \quad \forall \boldsymbol{\gamma}_0 \quad (5.4.82)$$

o en su descripción espacial como:

$$\int_{\Omega_t} \nabla_x \omega_t^s : \sigma \, d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \omega_t \cdot \rho \ddot{u} \, d\Omega_t = \int_{\partial\Omega_t} \omega_t \cdot \bar{t} \, d\Gamma_t + \int_{\Omega_t} \omega_t \cdot b \, d\Omega_t \quad \forall \omega_t \quad (5.4.83)$$

$$\int_{\Omega_t} \gamma_t \cdot e(x) \, d\Omega_t - \int_{\Omega_t} \gamma_t \cdot e(u) \, d\Omega_t = 0 \quad \forall \gamma_t \quad (5.4.84)$$

en donde ω_t y γ_t son las funciones de ponderación admisibles en la configuración espacial. Todos los integrandos en estas ecuaciones son magnitudes escalares y, por lo tanto, los valores correspondientes no dependen de la configuración o de las coordenadas en donde se describa. Dada la objetividad del integrando, las expresiones son equivalentes. Sin embargo, aunque la descripción material y la descripción espacial son equivalentes, desde el punto de vista de la implementación computacional, las diferencias entre estas alternativas se hacen notables en las formulaciones mixtas y, en particular, en aquellas que usan métodos implícitos en donde se tiene que reformular la matriz de rigidez. Las ecuaciones 5.4.81 y 5.4.82 son muy prácticas ya que la integración del dominio no depende de la solución. En esta tesis hacemos uso de la misma.

Para definir la contraparte discreta del problema empleando el método de Galerkin, al igual que el caso de la formulación mixta en pequeñas deformaciones, se requiere introducir apropiadamente un campo de desplazamientos discretos $u_h \in \omega_{h,0}$ y deformaciones discretas $E_h \in \gamma_{h,0}$ en la coordenada material o en su contraparte espacial dados por $u_h \in \omega_{h,t}$ y deformaciones $e_h \in \gamma_{h,t}$. En la configuración material esto se lee como:

$$\int_{\Omega_0} \nabla_X \omega_{h,0} : P \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \omega_{h,0} \cdot \rho_0 \ddot{u} \, d\Omega_0 = \int_{\partial\Omega_0} \omega_{h,0} \cdot \bar{t}_0 \, d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \omega_{h,0} \cdot b_0 \, d\Omega_0 \quad \forall \omega_{h,0} \quad (5.4.85)$$

$$\int_{\Omega_0} \gamma_{h,0} \cdot E(X) \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \gamma_{h,0} \cdot E(u) \, d\Omega_0 = 0 \quad \forall \gamma_{h,0} \quad (5.4.86)$$

o en su contraparte espacial como:

$$\int_{\Omega_t} \nabla_x^s \omega_{h,t} : \sigma \, d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \omega_{h,t} \cdot \rho_t \ddot{u} \, d\Omega_t = \int_{\partial\Omega_t} \omega_{h,t} \cdot \bar{t} \, d\Gamma_t + \int_{\Omega_t} \omega_{h,t} \cdot b \, d\Omega_t \quad \forall \omega_{h,t} \quad (5.4.87)$$

$$\int_{\Omega_t} \gamma_{h,t} \cdot e(x) \, d\Omega_t - \int_{\Omega_t} \gamma_{h,t} \cdot e(u) \, d\Omega_t = 0 \quad \forall \gamma_{h,t} \quad (5.4.88)$$

Sin embargo, ya que el método está basado en el método de Galerkin está subordinado a la condición de LBB; por consiguiente, para eludir este inconveniente se emplea nuevamente el Método de las Sub-escalas Variacionales (VMS).

5.4.6.3. Formulación en multi-escalas

La solución continua en la coordenada material se aproxima como:

$$u = u_h + \tilde{u} \quad (5.4.89)$$

$$E(X) = E_h + \tilde{E} \quad (5.4.90)$$

donde $E_h \in \mathcal{T}_{h,0}$ y $(u_h, \dot{u}_h, \ddot{u}_h) \in \mathcal{V}_{h,0}$ son las componentes discretas del campo de deformaciones de Green-Lagrange y desplazamientos (incluida sus derivadas temporales) respectivamente, mientras que $\tilde{E} \in \tilde{\mathcal{T}}_0$ y $(\tilde{u}, \dot{\tilde{u}}, \ddot{\tilde{u}}) \in \tilde{\mathcal{V}}_0$ son las deformaciones y desplazamientos (incluida sus derivadas temporales) correspondientes al espacio de sub-escalas $\tilde{\mathcal{T}}_0$ y $\tilde{\mathcal{V}}_0$. Al considerar los correspondientes funciones de prueba de las sub-escalas

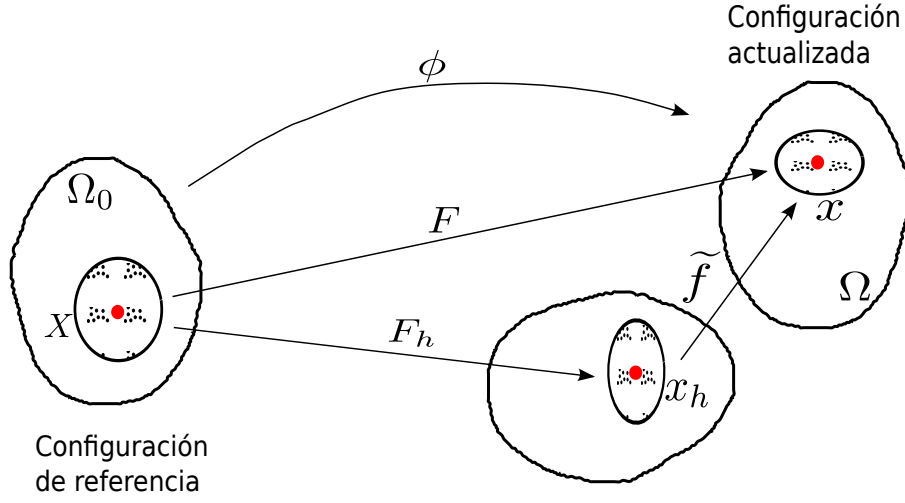


Figura 5.10: Esquema de las relaciones cinemáticas mediante sub-escalas.

$\tilde{\omega}_0 \in \tilde{\mathcal{V}}_0$ y $\tilde{\gamma}_0 \in \tilde{\mathcal{T}}_0$, nótese que la aproximación de la solución en el campo de las deformaciones y desplazamientos se extiende ahora a $\mathcal{T}_0 \simeq \mathcal{T}_{h,0} \oplus \tilde{\mathcal{T}}_0$ y $\mathcal{V}_0 \simeq \mathcal{V}_{h,0} \oplus \tilde{\mathcal{V}}_0$. Las relaciones cinemáticas entre las componentes de los desplazamientos en el espacio de los elementos finitos y en el espacio de las sub-escalas respectivamente, se definen a partir de:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \quad (5.4.91)$$

$$\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{X} + \mathbf{u}_h}_{\mathbf{x}_h} + \tilde{\mathbf{u}} \quad (5.4.92)$$

donde \mathbf{X} es la coordenada de los puntos materiales en la configuración de referencia, \mathbf{x} la coordenada espacial y \mathbf{x}_h el valor de esta coordenada evaluado en función de los desplazamientos calculados en el espacio de los elementos finitos. Las relaciones cinemáticas en función del gradiente de deformaciones se puede expresar como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \mathbf{J}_h + \tilde{\mathbf{J}} \quad (5.4.93)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_h) + \tilde{\mathbf{J}} \quad (5.4.94)$$

siendo $\mathbf{J}_h = \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial \mathbf{X}}$ y $\tilde{\mathbf{J}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{X}}$ son los tensores de gradiente de desplazamientos correspondientes a las escala de los elementos finitos y la sub-escala de los desplazamientos respectivamente. Mediante algunas manipulaciones algebraicas se obtiene:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_h))^{-1})\mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \quad (5.4.95)$$

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{f}}\mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \quad (5.4.96)$$

Esta expresión multiplicativa explica la interpretación de $\tilde{\mathbf{f}}$ en el entorno local de un punto material como el gradiente de deformaciones relativo a la configuración deformada caracterizado por $\mathbf{F}(\mathbf{u}_h)$ [156] (véase figura 5.10). Ahora, el problema en el medio continuo en la configuración material se transforma en:

Hallar $[\mathbf{u}_h, \mathbf{E}_h]^T \in \mathcal{W}_{h,0} = \mathcal{V}_{h,0} \times \mathcal{T}_{h,0}$ y $[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{E}}]^T \in \tilde{\mathcal{W}}_0 = \tilde{\mathcal{V}}_0 \times \tilde{\mathcal{T}}_0$ dados los valores prescritos de cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}}_0 : \partial\Omega_0^u \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$, los desplazamientos en $\partial\Omega_0^\sigma$ y las fuerzas másicas $\mathbf{b}_0 : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$ para cualquier instante de tiempo $t \in \mathbb{I} = [0, T]$ tales que:

$$\int_{\Omega_0} \nabla_X \boldsymbol{\omega}_{h,0} : \mathbf{P}_h d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \nabla_X \boldsymbol{\omega}_{h,0} : \tilde{\mathbf{P}} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\omega}_{h,0} \cdot \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h d\Omega_0 = \mathbf{f}_{ext}(\boldsymbol{\omega}_{h,0}) \quad \forall \boldsymbol{\omega}_{h,0} \quad (5.4.97)$$

$$\int_{\Omega_0} \nabla_X \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 : \mathbf{P}_h d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \nabla_X \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 : \tilde{\mathbf{P}} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \cdot \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h d\Omega_0 = \mathbf{f}_{ext}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0) \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \quad (5.4.98)$$

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\gamma}_{h,0} \cdot \mathbf{E}_h d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\gamma}_{h,0} \cdot \tilde{\mathbf{E}} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\gamma}_{h,0} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) d\Omega_0 \quad \forall \boldsymbol{\gamma}_{h,0} \quad (5.4.99)$$

$$\int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0 \cdot \mathbf{E}_h d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{E}} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) d\Omega_0 \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0 \quad (5.4.100)$$

Las fuerzas externas $\mathbf{f}_{ext}(\boldsymbol{\omega}_{h,0})$ en la configuración material Ω_0 se escribe de la forma

$$\mathbf{f}_{ext}(\boldsymbol{\omega}_{h,0}) = \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{\omega}_{h,0} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 d\Gamma_0 + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\omega}_{h,0} \cdot \mathbf{b}_0 d\Omega_0 \quad (5.4.101)$$

Obsérvese que en la ecuación 5.4.97 y 5.4.98 se ha descompuesto el primer tensor Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}(\mathbf{E}) = \mathbf{P}_h(\mathbf{E}_h) + \tilde{\mathbf{P}}$ en sus componentes asociadas a las deformaciones en el espacio de los elementos finitos y las sub-escalas respectivamente ¹⁶. Esto se ha hecho tomando en cuenta lo expresado en el *Comentario 2*.

Tal como se ha visto en las secciones anteriores, parte del procedimiento consiste en identificar los efectos de la sub-escalas en relación con la escala de los elementos finitos. Esto se debe hacer tanto en las expresiones 5.4.98 y 5.4.100 en el espacio de las sub-escalas como en las expresiones 5.4.97 y 5.4.99 para evaluar el efecto de las sub-escalas en el espacio de los elementos finitos. El problema es que en el rango de las deformaciones finitas en conjunto con modelos constitutivos de plasticidad o daño, presentan tanto la no linealidad geométrica con respecto a los desplazamientos como la no-linealidad del material. La no linealidad de estas ecuaciones dificulta identificar estos efectos y la relación que existe entre ellos. Con el fin de obtener una formulación aproximada y a la vez un bajo costo computacional, es necesario realizar una serie de simplificaciones a partir de estas expresiones. Quino[156] desarrolló en el marco de la formulación mixta $(\mathbf{u} - p)$ en grandes deformaciones una serie de simplificaciones para abordar este inconveniente y se emplea en este trabajo para extender MEX-FEM a grandes deformaciones. Primero, si se considera que $\mathbf{F} \cong \mathbf{F}(\mathbf{u}_h)$ y a la vez, se reemplaza la expresión del gradiente de deformaciones $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}_h + \tilde{\mathbf{J}}$ en el tensor derecho de Cauchy-Green $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{X}) &= (\mathbf{I} + \mathbf{J}_h + \tilde{\mathbf{J}})^T (\mathbf{I} + \mathbf{J}_h^T + \tilde{\mathbf{J}}^T) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{J}_h^T (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{J}}) + (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{J}}^T) \mathbf{J}_h + \mathbf{J}_h^T \mathbf{J}_h + \tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{J}}^T + \tilde{\mathbf{J}}^T \tilde{\mathbf{J}} \\ &\approx \mathbf{I} + \mathbf{J}_h^T \overbrace{(\mathbf{I} + ((\mathbf{F} - \mathbf{F}_h)))}^{\cong \mathbf{I}} + \overbrace{(\mathbf{I} + (\mathbf{F} - \mathbf{F}_h)^T)}^{\cong \mathbf{I}} \mathbf{J}_h^T + \mathbf{J}_h^T \mathbf{J}_h + \tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{J}}^T + \tilde{\mathbf{J}}^T \tilde{\mathbf{J}} \\ &\approx \mathbf{I} + \mathbf{J}_h + \mathbf{J}_h^T + \mathbf{J}_h^T \mathbf{J}_h + \tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{J}}^T + \tilde{\mathbf{J}}^T \tilde{\mathbf{J}} \end{aligned} \quad (5.4.102)$$

Despreciando los términos cuadráticos en $\tilde{\mathbf{J}}$, se obtiene finalmente la expresión aproximada del tensor derecho de Cauchy-Green:

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) \approx \mathbf{C}(\mathbf{u}_h) + 2\nabla_X^s \tilde{\mathbf{u}} \quad (5.4.103)$$

¹⁶Se ha empleado el siguiente procedimiento algebraico: Si $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ y $\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{E}$ siendo $\mathbf{E} = \mathbf{E}_h + \tilde{\mathbf{E}}$, y tomando en cuenta lo escrito en el Comentario 2, entonces $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{C} : \mathbf{E}_h + \mathbf{F}\mathbf{C} : \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{P}_h + \tilde{\mathbf{P}}$. Por otra parte, llamamos \mathbf{P}_h a la tensión continua del primer tensor de Piola, aunque reconociendo que \mathbf{P}_h no es intrínsecamente éste, ya que está geoméricamente acoplados en su definición con \mathbf{F} .

El tensor de deformaciones de Green-Lagrange en términos del gradiente de los desplazamientos se aproxima como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{u}) &\approx \frac{1}{2} (\mathbf{C}(\mathbf{u}_h) + 2\nabla_X^s \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{I}) \\ &\approx \frac{1}{2} (\mathbf{C}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{I}) + \nabla_X^s \tilde{\mathbf{u}} \\ &\approx \mathbf{E}(\mathbf{u}_h) + \nabla_X^s \tilde{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (5.4.104)$$

Esta es la expresión simplificada que buscamos para la evaluación de las sub-escalas en las ecuaciones 5.4.98 y 5.4.100. Al igual que caso de pequeñas deformaciones y aplicando exactamente el mismo procedimiento que en la ecuación 5.4.23, la ecuación 5.4.99 puede re-expresarse como:

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\gamma}_{h,0} \cdot \mathbf{E}_h \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\gamma}_{h,0} \cdot \tilde{\mathbf{E}} \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\gamma}_{h,0} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}_h) \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} (\nabla_X \cdot \boldsymbol{\gamma}_{h,0}) \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega_0 \quad \forall \boldsymbol{\gamma}_{h,0} \quad (5.4.105)$$

Al plantear de esta manera la formulación mixta estabilizada explícita en deformaciones finitas se sigue el mismo procedimiento que en pequeñas deformaciones. Dada la equivalencia de las ecuaciones 5.4.81 y 5.4.82, es posible plantear el caso mixto explícito en la configuración espacial tomando en cuenta todas las simplificaciones realizadas anteriormente. Por otra parte, obsérvese también que si se desprecian los términos cuadráticos en $\mathbf{F}(\mathbf{u}_h)$ se recupera exactamente la formulación mixta estabilizada explícita en pequeñas deformaciones.

Por otro lado, dado que las ecuaciones 5.4.98 y 5.4.100 no se resuelven en el espacio de los elementos finitos, interesa evaluar al menos localmente una aproximación de la misma para obtener una estimación de los efectos de las sub-escalas cuya evaluación numérica en la ecuación de balance sea viable y no necesariamente calcular los valores de $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{u}}$ (o de $\tilde{\mathbf{e}}$ y $\tilde{\mathbf{u}}$ en la coordenada espacial).

De la misma manera en que se han definido los residuos en pequeñas deformaciones, definamos los residuos correspondientes a las componentes de los elementos finitos en la configuración material como¹⁷:

$$\mathbf{R}_{E,h} = \mathbf{E}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{E}_h \quad (5.4.106)$$

$$\mathbf{R}_{u,h} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h - \nabla_X \cdot \mathbf{P}_h - \mathbf{b}_0 \quad (5.4.107)$$

Esto nos permite escribir las ecuaciones (5.4.98) y (5.4.100) como:

$$\int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \cdot \nabla \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \mathbf{C}(\mathbf{E}_h) : \tilde{\mathbf{E}}) \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \cdot \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \cdot \mathbf{R}_{u,h} \, d\Omega_0 \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \quad (5.4.108)$$

$$\int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{E}} \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0 \cdot \nabla_X^s \tilde{\mathbf{u}} \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \cdot \mathbf{R}_{E,h} \, d\Omega_0 \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_0 \quad (5.4.109)$$

Obsérvese que con las simplificaciones asumidas, se obtiene una expresión análoga al caso de pequeñas deformaciones. Dada la equivalencia entre una otra configuración, las ecuaciones 5.4.108 y 5.4.109 también pueden ser planteadas en la configuración espacial. Los términos de la parte derecha de estas ecuaciones son las proyecciones $\mathcal{P}(\bullet)$ de los residuos sobre el espacio de las sub-escalas y relaciona la sub-escala $\tilde{\mathbf{E}}$ y $\tilde{\mathbf{u}}$ con el residuo de la ecuación diferencial aproximada por elementos finitos en la configuración material representado por $\mathbf{R}_{E,h}$ y $\mathbf{R}_{u,h}$. Por otra parte, dada la similitud de estas ecuaciones con el caso de pequeñas deformaciones, nos permite emplear los mismos razonamientos precedentes. Sean \mathcal{P}_u y \mathcal{P}_E las proyecciones correspondientes al espacio de las sub-escalas de los desplazamientos y deformaciones respectivamente, y dados que aparece

¹⁷ Dado que el 1^{er} tensor de Piola-Kirchhoff es un tensor no simétrico, los modelos constitutivos se expresan habitualmente en el espacio de tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}_h = \mathbf{c} : \mathbf{e}_h$ o del 2^{do} tensor de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}_h = \mathbf{C} : \mathbf{E}_h$.

nuevamente una segunda derivada temporal de los desplazamientos, el problema se lee ahora como: dados $\tilde{\mathbf{u}}^n$ y $\tilde{\mathbf{u}}^{n-1}$, hallar $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ y $\tilde{\mathbf{E}}^{n+1}$ tales que:

$$\mathcal{P}_u \left(\nabla \cdot (\mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \mathbf{C}(\mathbf{E}_h) : \tilde{\mathbf{E}}^{n+1}) - \frac{\rho}{\Delta t^2} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \right) = \mathcal{P}_u \left(\frac{\rho}{\Delta t^2} (2\tilde{\mathbf{u}}^n - \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}) + \mathbf{R}_{u,h}^n \right) \quad (5.4.110)$$

$$\mathcal{P}_\epsilon \left(\tilde{\mathbf{E}}^{n+1} - \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \right) = \mathcal{P}_\epsilon \left(\mathbf{R}_{E,h}^{n+1} \right) \quad (5.4.111)$$

A continuación se requiere aproximar el lado izquierdo de las ecuaciones (5.4.110) y (5.4.111) con sus correspondientes residuos del lado derecho. Aplicando exactamente el mismo procedimiento que el caso de pequeñas deformaciones, sin pérdida de generalidad, $\tilde{\mathbf{E}}^{n+1}$ y $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ pueden aproximarse dentro de cada elemento Ω_e finito por:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \approx \tau_{u_t} \frac{\rho}{\Delta t^2} (2\tilde{\mathbf{u}}^n - \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}) + \tau_{u_t} \mathcal{P}_u \left(-\mathbf{R}_{u,h}^n \right) \text{ en } \Omega_e \quad (5.4.112)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^{n+1} \approx \tau_\epsilon \mathcal{P}_\epsilon \left(\mathbf{R}_{E,h}^{n+1} \right) \text{ en } \Omega_e \quad (5.4.113)$$

donde τ_{u_t} y τ_ϵ son los parámetros de estabilización definidos de manera análoga a la ecuación 5.4.114; es decir:

$$\tau_{u_t} \approx \left(\frac{\rho}{\Delta t^2} + \frac{1}{\tau_{u_t}} \right)^{-1} \text{ y } \tau_\epsilon \approx c_\epsilon \frac{h}{L_0} \quad (5.4.114)$$

donde $\tau_{u_t} = c_u h L_0 / \check{\mu}$ es el parámetro de estabilización estático[245], $c_u > 0$ y $c_\epsilon > 0$ son constantes algorítmicas adimensionales y $\check{\mu}$ es módulo de rigidez al corte efectivo. La experiencia numérica muestra que variaciones de este parámetro en una formulación mixta en desplazamiento-presión $\mathbf{u} - p$ no son sensibles a este valor por lo que el mismo se puede simplificar y utilizar directamente en el cálculo el valor del modulo de corte del material, o sea $\check{\mu} = \mu_0$ [156]. Igualmente se ha observado que la variación de este parámetro dentro del rango de estabilidad en el esquema explícito son ligeramente sensible. Asimismo Oñate et al. [298] argumentan que las variaciones de $\check{\mu}$ de orden 30 veces o menores que su valor original, no afectan al resultado numérico, por lo que el uso directo del módulo de corte queda validado. De igual manera, estas asunciones validan el empleo del módulo secante al corte para la evaluación del parámetro de estabilización en la ecuación 5.4.43 cuando tiene lugar mecanismos plásticos.

Finalmente, empleando el método de las sub-escalas ortogonales OSS, despreciando los términos desviadores \mathbf{S}^{dev} en el segundo tensor de Piola Kirchhoff \mathbf{S} en la expresión $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S} = \mathbf{F}(\mathbf{S}^{dev} + \mathbf{S}^{vol})$ (siendo $\mathbf{S}^{dev} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{s}^{dev}\mathbf{F}^{-T}$, $\mathbf{S}^{vol} = pJ\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{X})$ y $p = \frac{1}{3}J^{-1}\mathbf{S} : \mathbf{C}(\mathbf{X})$) e introduciendo el coeficiente de disipación $\tilde{\xi}$ en la sub-escala de los desplazamientos, el valor de las sub-escalas están dados por:

$$\tilde{\mathbf{E}}^{n+1} \simeq \tau_\epsilon \left(\mathbf{E}(\mathbf{u}_h)^{n+1} - \mathcal{P}_h \left(\mathbf{E}(\mathbf{u}_h)^{n+1} \right) \right) = \tau_\epsilon \left(\mathbf{E}(\mathbf{u}_h)^{n+1} - \check{\mathbf{E}}_h^{n+1} \right) \quad (5.4.115)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \simeq \tau_{u_t} \frac{\rho}{\Delta t^2} \left((2 - \tilde{\xi})\tilde{\mathbf{u}}^n - (1 - \tilde{\xi})\tilde{\mathbf{u}}^{n-1} \right) + \tau_{u_t} \left(\nabla \cdot \mathbf{T}_h^n - \mathcal{P}_h \left(\nabla \cdot \mathbf{T}_h^n \right) \right) \quad (5.4.116)$$

siendo $\check{\mathbf{E}}_h^{n+1} = \mathcal{P}_h \left(\mathbf{E}(\mathbf{u}_h)^{n+1} \right)$ y $\mathbf{T}_h^n = \mathbf{F}^n \mathbf{S}_h^{vol,n}$. Obsérvese la analogía entre estas ecuaciones y la obtenida en pequeñas deformaciones. De igual manera, es fácil deducir que el valor de las sub-escalas en la configuración espacial están dados por:

$$\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} \simeq \tau_\epsilon \left(\mathbf{e}(\mathbf{u}_h)^{n+1} - \mathcal{P}_h \left(\mathbf{e}(\mathbf{u}_h)^{n+1} \right) \right) = \tau_\epsilon \left(\mathbf{e}(\mathbf{u}_h)^{n+1} - \check{\mathbf{e}}_h^{n+1} \right) \quad (5.4.117)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \simeq \tau_{u_t} \frac{\rho}{\Delta t^2} \left((2 - \tilde{\xi})\tilde{\mathbf{u}}^n - (1 - \tilde{\xi})\tilde{\mathbf{u}}^{n-1} \right) + \tau_{u_t} \left(\nabla p_h^n - \mathcal{P}_h \left(\nabla p_h^n \right) \right) \quad (5.4.118)$$

5.4.6.4. Fórmula estabilizada de la ecuación semi-discreta de movimiento en grandes deformaciones

La ventaja de asumir las simplificaciones anteriores es que la ecuación mixta final resultante de equilibrio dinámico en grandes deformaciones es análoga a la ecuación estabilizada de equilibrio dinámico en pequeñas deformaciones. Para definir la ecuación discreta y estabilizada de equilibrio dinámico (5.4.97), la misma requiere ser discretizada en el tiempo. Interesa resolver esta ecuación mediante el esquema de Diferencias Centradas (DC) y empleando el método de estabilización de OSS. Es decir, si sustituimos 5.4.115 y 5.4.116 en las ecuaciones 5.4.97 y 5.4.105 y después de unas cuantas manipulaciones algebraicas, la ecuación 5.4.97 se expresa en el tiempo t^n como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \nabla_X \boldsymbol{\omega}_{h,0} : \mathbf{FC}(\mathbf{E}_h) : \mathbf{E}_h d\Omega_0 + \tau_\varepsilon \int_{\Omega_0} \nabla_X \boldsymbol{\omega}_{h,0} : \mathbf{FC}(\mathbf{E}(\mathbf{u}_h)^n - \check{\mathbf{E}}_h^n) d\Omega_0 \\ + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\omega}_{h,0} \cdot \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h d\Omega_0 = f_{ext}(\boldsymbol{\omega}_{h,0}) \quad \forall \boldsymbol{\omega}_{h,0} \end{aligned} \quad (5.4.119)$$

Al emplear el método de estabilización OSS, el término $\int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_{h,0} \cdot \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^n d\Omega = \mathbf{0}$ por la condición de ortogonalidad. Por otra parte, sustituyendo la ecuación (5.4.115) en la ecuación (5.4.105) evaluada en t^{n+1} y empleando la propiedad idempotencia del operador de proyección se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\gamma}_{h,0} \cdot \mathbf{E}_h^{n+1} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\gamma}_{h,0} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}_h^{n+1}) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} (\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}_{h,0}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} d\Omega_0 \\ \mathbf{E}_h^{n+1} = \check{\mathbf{E}}_h^{n+1} - \mathcal{P}_h((\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma}_{h,0}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}) \end{aligned} \quad (5.4.120)$$

Si no se considera las sub-escalas de los desplazamientos, el segundo término de la ecuación (5.4.120) es nulo, obteniéndose que $\mathbf{E}_h^{n+1} = \check{\mathbf{E}}_h^{n+1} = \mathcal{P}_h(\mathbf{E}(\mathbf{u}_h)^{n+1})$, es decir; las deformaciones continuas no son más que la proyección \mathcal{L}^2 de las deformaciones Green-Lagrange $\mathbf{E}(\mathbf{u}_h)$. Por otro lado, dado que el segundo término del lado derecho de la ecuación (5.4.49) es pequeño en comparación con $\check{\mathbf{E}}_h^{n+1}$, podemos emplear la aproximación $\check{\mathbf{E}}_h \approx \mathbf{E}_h$. En tal caso, la ecuación estabilizada de equilibrio dinámico en grandes deformaciones (5.4.119) se reescribe como:

$$\begin{aligned} (1 - \tau_\varepsilon^n) \int_{\Omega_0} \nabla_X \boldsymbol{\omega}_{h,0} : \mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \mathbf{C}(\mathbf{E}_h) : \mathbf{E}_h^n d\Omega_0 + \tau_\varepsilon^n \int_{\Omega_0} \nabla_X \boldsymbol{\omega}_{h,0} : \mathbf{F}(\mathbf{u}_h) \mathbf{C}(\mathbf{E}_h^n) : \mathbf{E}(\mathbf{u}_h)^n d\Omega_0 \\ + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\omega}_{h,0} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}_h^n d\Omega_0 = f_{ext}^n(\boldsymbol{\omega}_h) \quad \forall \boldsymbol{\omega}_h \end{aligned} \quad (5.4.121)$$

Reagrupando los términos, se obtiene la expresión material estabilizada de movimiento en grandes deformaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_h^{stab,n} = (1 - \tau_\varepsilon) \mathbf{E}_h^n - \tau_\varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{u}_h)^n \\ \int_{\Omega_0} \nabla_X \boldsymbol{\omega}_{h,0} : \mathbf{FC}(\mathbf{E}_h^n) : \mathbf{E}_h^{stab,n} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\omega}_{h,0} \cdot \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^n d\Omega_0 = f_{ext}^n(\boldsymbol{\omega}_{h,0}) \\ \int_{\Omega_0} \nabla_X \boldsymbol{\omega}_{h,0} : \mathbf{P}_h^{stab,n} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\omega}_{h,0} \cdot \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h^n d\Omega_0 = f_{ext}^n(\boldsymbol{\omega}_{h,0}) \end{aligned} \quad (5.4.122)$$

Observe la similitud de la ecuación 5.4.122 con 5.4.53. El término $f_{int,0} = \int_{\Omega_0} \nabla_X \boldsymbol{\omega}_{h,0} : \mathbf{P}_h^{stab,n} d\Omega_0$ es el vector de fuerzas internas estabilizadas el cual se escribe como:

$$\mathbf{f}_{int,0} = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_0^T \mathbf{S}^{stab} d\Omega_0 \quad (5.4.123)$$

La matriz \mathbf{B}_0 es la matriz de los gradientes de funciones de forma usada en la formulación Total Langragiana y está compuesta por sub-matrices, cada una de ellas asociada a un nodo I de elemento finito Ω_e . Estas submatrices \mathbf{B}_0^I escritas en notación de Voigt toma la forma:

$$\mathbf{B}_0^I = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial N_I}{\partial Y} \frac{\partial x}{\partial X} \\ \frac{\partial N_I}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial N_I}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial X} \end{pmatrix} \quad (5.4.124)$$

Comentario 4:

La definición de una deformación nodal \mathbf{E}_h en la ecuación 5.4.120 sugiere la definición de un gradiente de deformación nodal \mathbf{F}_h . Este gradiente de deformación puede computarse empleando el concepto de descomposición polar y espectral del gradiente de deformación. Sin embargo, dado que la descomposición polar y espectral involucra más operaciones computacionales, el gradiente de deformación nodal puede aproximarse, sin pérdida de generalidad, como $\mathbf{F}_h \sim \mathcal{P}(\nabla_x \mathbf{x}_h)$, y es empleada en esta tesis para el cómputo de las fuerzas internas en 5.4.123.

Por otra parte, la ecuación 5.4.122 puede expresarse en su configuración espacial empleando las mismas simplificaciones anteriores. Resulta fácil demostrar que la ecuación estabilizada de equilibrio dinámico en su configuración espacial puede leerse como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \nabla_x \boldsymbol{\omega}_{h,t} : \mathbf{C}_t(\mathbf{e}_h^n) : \mathbf{e}_h^{stab,n} d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\omega}_{h,t} \cdot \rho_t \ddot{\mathbf{u}}_h^n d\Omega_t &= \mathbf{f}_{ext}^n(\boldsymbol{\omega}_{h,t}) \\ \int_{\Omega_t} \nabla_x \boldsymbol{\omega}_{h,t} : \boldsymbol{\sigma}^{stab,n} d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\omega}_{h,t} \cdot \rho_t \ddot{\mathbf{u}}_h^n d\Omega_t &= \mathbf{f}_{ext}^n(\boldsymbol{\omega}_{h,t}) \end{aligned} \quad (5.4.125)$$

El término $\mathbf{f}_{int,t} = \int_{\Omega_t} \nabla_x \boldsymbol{\omega}_{h,t} : \boldsymbol{\sigma}^{stab,n} d\Omega_t$ es el vector de fuerzas internas estabilizadas descritas en las coordenadas espaciales el cual se escribe como:

$$\mathbf{f}_{int,t} = \int_{\Omega_t} \mathbf{B}_t^T \boldsymbol{\sigma}^{stab} d\Omega_t \quad (5.4.126)$$

en donde \mathbf{B}_t es la matriz de gradiente referenciada con respecto a las coordenadas espaciales, el cual se escribe para el nodo I de un elemento finito como :

$$\mathbf{B}_t^I = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.4.127)$$

En las ecuaciones las 5.4.125 y 5.4.122 los integrandos son magnitudes escalares y por lo tanto los valores correspondientes no dependen de la configuración o de las coordenadas en donde se describan, diferenciándose sólo en su implementación numérica. De igual manera, el procedimiento de integración temporal en ambas configuraciones sigue exactamente la algoritmia presentada en el cuadro 5.4.1. La tabla 5.5 resume los términos correspondientes empleados en la configuración Langragiana Total y Langragiana Actualizada. A modo final de observación, en el caso de una formulación Total Langragiana es natural expresar la proyección

Entidad	Dominio de integración Ω	
	Total Lagrangiana Ω_0	Lagrangiana actualizada Ω_t
Deformación	$\mathbf{E}(\mathbf{u}_h) := \frac{1}{2} ((\mathbf{F}(\mathbf{u}_h))^T \mathbf{F}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{I})$	$\mathbf{e}(\mathbf{u}_h) := \frac{1}{2} (\mathbf{I} - (\mathbf{F}(\mathbf{u}_h))^{-T} (\mathbf{F}(\mathbf{u}_h))^{-1})$
Proyección	$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\gamma}_{0,h} \cdot (\mathbf{E}_h - \mathbf{E}(\mathbf{u}_h)) d\Omega_0 = \mathbf{0}$	$\int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma}_{h,t} \cdot (\mathbf{e}_h - \mathbf{e}(\mathbf{u}_h)) d\Omega = \mathbf{0}$
Deformación estabilizada	$\mathbf{E}^{stab} = (1 - \tau_\epsilon) \mathbf{E}_h + \mathbf{E}(\mathbf{u}_h)$	$\mathbf{e}^{stab} = (1 - \tau_\epsilon) \mathbf{e}_h + \mathbf{e}(\mathbf{u}_h)$
Tensión(irreducible)	(PK2) $\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E}(\mathbf{u}_h)$	Cauchy $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_t : \mathbf{e}(\mathbf{u}_h)$
Tensión(mixta)	(PK2) $\mathbf{S}^{stab} = \mathbf{C} : \mathbf{E}^{stab}$	Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^{stab} = \mathbf{C}_t : \mathbf{e}^{stab}$
Fuerzas Internas(irreducible)	$\mathbf{f}_0^{int} = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_0^T \mathbf{S} d\Omega_0$ (NV)	$\mathbf{f}^{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_t^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega$ (NV)
Fuerzas Externas (mixta)	$\mathbf{f}_0^{int} = \int_{\Omega_0} \mathbf{B}_0^T \mathbf{S}^{stab} d\Omega_0$ (NV)	$\mathbf{f}^{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_t^T \boldsymbol{\sigma}^{stab} d\Omega$ (NV)

Cuadro 5.5: Medidas de deformaciones y tensiones en la configuración de referencia y actualizada para la formulación mixta y formulación irreducible. NV: notación de Voigt

de las deformaciones de Green-Lagrange como:

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\gamma}_{h,0} \cdot (\mathbf{E}_h - \mathbf{E}(\mathbf{u}_h)) d\Omega_0 = \mathbf{0} \quad (5.4.128)$$

En la configuración actualizada se tiene que redefinir nuevamente el operador de proyección para tomar en cuenta el cambio de volumen bajo la integral. En otras palabras, la operación de proyección correspondiente a las deformaciones de Almansi en la configuración deformada se escribe como:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma}_{h,t} \cdot (\mathbf{e}_h - \mathbf{e}(\mathbf{u}_h)) d\Omega = \mathbf{0} \quad (5.4.129)$$

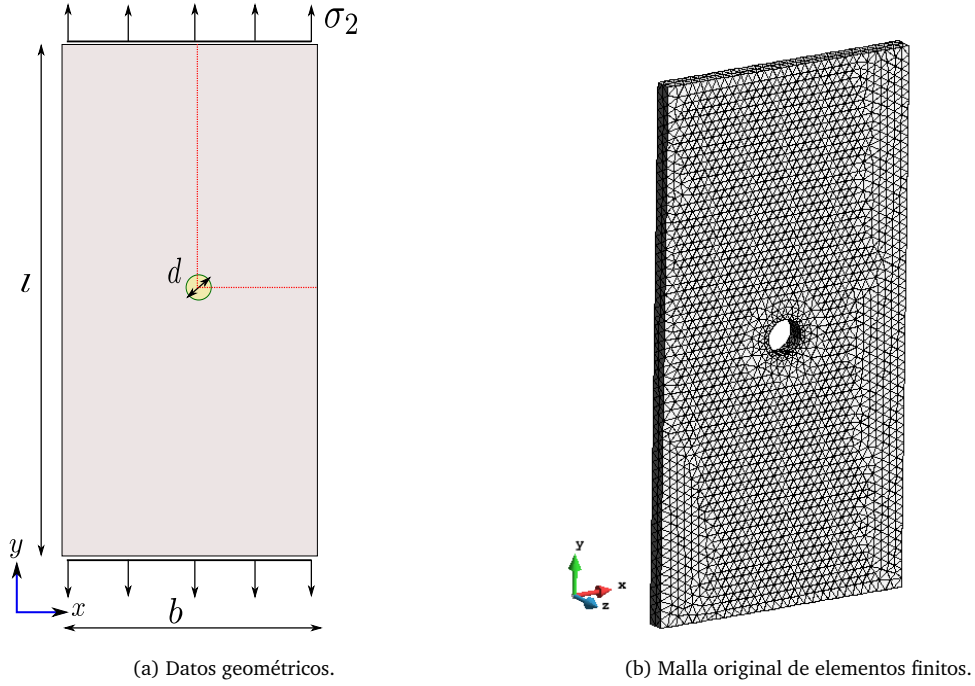


Figura 5.11: Datos geométricos y malla original del bloque.

5.5. Evaluaciones numéricas

5.5.1. Aplicación ALRA

Para validar el algoritmo de refinamiento propuesto, se presentan a continuación en dos test numéricos. En el primer caso abordaremos casos de refinamientos arbitrarios, en la que se selecciona parte de los elementos que serán refinados. En segundo lugar, aplicaremos el algoritmo de refinamiento a problemas de localización de deformaciones.

5.5.1.1. Aplicación de ALRA para refinamientos adaptativos arbitrarios

Considere el ejemplo mostrado en la figura 5.11a. Consiste en un bloque rectangular de $b \times l \times h = 1.5m \times 3.00m \times 0.1m$ con agujero en el centro de diámetro $d = 0.1m$. Este es un típico ejemplo para estudiar la dirección de la banda de corte en problemas que involucran localización de deformaciones (véase por ejemplo [67, 71, 74, 76]).

La malla original se muestra en la figura 5.11b con 23691 elementos y 6181 nodos. Se llevan a cabo 3 ejercicios de refinamientos. En primer lugar, un refinamiento total en toda la malla del dominio (Refinamiento A) el cual se muestra en la figura 5.12a, seguido con refinamientos parciales en sectores de la malla (Refinamiento B), el cual puede verse en la figura 5.12b y por último un refinamiento acorde con una función dada (Refinamiento C y D), mostradas en las figuras 5.12c y 5.12d respectivamente. El empleo de las estrategias de refinamiento en la solución de problemas en la mecánica de sólidos es bastante conocido. Por otra parte, los algoritmos de refinamientos se emplean como una herramienta adicional en programas de mallado de elementos finitos. Mallar dominios grandes con elementos muy pequeños resulta ineficiente. Sin embargo, este mismo proceso se realiza con una malla base de elementos finitos y mediante refinamientos sucesivos

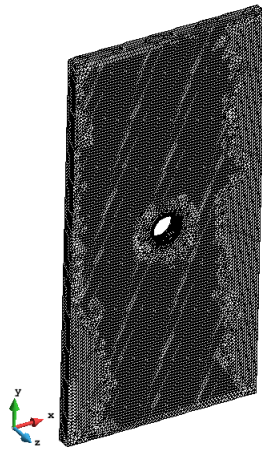
ir incrementando el número de elementos en la malla. Este proceso ha demostrado ser mucho más rápido y práctico en aplicaciones a grandes escalas¹⁸.

En la misma línea, aunque los refinamientos C y D no son tan comunes y son de aplicaciones reducidas, nos dan una idea de los refinamientos arbitrarios que se pueden realizar con ALRA. Para el caso del refinamiento C , se han seleccionado todos los elementos que cortan con las tres elipses $((x-h)/p)^2 + ((y-k)/q)^2 = 1$ siendo el par (h,k) el centro de la elipse (con $p = (0.25, 0.50, 0.75)$, $q = (0.75, 1, 1.25)$) y el para el refinamiento D se emplea la función polar de 10 pétalos $r(\theta) = \sqrt{5}\sin(5\theta)$. Por último, los datos del número de elementos y nodos creados en los refinamientos se presentan en la tabla 5.6.

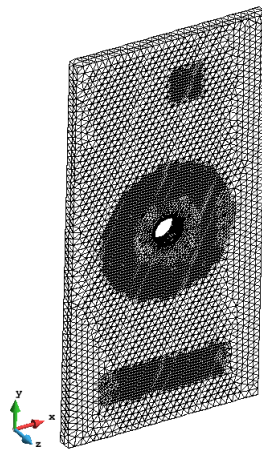
Datos del refinamiento		
Refinamiento	Número de Nodos	Número de elementos
Refinamiento A	17980	189528
Refinamiento B	15976	71498
Refinamiento C	8833	36830
Refinamiento D	12449	54760

Cuadro 5.6: Datos finales del refinamiento A,B,C y D realizado en una malla de elementos finitos de la figura 5.11b.

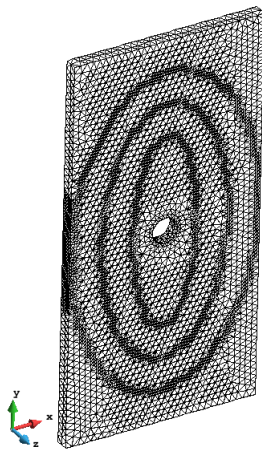
¹⁸Advances in the use of simplicial meshes for flow problems. R. Rossi, P.Dadvand, A. Larese, N. Maireni, M.Davari, R. Wuchner 11th. World Congress on Computational Mechancis (WCCM XI)20.07.-25.07.2104, Barcelona.



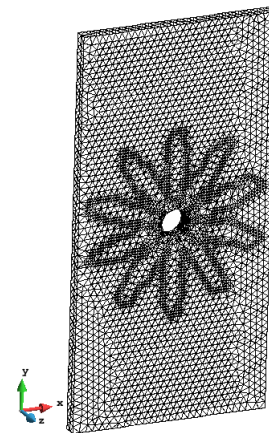
(a) Refinamiento total en toda la malla.



(b) Refinamiento parcial en regiones de la malla.



(c) Refinamiento en una banda elíptica de elementos.



(d) Refinamiento en banda de elementos localizados dentro de una región polar.

Figura 5.12: Ejemplos de refinamientos.

5.5.1.2. Aplicación de ALRA en problemas de localización de deformaciones

Cuando se quiere simular numéricamente un problema de localización de deformaciones, se encuentra con las dificultades de modelar el ablandamiento del material que van acompañados por una fuerte concentración de deformaciones plásticas en una banda estrecha de elementos finitos. Se requiere una malla muy tupida de elementos finitos o alguna técnica numérica para el tratamiento de los altos gradientes de deformaciones que aparecen en dicha banda. Sin embargo, dado que el empleo de una malla muy fina resulta computacionalmente costoso, el empleo de la técnica del refinamiento (o del remallado) adaptativo sería una opción natural para solventar estos problemas.

Una cuestión clave al realizar un refinamiento adaptativo de la malla, es determinar el error a posteriori, lo que indica las regiones de la malla que serán refinadas para así mejorar la exactitud de las variables en los cálculos posteriores. Con tal fin, se han desarrollado muchos tipos de indicadores de errores basados en un Método Residual (Residual Methods)[12], Métodos de Proyecciones (Projection methods)[410, 414] y el Método de Error de Interpolación (Interpolation Error Methods)[112], que han sido empleados satisfactoriamente en problemas elásticos lineales. Sin embargo, Hyun-Gym Kim y Seyoung Im [214] argumentan que los métodos anteriores de cálculo del error no son adecuados para problemas no lineales que incorporan localización ya que la ecuación que rige el problema en cuestión pierde elipticidad y han propuesto un indicador de error basado en el salto máximo de la velocidad de la deformación equivalente. Por otra parte, Belytschko y Tabbara[35] han demostrado que un criterio de error basado en una proyección \mathcal{L}_2 de las deformaciones es mucho más eficiente que un criterio de error basado en el método de los residuos o en el método de proyección de las tensiones. La ventaja de ALRA es que es independiente del criterio de refinamiento, dejándose al usuario emplear cualquier tipo de indicador de error. Para llevar a cabo el ejercicio numérico de refinamiento, se toma en consideración dos indicadores de error. El primero basado en el método de proyección de Zhu y Zienkiewicz [410] y el segundo basado en el indicador de error propuesto por Hyun-Gym Kim y Seyoung Im [214].

Considere en primer lugar el método de error de Zhu y Zienkiewicz. En el desarrollo de un proceso de indicador de error a posteriori, el error \mathbf{e} basado en una norma energética para problemas elásticos lineales se define como[410]:

$$\|\mathbf{e}\| = \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_d)^T \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_d) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.5.1)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el campo exacto de tensiones, $\boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}_h$ es el campo aproximado de tensiones dado por los elementos finitos, \mathbf{C} es la matriz elástica y \mathbf{B} la matriz de los gradientes de funciones de forma. Si bien, la ecuación 5.5.1 es válida, en la práctica, la solución exacta del problema se desconoce, por lo que se requiere de alguna manera aproximar dicho error mediante una aproximación de las tensiones exactas $\boldsymbol{\sigma}$. Zienkiewicz y Zhu[406, 413, 415] han propuesto un método sencillo para el cómputo aproximado de las tensiones exactas mediante un método de recuperación superconvergente. Por tanto, la ecuación 5.5.1 la podemos reescribir como:

$$\|\bar{\mathbf{e}}\|_{\Omega} = \left(\int_{\Omega} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_d)^T \mathbf{C}^{-1} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_d) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.5.2)$$

en la cual $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ es la aproximación de la solución exacta mediante cualquier método de recuperación. En este trabajo empleamos por simplicidad la proyección \mathcal{L}_2 o en su defecto, el mismo operador de proyección $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \approx \boldsymbol{\sigma}_h = \mathcal{P}_h(\boldsymbol{\sigma}_d)$. Otra forma completamente análoga a 5.5.2 es reescribir la misma en función de las

deformaciones:

$$\|\bar{\epsilon}\|_{\Omega} = \left(\int_{\Omega} (\bar{\epsilon} - \epsilon_d)^T \mathbf{C} (\bar{\epsilon} - \epsilon_d) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.5.3)$$

donde $\bar{\epsilon}$ es la aproximación de la deformación exacta (la cual puede tomarse como $\bar{\epsilon} \approx \epsilon_h = \mathcal{P}_h(\epsilon_d)$) y $\epsilon_d = \mathbf{B}\mathbf{u}_h$ (para el caso de pequeñas deformaciones). El error indicado en 5.5.3 se puede particularizar para cada elemento como:

$$\|\bar{\epsilon}\|_{\Omega_I} = \left(\int_{\Omega_I} (\bar{\epsilon} - \epsilon_d)^T \mathbf{C} (\bar{\epsilon} - \epsilon_d) d\Omega_I \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.5.4)$$

El error total será entonces la contribución de cada uno los errores elementales, o sea:

$$\|\bar{\epsilon}\|_{\Omega} = \sum_{I=1}^N \|\bar{\epsilon}\|_{\Omega_I} \quad (5.5.5)$$

El segundo indicador de error es más simple. Hyun-Gym Kim y Seyoung Im [214] han propuesto un indicador de error basado en el salto máximo del incremento temporal de la deformación total equivalente $\Delta\bar{\epsilon}$. Para simplicidad, han optado por la deformación equivalente de Von-Mises o sea $\bar{\Delta\epsilon} = \sqrt{2/3 \Delta\epsilon \cdot \Delta\epsilon}$. Debido al salto, las derivadas espaciales del incremento de deformación equivalente en la dirección normal de la banda de localización están indefinidas. Dado que estas derivadas están directamente relacionadas con la diferencia del incremento temporal de las deformaciones equivalentes de los elementos adyacentes a dicha banda, argumentan que el salto en las deformaciones equivalentes pudiera ser una medida del error. Para elementos lineales este indicador de error se expresa como sigue:

$$\|\bar{\epsilon}\|_{\Omega_I} = h_I^e \max[[\Delta\bar{\epsilon}]] \quad (5.5.6)$$

siendo h_I^e la longitud característica del elemento finito Ω_I y $[[\Delta\bar{\epsilon}]] = \dot{\Delta\epsilon}_I - \dot{\Delta\epsilon}_J$ es función salto del incremento temporal de las deformaciones equivalentes evaluadas en el elemento Ω_I y en sus elementos adyacentes Ω_J .

Para llevar a cabo un refinamiento óptimo, se requiere distribuir equitativamente la magnitud del error en todos los elementos finitos [409]. En nuestro análisis, refinamos los elementos cuando el error en el elemento finito obtenido en 5.5.4 o en 5.5.6 sea mayor que un valor de error permisible. Los elementos seleccionados para su refinamiento serán los que cumplan la siguiente condición:

$$\|\bar{\epsilon}\|_{\Omega_I} \geq \eta \frac{\|\bar{\epsilon}\|_{\Omega}}{M} \quad (5.5.7)$$

donde $\eta > 0$ es una constante especificada y M el numero total de elementos finitos en la malla. Es precisamente el objetivo del refinamiento: encontrar una malla óptima tal que la distribución del error sea igualmente distribuido en todos los elementos de la malla.

Para poner en práctica los conceptos anteriormente presentado, asuma el mismo ejemplo de la figura 5.12. Debido a la simetría del modelo y de las condiciones de contorno, sólo se analiza la parte superior derecha. Se ha empujado la formulación irreducible equipado con el modelo asociado de plasticidad de MC y un ablandamiento exponencial (véase apéndice C). Los datos de los materiales se presentan en el cuadro 5.7. Para simular un caso de deformación plana tridimensional, se han fijado los desplazamientos en dirección Z. Se llevaron a cabo 3 niveles de refinamientos por elementos y un valor de $\eta = 3$. Como preprocesador y post-procesador se ha empleado el programa Gid[148]. Observe que los elementos de la malla están alineados en ángulos de $+60^\circ$ y -60° . Como herramienta de cálculo numérico se ha empleado el programa KRATOS[103,

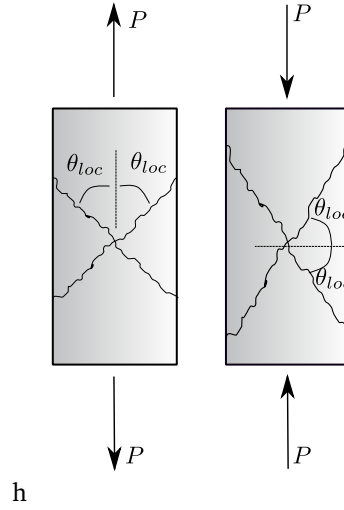


Figura 5.13: Ángulo de localización en MC.

Datos geométricos y materiales	Valor($N - m$)
Módulo de Young E	20.0 GPa
Cohesión c	100 KPa
Coefficiente de Poisson ν	0.3
Energía de Fractura \mathcal{G}_f	150 N/m
Ángulo de rozamiento ϕ	40°
Ángulo de dilatación ψ	40°

Cuadro 5.7: Datos de materiales para el ensayo numérico de refinamiento adaptativo.

104]. Para evitar un alto coste computacional debido a la resolución del sistema no lineal de ecuaciones, el proceso del refinamiento se lleva a cabo cada 5 pasos con un total de 500 pasos de simulación numérica. Las cargas se aplican mediante un desplazamiento vertical impuesto en la cara superior del modelo. Para tal caso, y para las condiciones de contorno dadas, el ángulo de localización θ_{loc} (véase figura 5.13) está dado por el postulado de MC el cual nos dice que:

$$\theta_{loc} = 45 \pm \frac{\phi}{2} \quad (5.5.8)$$

Los resultados de los análisis se pueden observar en las figuras 5.14, 5.15, 5.16 y 5.17.

La figura 5.15 muestra el resultado del análisis sin emplear ALRA. Es notorio como la banda de localización depende altamente de la malla de elementos finitos, yéndose la misma por los bordes favorables de los elementos generando zonas de localización en zic-zag buscando de alguna manera aproximar la dirección correcta de la banda de localización (véase figura 5.15b y 5.15c). El ángulo de localización arrojado es de 30.65°, muy lejos del valor teórico. De hecho, formulaciones de elementos finitos como *Discontinuidades Fuertes* [278, 284] adolecen de la dependencia de la malla teniendo que emplear algoritmos de rastreo (*Tracking Algorithms*). Sin embargo, si la malla se alinea en la dirección de la banda de localización tal como se muestra en la figura 5.14, se obtienen resultados satisfactorios. No es extraño encontrarse con fuentes bibliográficas

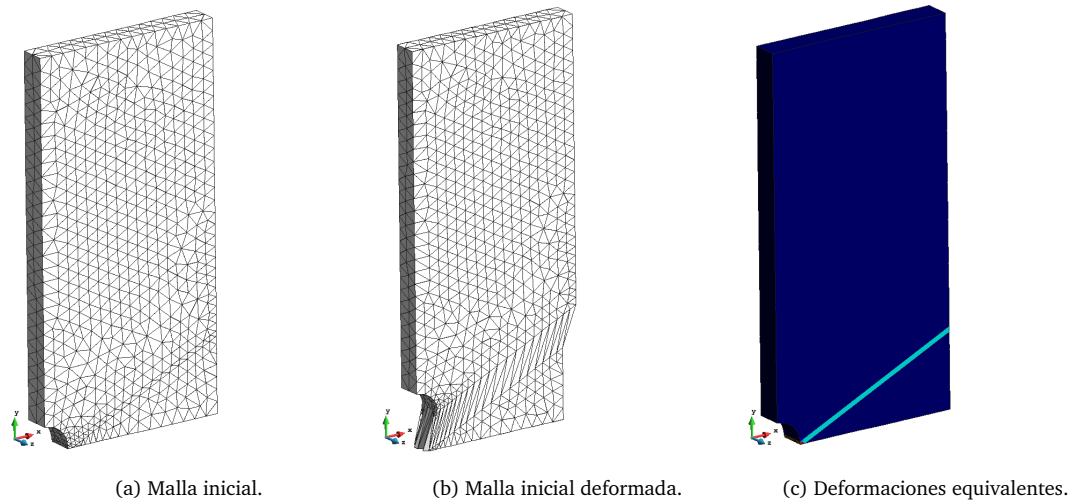


Figura 5.14: Resultados empleando una malla alineada a la dirección de la banda.

que presentan ejemplos numéricos de localización cuya malla está alineada con la dirección de la fractura¹⁹. No obstante, esto no constituye un remedio absoluto ya que la experiencia numérica demuestra que la localización no siempre ocurre en la banda alineada de elementos. Es evidente que la dependencia de la malla es un grave problema y en consecuencia no se obtiene una descripción realista de la dirección de la fractura. Esta es una de las principales razones por la que consideramos que la formulación irreducible no es capaz de describir objetivamente la fractura discreta.

Las figuras 5.16 y 5.17 muestran los resultados de los análisis empleando la técnica del refinamiento adaptable empleando el criterio de Zienkiewicz y Zhu, y H.-G Kim y S. Im respectivamente. Como se puede observar, el refinamiento es una herramienta que ayuda a reducir la sensibilidad de la orientación de la malla, pero no es un remedio definitivo. En ambos casos, se ha obtenido satisfactoriamente la dirección correcta de la banda de localización (véase cuadro 5.8), debido a que algunos los elementos refinados están alineados en la dirección de la fractura. Sin embargo, nótese que en el método de Zienkiewicz y Zhu, el refinamiento adaptable se realiza en la vecindad de la banda de localización (figura 5.16c) y no dentro de la misma como en el método de H.-G Kim y S. Im (figura 5.17c). El método de Zienkiewicz y Zhu es más efectivo en un análisis elástico y el método de Hyun-Gym Kim y Seyoung Im en un análisis de localización.

Por último, la figura 5.18 muestra la gráfica de Fuerza (Reacción Vertical)-Desplazamiento vertical. Si bien, la respuesta elástica es virtualmente idéntica en todos casos y la carga última predicha es similar, la respuesta post-pico es notoriamente distinta una de la otras. Esto es una consecuencia más de la dependencia de la malla. Obsérvese que si se toma como solución buena la respuesta de la malla alineada, todas las otras respuestas están alejadas de esta solución. Nótese además que aunque se haya empleado un refinado adaptable con el criterio de Zienkiewicz y Zhu y obtenido un resultado satisfactorio de la dirección de la banda de localización, la respuesta Reacción-Desplazamiento es la más rígida de todas. Es obvio que la respuesta irreducible utilizada durante años en la mecánica computacional no es capaz de garantizar una respuesta precisa y objetiva en problemas de localización de deformaciones debido al problema de la dependencia de la malla. De ahí la razón de ser, en consideración del pensamiento del autor, el empleo de los algoritmos de rastreo.

¹⁹ Los test que emplean el modelo de daño isótropo son muy sensibles a la orientación de la malla, incluso aún cuando la malla de elementos finitos esta alineada a la dirección de la fractura (véase [198]).

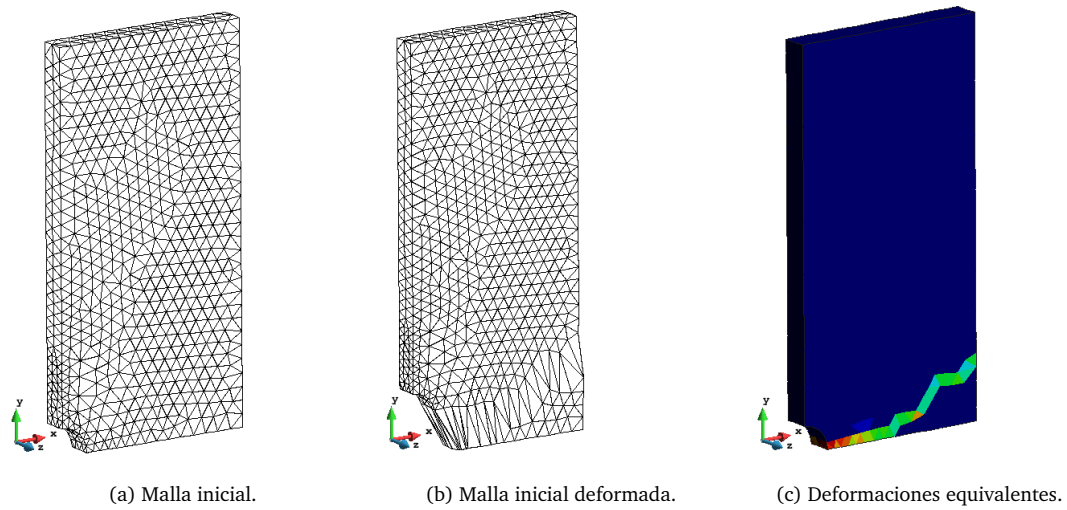


Figura 5.15: Resultados sin emplear remallado.

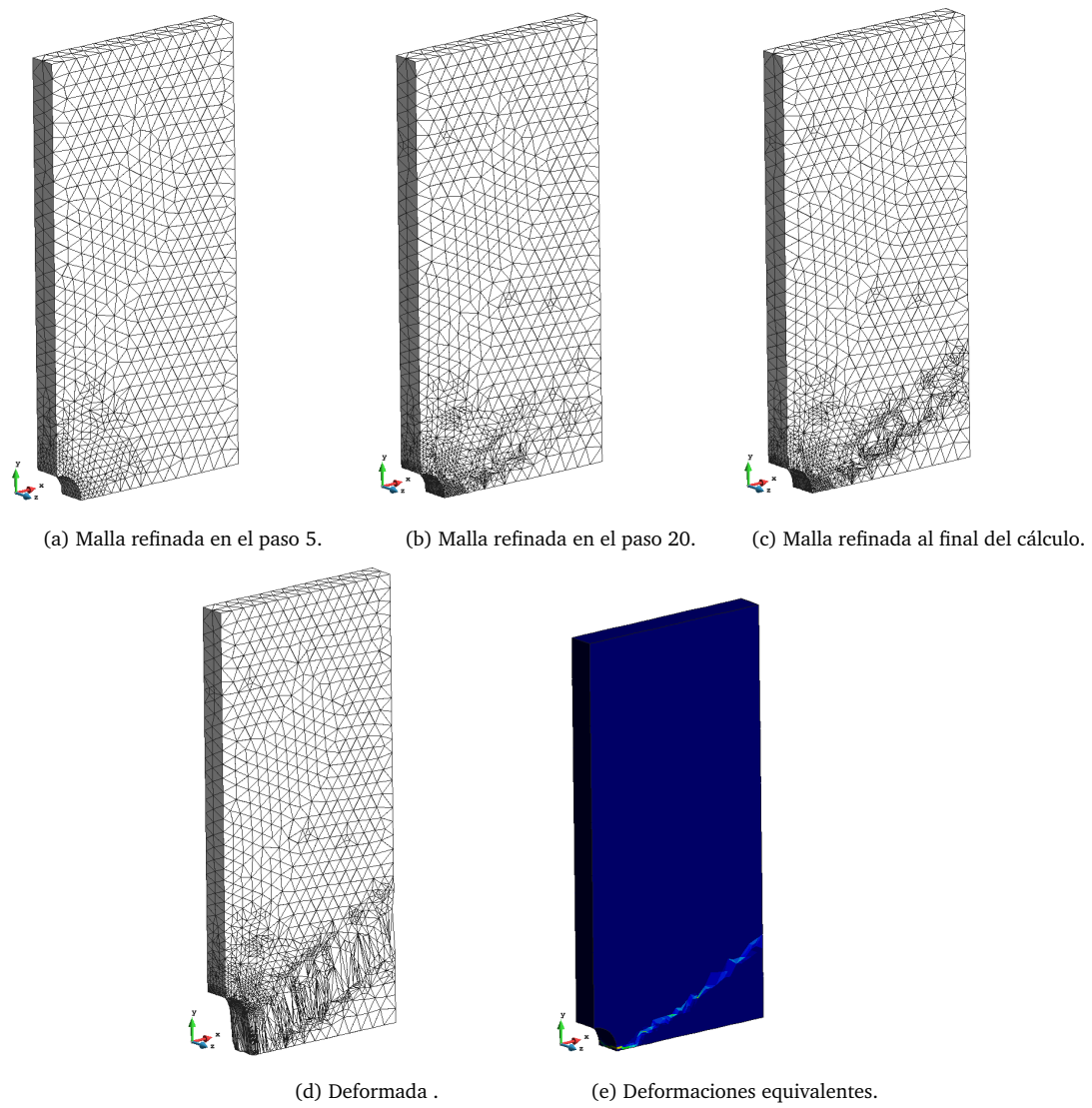


Figura 5.16: Refinamiento adaptativo empleando el criterio de Zienkiewicz y Zhu [413].

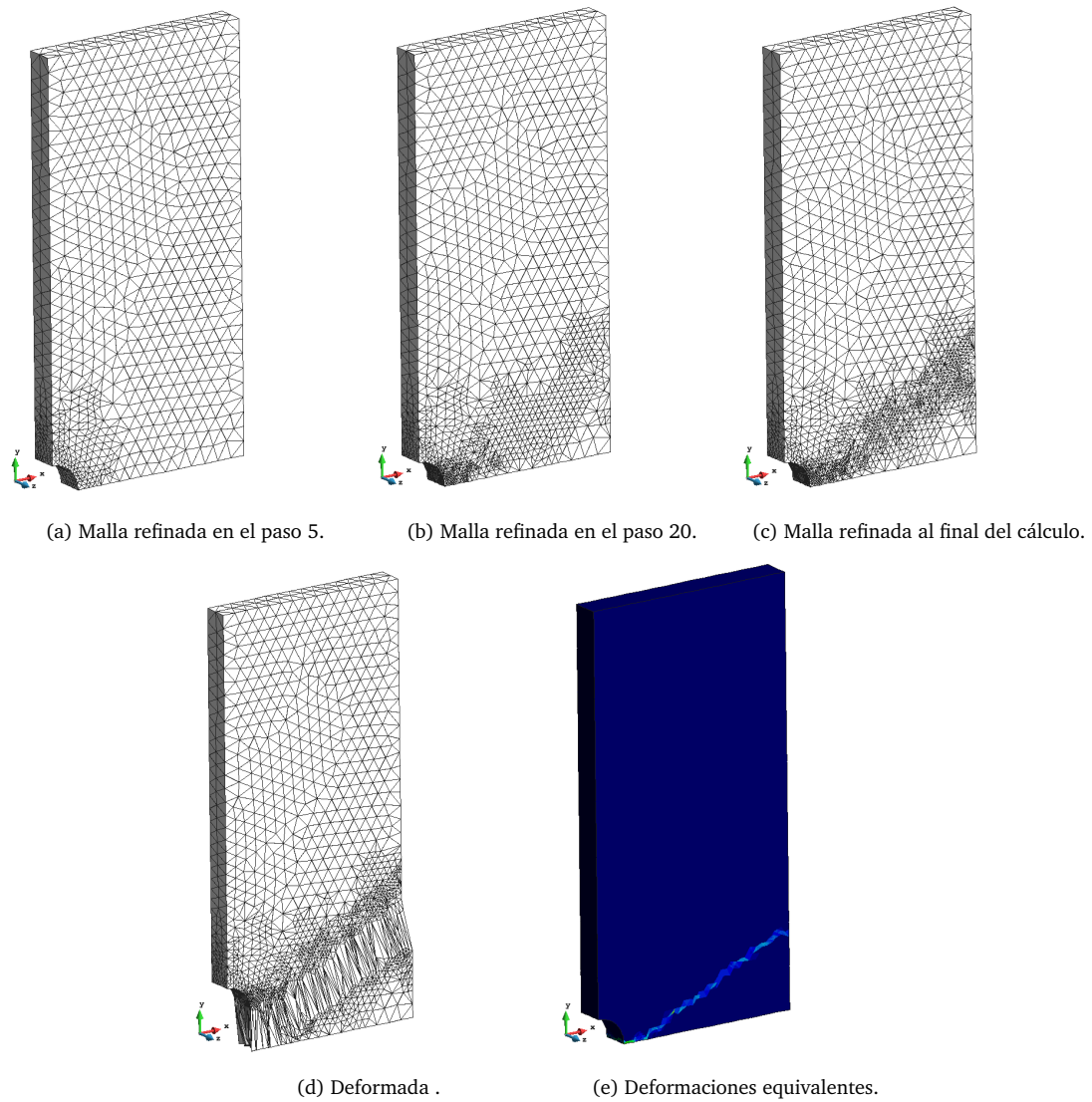


Figura 5.17: Refinamiento adaptativo empleando el criterio de Hyun-Gym Kim y Seyoung Im [214].

Ángulo de localización (medido desde $90 - \theta_{loc}$)	
Sin refinamiento	30.65°
Zienkiewicz y Zhu	25.57°
Hyun-Gym Kim y Seyoung Im	25.94°

Cuadro 5.8: Ángulo de la banda de localización .

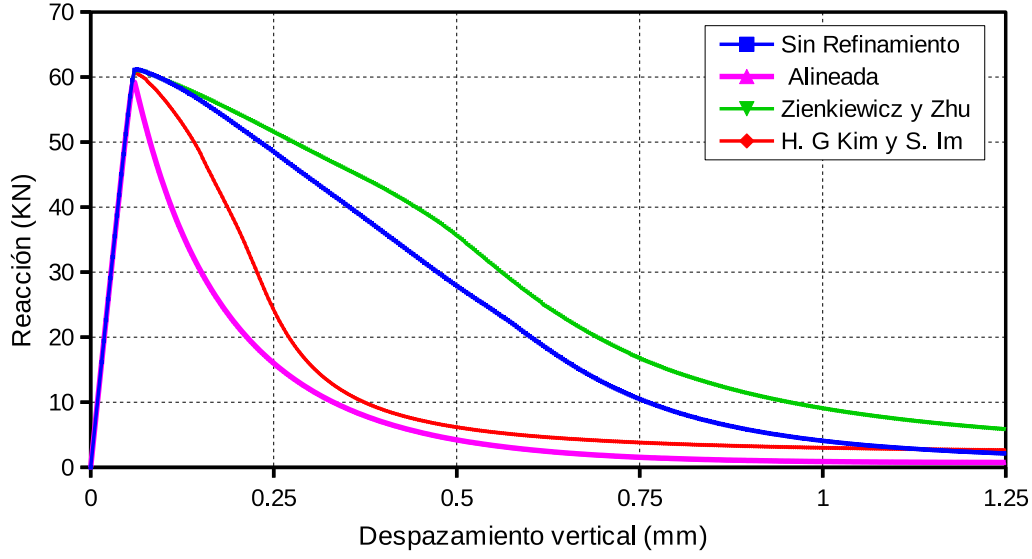


Figura 5.18: Diagrama Fuerza (Reacción vertical) vs Desplazamiento Vertical.

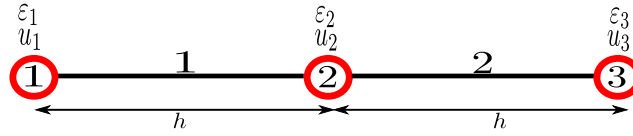


Figura 5.19: Ejemplo unidimensional.

5.5.2. Estabilidad de la formulación mixta explícita

5.5.2.1. Problema unidimensional

El objetivo de esta sección es estudiar numéricamente la estabilidad de MEX-FEM variando el parámetro de estabilización de la sub-escala de las deformaciones τ_ϵ . Para simplicidad, no se consideran la sub-escala de los desplazamientos. Considere el problema unidimensional mostrado en la figura 5.19 el cual corresponde a una barra de sección transversal unitaria discretizado en dos elementos finitos de longitud h . El módulo de Young E y la densidad ρ se asumen. En los nodos 1 y 3 se fijan los grados de libertad de desplazamiento u_1 y u_3 . Para el caso irreducible se puede demostrar que la frecuencia fundamental del sistema está dada por:

$$\omega_{irre} = \sqrt{\frac{2E}{\rho h^2}} \quad (5.5.9)$$

Es posible calcular analíticamente los valores propios del problema mixto en cuestión mediante la evaluación de los valores propios del sistema correspondiente. Sean A y B los nodos locales de un elemento de la barra. Empleando la misma función lineal de interpolación N para los campos de los desplazamientos y deformaciones, la matriz mixta local de rigidez de un elemento mixto de barra K_{mix}^{AB} , de dimensión 4×4 , está compuesta compuesta por términos que afectan los grados de libertad de desplazamientos y deformaciones. Las sub-matrices $\check{M}, \check{G}, G_\tau$ y K_τ definidas en 5.4.58 - 5.4.61 para un elemento mixto de barra se escriben como:

$$\check{\mathbf{M}}^{AB} = \frac{h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.5.10)$$

$$\mathbf{K}_{\tau}^{AB} = \tau_{\epsilon} \frac{E}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.5.11)$$

$$\check{\mathbf{G}}^{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.5.12)$$

$$\mathbf{G}_{\tau}^{AB} = \frac{E(1-\tau_{\epsilon})}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.5.13)$$

La matriz de masa del elemento de barra se escribe como:

$$\mathbf{M}^{AB} = \frac{\rho h}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.5.14)$$

La matriz local de rigidez de un elemento mixto de barra \mathbf{K}_{mix}^e es el ensamblaje adecuado de estas submatrices. Por lo tanto, utilizando la expresión de la ecuación 5.4.63, se puede expresar esta matriz como:

$$\mathbf{K}_{mix}^{AB} = \begin{pmatrix} \frac{E\tau_{\epsilon}}{h} & \frac{-E\tau_{\epsilon}}{h} & \frac{E(\tau_{\epsilon}-1)}{2} & -\frac{E\tau_{\epsilon}}{2} \\ \frac{-E\tau_{\epsilon}}{h} & \frac{E\tau_{\epsilon}}{h} & \frac{E(\tau_{\epsilon}-1)}{2} & -\frac{E(\tau_{\epsilon}-1)}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{h}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{h}{2} \end{pmatrix} \quad (5.5.15)$$

Obsérvese que la matriz \mathbf{K}_{mix}^{AB} no es simétrica. Tras el montaje de la contribución elemental de ambas barras \mathbf{K}_{mix} y \mathbf{M}_{mix} y fijando los desplazamientos en el nodo 1 y 3, se pueden obtener las frecuencias naturales del sistema discreto mediante un análisis de valores propios:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{mix} - \lambda \mathbf{M}_{mix}) \Phi &= 0 \\ \omega_{mix}^2 &= \lambda \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

Después de realizar algunas operaciones algebraicas se obtiene la siguiente expresión analítica para la primera frecuencia del sistema mixto:

$$\omega_{mix} = \sqrt{\frac{E(1+\tau_{\epsilon})}{\rho h^2}} \quad (5.5.17)$$

Obsérvese que la solución irreducible (véase la ecuación 5.5.9) se recupera para un valor de $\tau_{\epsilon} = 1$. Nótese también que la respuesta mixta proporciona una solución mucho más flexible que su contraparte irreducible, lo cual permite como mostraremos más adelante utilizar incrementos de tiempo Δt mayores en el cálculo numérico.

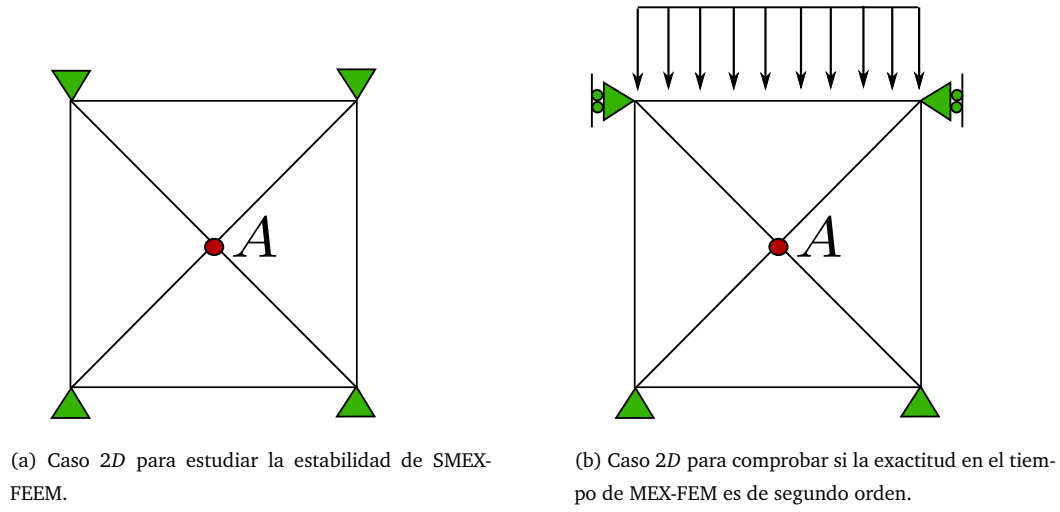


Figura 5.20: Ejemplo bi-dimensional

5.5.2.2. Problema bidimensional

Considérese ahora el ejemplo bidimensional mostrado en la figura 5.20a. El modelo consiste en un bloque cuadrado de $1m \times 1m$ discretizado en 4 elementos mixtos triangulares y cuyos bordes están fijos. La densidad ρ , el módulo de Young E , espesor t y la relación de Poisson ν se asumen como $100kg$, $10^6N/m^2$, $1m$ y 0.3 respectivamente. Se lleva a cabo un análisis modal tanto en la formulación irreducible como para la formulación mixta.

La gráfica de relación de frecuencias $\omega_{mix}/\omega_{irre}$ para valores variables del parámetro de estabilización τ_e se muestra en la figura 5.21. Según lo predicho por el análisis unidimensional, el sistema se vuelve más flexible a medida que decrece el parámetro de estabilización τ_e . Cuando el parámetro de estabilización se aproxima a cero, la frecuencia del sistema es cerca del 60% de la frecuencia irreducible. La implicación inmediata es que el paso de tiempo crítico para el análisis dinámico explícito es mayor para la formulación mixta que para el caso de la formulación irreducible. La figura 5.22 nos muestra la relación del paso de tiempo mixto Δt_{mix} e irreducible Δt_{irre} (véase ecuación 3.1.47). Es evidente que la formulación mixta aumenta el rango de estabilidad en un esquema explícito. Las gráficas sugieren además que para el caso bidimensional el paso de tiempo es aún más favorable que para el caso unidimensional.

Este simple ejemplo es adecuado para verificar el orden de la precisión MEX-FEM. Para llevar a cabo tal verificación se modifica ligeramente las condiciones de contorno del ejemplo original tal y como se muestra en la figura 5.20b. Desde un enfoque lagrangiano, el error espacial y el error temporal están desacoplados. Por lo tanto, se puede calcular una solución de referencia empleando un paso Δt muy pequeño. A continuación se calcula la solución utilizando diferentes intervalos de tiempo tomando el valor nodal del desplazamiento y la deformación en el punto A de la figura 5.20b para un instante de tiempo cualquiera (en nuestro caso se ha elegido $t = 0.40s$). Al trazar la curva de error (en escala logarítmica) como una función del tamaño de paso de tiempo y dado que la curva de Δt^2 mostrada en la figura 5.23 es paralela a las curvas de error, el gráfico demuestra que el orden de la formulación propuesta $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, tanto para el campo de los desplazamientos como el campo de las deformaciones.

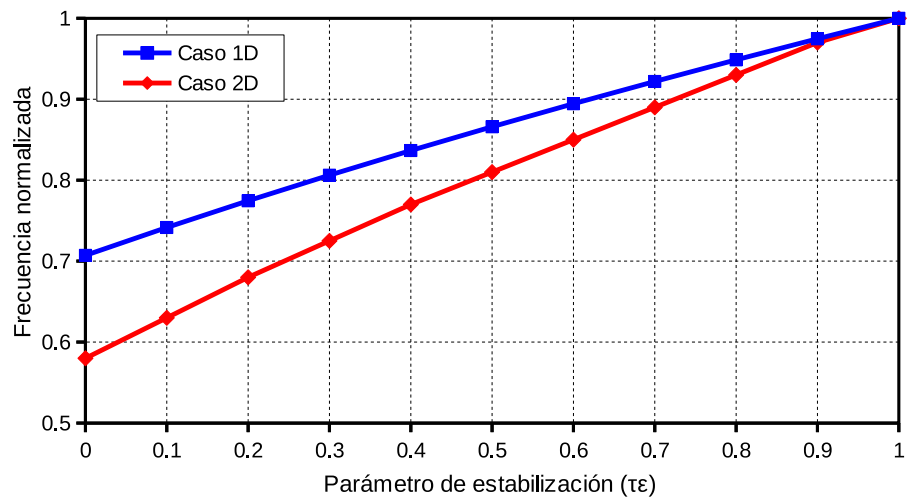


Figura 5.21: Variación de la frecuencia normalizada en función del parámetro de estabilización.

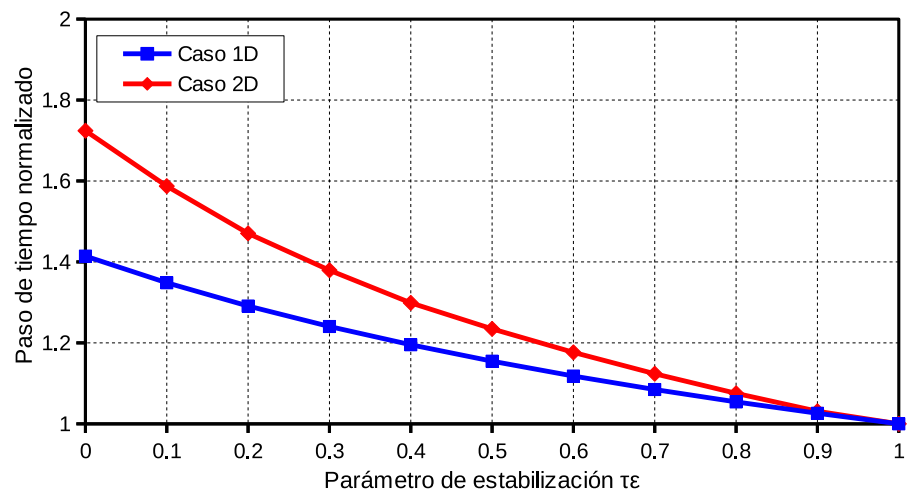


Figura 5.22: Variación del paso de tiempo normalizado en función del parámetro de estabilización.

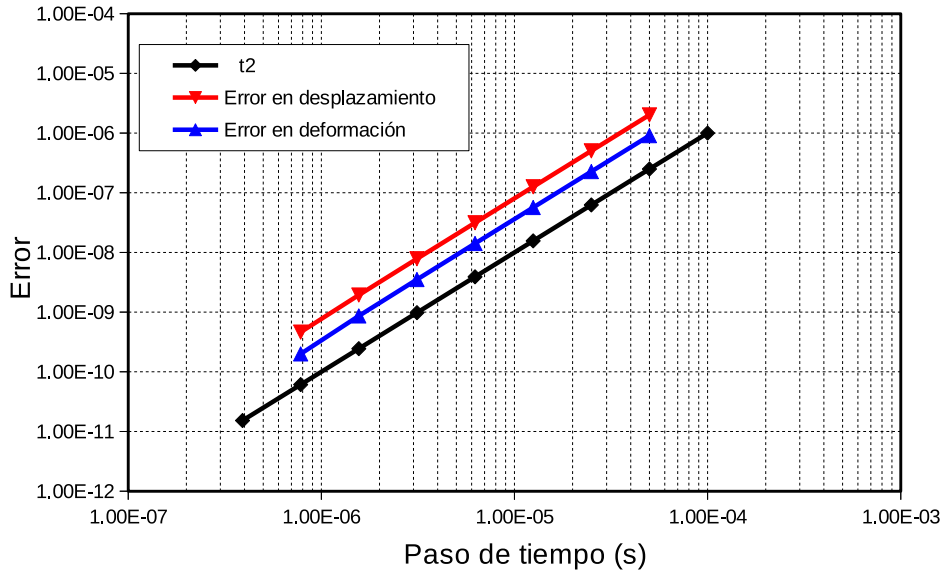


Figura 5.23: Error en el tiempo de MEX-FEM .

5.5.3. Precisión numérica de la formulación mixta explícita

5.5.3.1. Test de la parcela

El criterio de la parcela es la prueba más importante para los programas de elementos finitos, particularmente al introducir nuevas formulaciones[156]. Este criterio fue introducido por (Irons and Razzaque, 1972), basado en razonamientos físicos y puede ser interpretado como una prueba que determina si una parcela de elementos sujeta a deformación constante es capaz de reproducir exactamente el comportamiento constitutivo del material y proporcionar las tensiones correctas cuando se hace infinitamente pequeña. Si es así, se puede argumentar que a medida que el tamaño de los elementos disminuye, el elemento puede reproducir correctamente el comportamiento de la estructura que se analiza. La satisfacción del criterio de la parcela proporciona una condición suficiente de convergencia del elemento y verifica que la programación ha sido correcta(Zienkiewicz and Taylor, 1994).

La parcela de elementos que se estudia se muestra en la figura 5.24. El criterio que se aplica es similar al que se presenta en (Zienkiewicz and Taylor, 1994), con la diferencia de que en este caso se considera un problema de deformación plana. Este mismo ejemplo es empleado por Q. Valverde[156] para probar la formulación en desplazamiento-presión $u - p$ para un caso estático. El material es elástico lineal, con módulo de elasticidad $E = 1000N/m^2$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Dado que se desea aproximar la solución estática del problema en cuestión, se emplea un factor de amortiguamiento de $\zeta = 0.1$. La solución estática será aquella una vez la estructura alcance una solución estable en el tiempo. No se consideran la sub-escala de los desplazamientos. Los parámetros de estabilización empleados son $L_0 = 3.6m$ y $c_e = 1.0$. La solución en desplazamientos considerada es:

$$\begin{aligned} u_x &= 0.002x \\ u_y &= -0.0006y \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

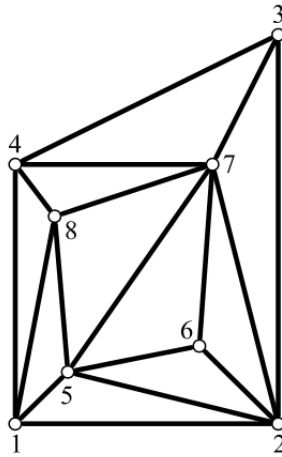


Figura 5.24: Malla utilizada para la verificación del criterio de la parcela[156].

Nodo	Coord X (m)	Coord Y(m)	Disp X (m)	Disp Y(m)
1	0.0	0.0	0.0	0.0
2	2.0	0.0	0.0040	0.0
3	2.0	3.0	0.0040	-0.00180
4	0.0	2.0	0.0	-0.00120
5	0.4	0.4	0.0008	-0.00024
6	1.4	0.6	0.0028	-0.00036
7	1.5	2.0	0.0030	-0.00120
8	0.3	1.6	0.0006	-0.00096

Cuadro 5.9: Coordenadas nodales de la malla del test de parcela de la figura 5.24.

que en estado de deformación plana produce las siguientes tensiones, constantes en toda la parcela:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2.3460 \\
 \sigma_{yy} &= 0.3462 \\
 \sigma_{zz} &= 0.8077
 \end{aligned}
 \tag{5.5.19}$$

En la tabla 5.9 se dan las coordenadas nodales y los respectivos desplazamientos finales impuestos correspondientes. Este último se ha realizado imponiendo gradualmente el desplazamiento durante el análisis hasta llegar a los valores mostrados en la tabla citada. La figura 5.25 muestra que las tensiones nodales obtenidas con la formulación propuesta coinciden exactamente con las tensiones teóricas indicadas en las ecuaciones 5.5.19. La realización de esta verificación asegura una condición suficiente de convergencia de la formulación propuesta.

5.5.3.2. Viga en voladizo. Pequeñas deformaciones

La precisión de la formulación mixta explícita propuesta se evalúa ahora mediante un ejemplo transitorio en pequeñas y grandes deformaciones. El problema consiste en una viga en voladizo con las dimensiones

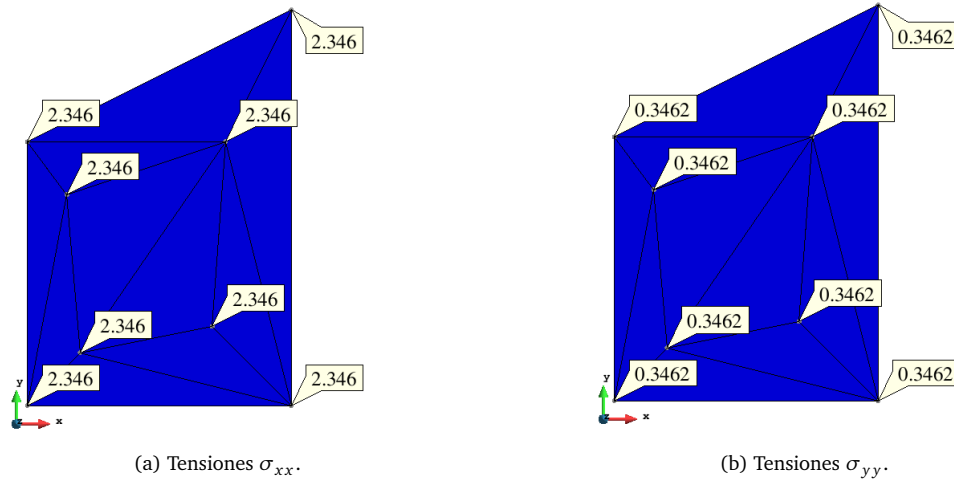


Figura 5.25: Valores de las tensiones en el criterio de la parcela con MEX-FEM .

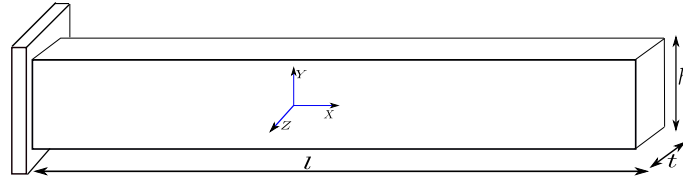


Figura 5.26: Datos de las dimensiones de la viga.

geométricas que se describen en la figura 5.26 y en la tabla 5.10. Los materiales asumidos se presentan también en la tabla 5.10. Con el fin de obtener resultados comparables, se ha empleado el mismo paso de tiempo en la formulación irreducible y mixta. No se consideran la sub-escala de los desplazamientos. La solución numérica de referencia se ha calculado empleando una malla de elementos finitos muy fina con un paso de tiempo muy pequeño. A fin de estudiar la influencia del parámetro de estabilización de la sub-escala de las deformaciones, se emplean valores de $\tau_e = 0.1$ y $\tau_e = 0.5$.

La máxima deflexión estática analítica δ_{max}^{st} y la primera frecuencia natural de la viga ω_1 son $18.3875mm$ y $28.70rad/s$ respectivamente. El correspondiente periodo T de esta frecuencia es de $0.219s$. Los resultados del análisis para las tres mallas A, B y C se representan en las figuras 5.31, 5.32 y 5.33 respectivamente. Estas gráficas corresponden a la evolución del valor absoluto del desplazamiento vertical (desplazamiento dirección Y) en el extremo libre (punto Q en la figura 5.27). Como era de esperar, para valores de τ_e en el rango típico de $0.1 - 0.5$ en cualquier resolución de malla dada, la formulación mixta es mucho más precisa que la que respuesta irreducible. Como era de esperar, a medida que la malla se refina, ambas las formulaciones

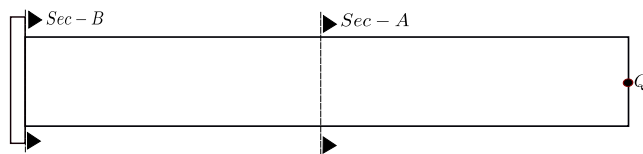


Figura 5.27: Secciones de corte.

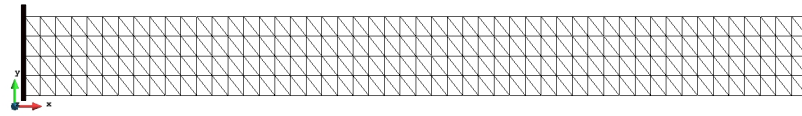


Figura 5.28: Malla de elementos finitos de la viga en voladizo. Malla A.

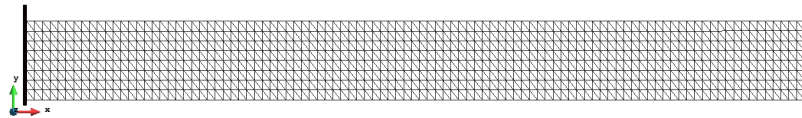


Figura 5.29: Malla de elementos finitos de la viga en voladizo. Malla B.

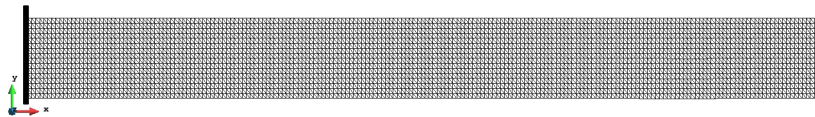


Figura 5.30: Malla de elementos finitos de la viga en voladizo. Malla C.

Datos geométricos y materiales	Valor(N – m)
Módulo de Young E	2.0 GPa
Razón de Poisson ν	0.2
Densidad ρ	1000.00 Kg/m ³
Longitud l	5.00 m
Área A	0.25 m ²
Inercia I	$2.604167 \times 10^{-3} \text{ m}^4$
Espesor t	0.25 m
Gravedad g	9.80665 m/s ²

Cuadro 5.10: Datos materiales y geométricos para el análisis dinámico de la viga en voladizo.

Datos de la discretización		
Malla	Número de Nodos	Número de elementos
Malla A	255	400
Malla B	909	1600
Malla C	3417	6400

Cuadro 5.11: Datos de discretización empleada en la viga en voladizo.

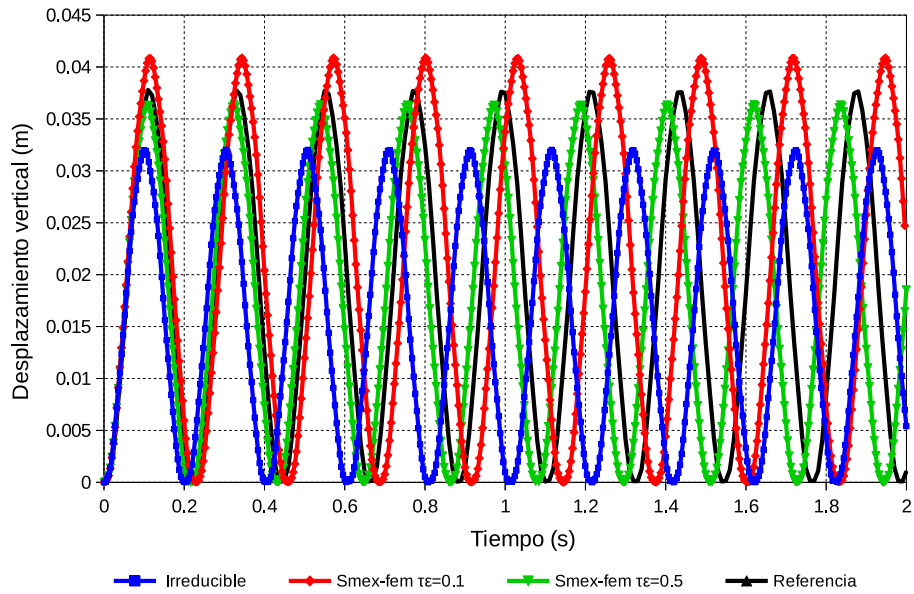


Figura 5.31: Análisis dinámico de paso a paso utilizando tanto formulación explícita irreducible y mixta en la malla A.

convergen a la solución de referencia, pero la velocidad de convergencia de la formulación propuesta es más rápida.

A modo de observación, en trabajos previos [73, 74, 245] en donde se ha explorado el caso mixto estático, para una malla dada, la formulación mixta es siempre más precisa que la formulación irreducible.

5.5.3.3. Viga en voladizo. Grandes deformaciones

Como segundo ejemplo se analiza la misma viga con los datos anteriores salvo que la gravedad g se aumenta 100 veces a fin de provocar una respuesta en grandes deformaciones. Se emplea una formulación langragiana total. Los resultados que se muestran en la figura 5.34, 5.35 y 5.36 representan el desplazamiento vertical absoluto en el punto Q para las tres mallas A, B y C. Obsérvese que la convergencia está garantizada incluso para grandes deformaciones.

Es interesante también comparar la distribución de las deformaciones de Green-Lagrange en dos secciones transversales diferentes de la viga (véase figura 5.27) para ambas formulaciones. La distribución de la deformación en la sección media y en el empotramiento se muestra en las figuras 5.37 y 5.38 para la malla A, 5.39 y 5.40 para la malla B y 5.41 y 5.42 para la malla C. Como sugieren las imágenes y de acuerdo con la teoría, el campo de las deformaciones converge más rápidamente en la formulación mixta que en la formulación irreducible. En la malla gruesa la distribución de las deformaciones obtenida para la formulación mixta es notablemente mejor que la formulación irreducible.

En las figuras 5.43, 5.44 y 5.45 se observan los tres primeros modos vibración de la viga. El periodo T_1 correspondiente al primer modo de vibración se puede observar en las gráficas de evolución de los desplazamientos en común acuerdo con el valor teórico (0.219).

Dado que el análisis de estabilidad desarrollado sólo es válido para el caso lineal, mediante test de

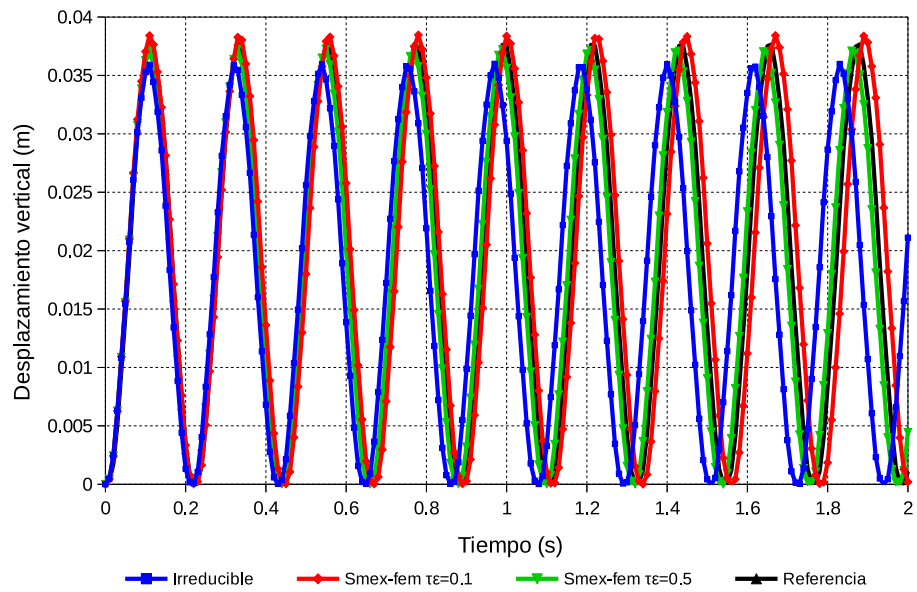


Figura 5.32: Análisis dinámico de paso a paso utilizando tanto formulación explícita irreducible y mixta en la malla *B*.

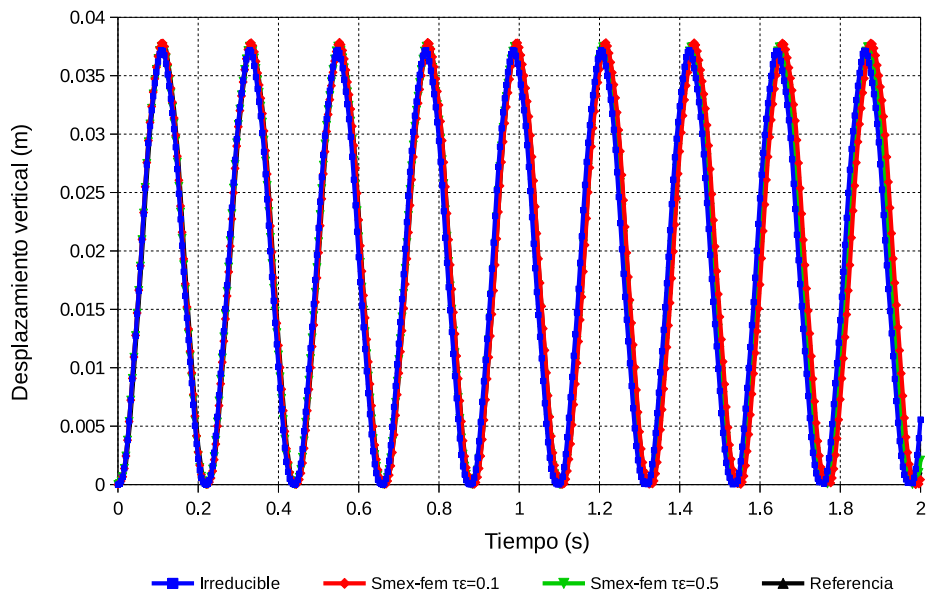


Figura 5.33: Análisis dinámico de paso a paso utilizando tanto formulación explícita irreducible y mixta en la malla *C*.

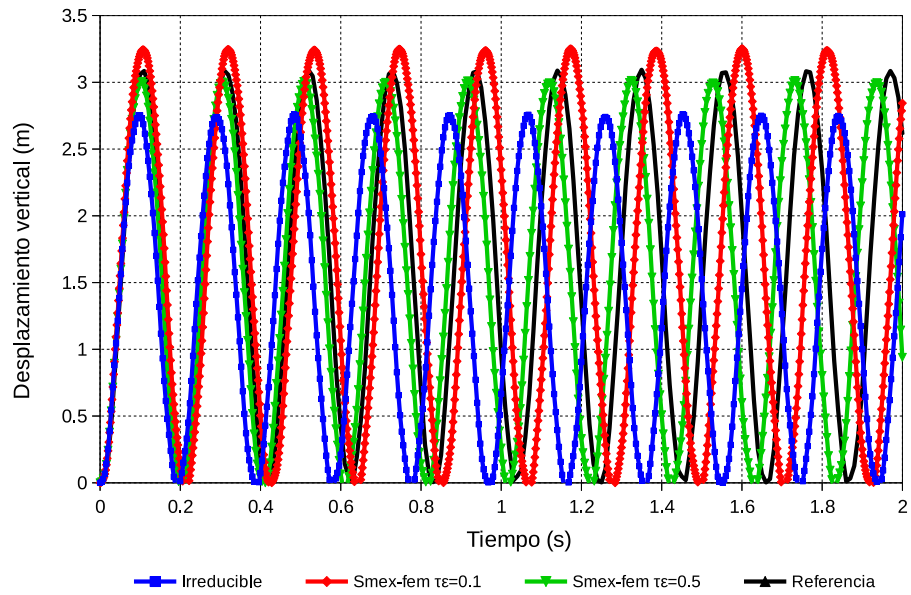


Figura 5.34: Análisis dinámico de paso a paso utilizando tanto formulación explícita irreducible y mixta en la malla A.

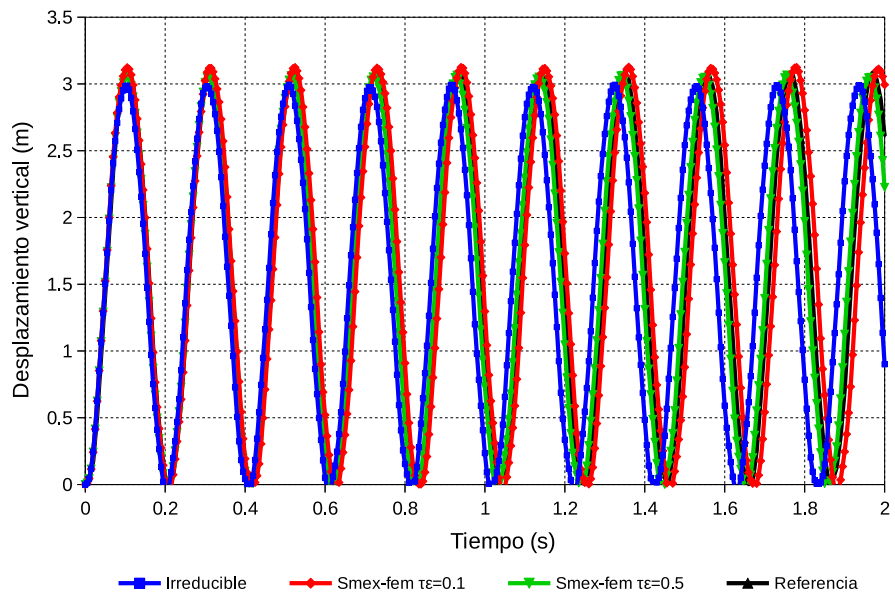


Figura 5.35: Análisis dinámico de paso a paso utilizando tanto formulación explícita irreducible y mixta en la malla B.

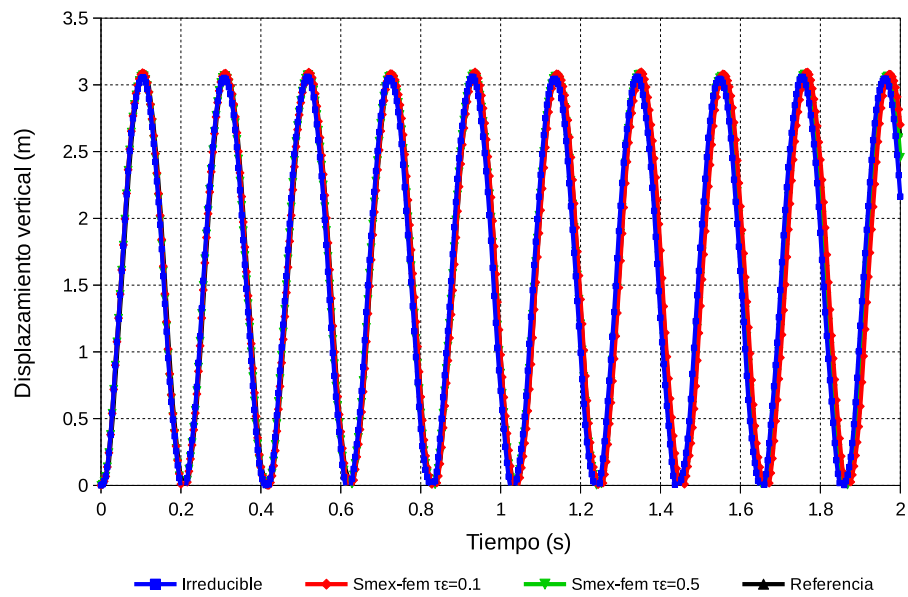


Figura 5.36: Análisis dinámico de paso a paso utilizando tanto formulación explícita irreducible y mixta en la malla C.

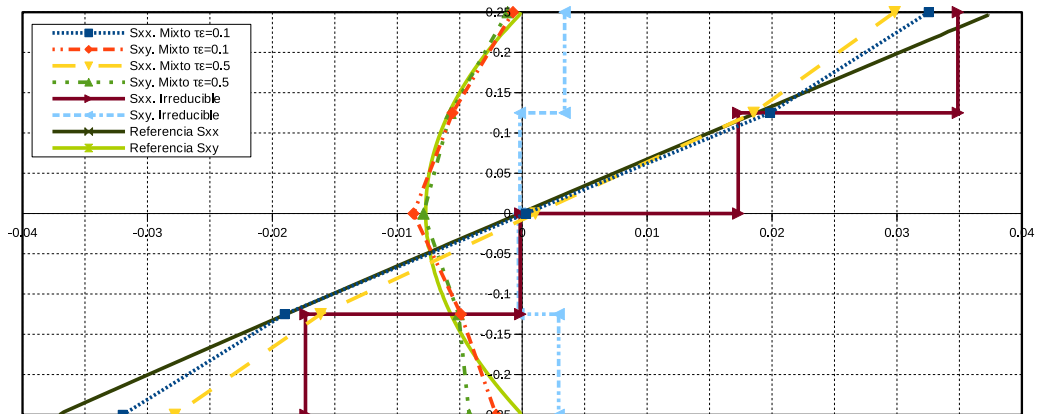


Figura 5.37: Distribución normal y tangencial de las deformaciones en la sección A-A de la malla A en el punto de desplazamiento máximo.

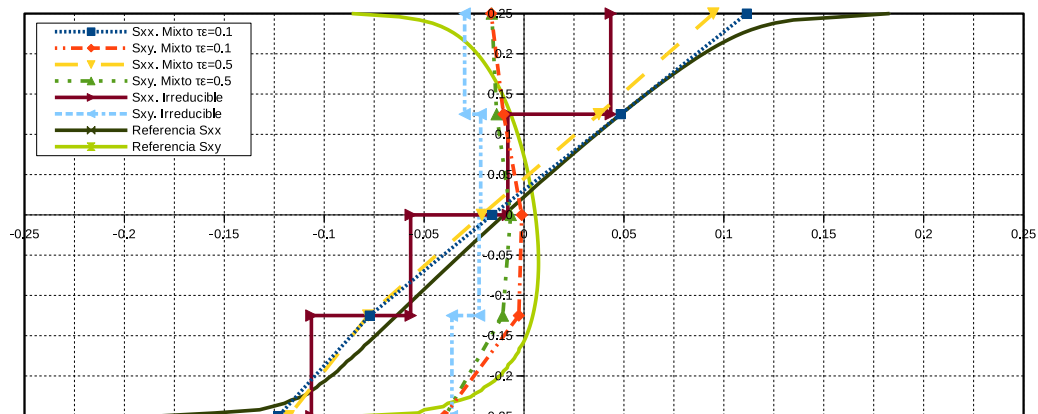


Figura 5.38: Distribución normal y tangencial de las deformaciones en la sección B-B de la malla A en el punto de desplazamiento máximo.

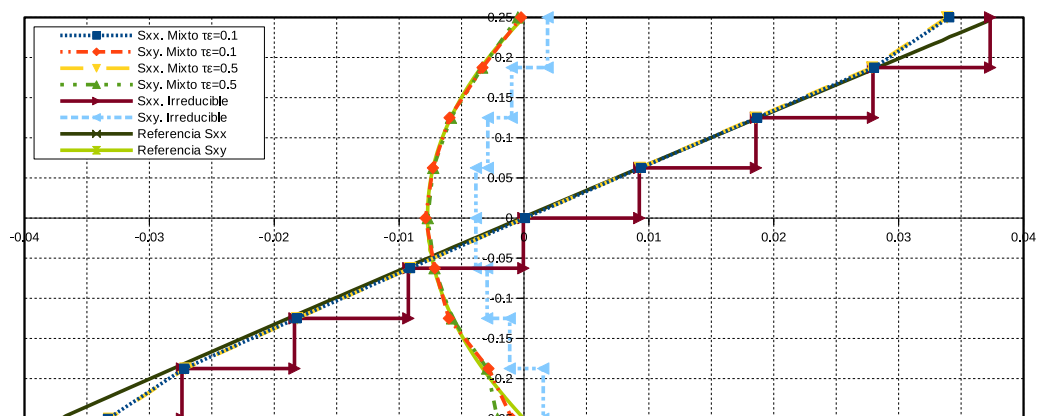


Figura 5.39: Distribución normal y tangencial de las deformaciones en la sección A-A de la malla B en el punto de desplazamiento máximo.

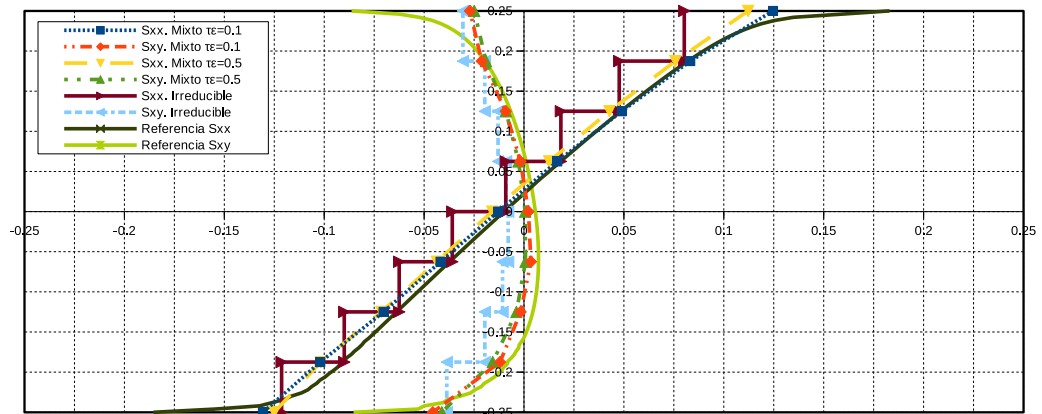


Figura 5.40: Distribución normal y tangencial de las deformaciones en la sección B-B de la malla B en el punto de desplazamiento máximo.

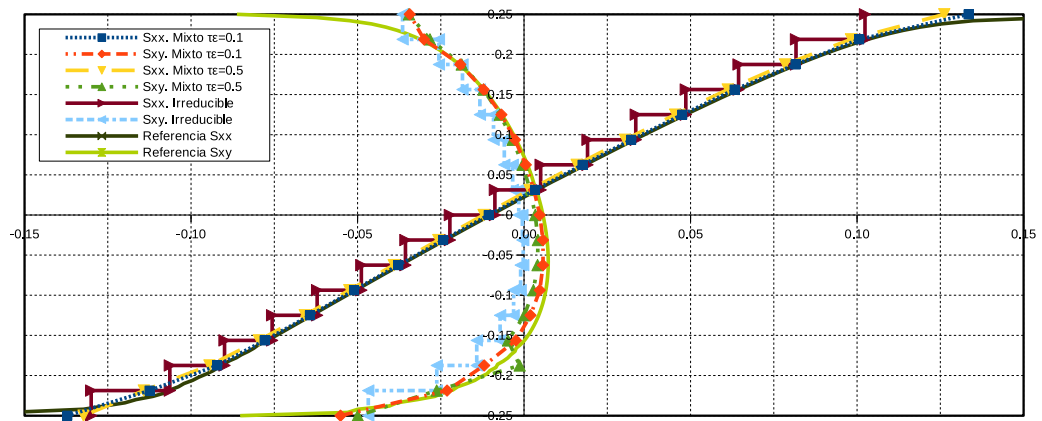


Figura 5.41: Distribución normal y tangencial de las deformaciones en la sección A-A de la malla C en el punto de desplazamiento máximo.

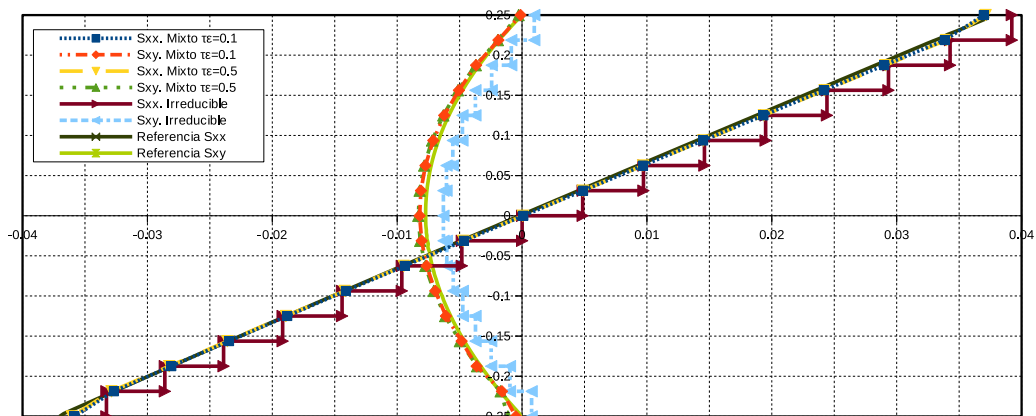


Figura 5.42: Distribución normal y tangencial de las deformaciones en la sección B-B de la malla *C* en el punto de desplazamiento máximo.

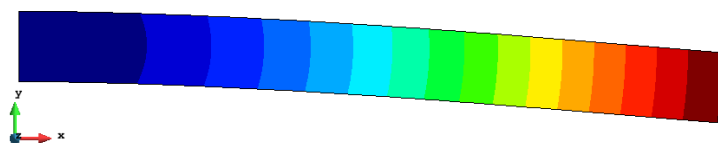


Figura 5.43: Primer modo de vibración de la viga en voladizo en malla *C*.

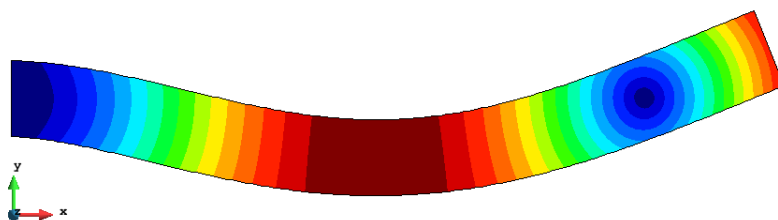


Figura 5.44: Segundo modo de vibración de la viga en voladizo en malla *C*.

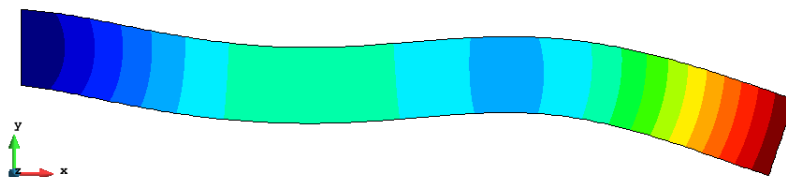


Figura 5.45: Tercer modo de vibración de la viga en voladizo en malla *C*.

Paso de tiempo crítico Δt^{max} computado					
Malla	Δt^{max} Irreducible 1D	Δt^{max} Irreducible	Δt^{max} Mixto 1D	Δt^{max} Mixto	factor
Malla A	1.76e-04s	5.30e-5s	2.38e-04s	7.585e-5s	1.43
Malla B	8.83e-05s	2.55e-5s	1.19e-04s	3.795e-5s	1.49
Malla C	4.41e-05s	1.07e-5s	5.95e-05s	1.80e-05s	1.68

Cuadro 5.12: Máximo Δt^{max} para el análisis en la formulación mixto propuesta e irreducible.

prueba y error se aproxima numéricamente el paso más grande de tiempo Δt_{max} permitido en un análisis mixto sin que el esquema explícito pierda estabilidad. Los resultados se muestran en la tabla 5.12 junto con el paso de tiempo para el caso mixto e irreducible unidimensional. La longitud del elemento triangular se aproxima como $h_e = \frac{1}{2}\sqrt{bh}$, siendo b y h la base y la altura del triángulo. Se observa que incluso para el caso de grandes deformaciones, el paso de tiempo utilizado en la formulación propuesta es mayor que en la formulación irreducible. En específico se verifica para este ejemplo que el paso de tiempo estable en la formulación mixta es al menos un factor de 1.43 el tiempo de la formulación irreducible, lo que representa una ganancia muy importante de la formulación propuesta.

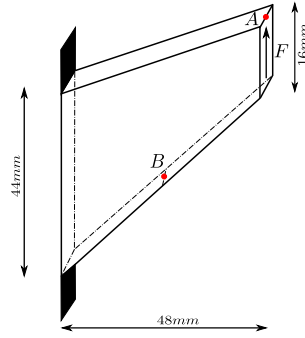


Figura 5.46: Membrana de Cook. Geometría.

5.5.3.4. Caso compresible y quasi-incompresible. Efecto de la sub-escala de los desplazamientos. Membrana de Cook

La eficacia de la formulación MEX-FEM se muestra a continuación en una serie de tests numéricos realizados sobre la Membrana de Cook, mostrado en la figura 5.46. El problema de la membrana de Cook se utiliza como referencia para mostrar la validez de las formulaciones de elementos, tal como se puede ver en Simo and Rifai 1990, Miehe 1994, entre otros. Se consideran casos de elasticidad compresible y quasi-incompresible, con las constantes elásticas: Módulo de Young $E = 200000 \text{ Mpa}$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$ y $\nu = 0.499$. La densidad del material se toma 10^4 kg/m^3 . El problema se analiza realizando análisis quasi-estático y dinámico bajo la hipótesis de deformación plana (con espesor unitario) y haciendo un análisis completamente tridimensional (espesor 10 mm). Para el caso bidimensional, el tamaño del elemento finito se ha tomado como $h = (4/\pi \cdot A)^{\frac{1}{2}}$ siendo A el área del elemento finito correspondiente. En el caso tridimensional se ha tomado $h = (6/\pi \cdot V)^{\frac{1}{3}}$ donde V el volumen del elemento finito. Como método de estabilización se emplea el OSS con $c_u = 1.0$, $c_\epsilon = 1.0$ y $L_0 = 50 \text{ mm}$. La sub-escala de los desplazamientos \tilde{u} se computa empleando la ecuación (5.4.40). En la integración temporal de la ecuación de movimiento se ha empleado un paso de tiempo Δt constante. Los resultados obtenidos con la formulación propuesta se comparan con la formulación estándar en desplazamientos y la formulación mixta explícita estándar (Mex-Fem estándar $\tilde{u} = 0$), es decir sin considerar la sub-escala de los desplazamientos. Los análisis se han realizado con el programa de elementos finitos KRATOS [103, 104], desarrollado en el Centro Internacional de Métodos Numéricos (CIMNE). Como pre y post-procesador se ha utilizado GiD[148], también desarrollado en CIMNE.

En la discretización espacial se emplean 4 mallas de elementos finitos triangulares y tetraédricos mostradas en las figuras 5.47 y 5.48, respectivamente. Para eliminar las frecuencias espurias que pueden aparecer en la integración temporal sin degradar la respuesta dinámica se emplea un amortiguamiento de Rayleigh en las altas frecuencias y un coeficiente disipación en la sub-escala $\tilde{\xi} = 0.1$. Asimismo, con el fin de obtener la respuesta estacionaria del problema quasi-estático se emplea un amortiguamiento de Rayleigh con un coeficiente de amortiguamiento de $\xi = 0.1$ amortiguado en las bajas y altas frecuencias con $\tilde{\xi} = 0.1$. La carga impuesta F de valor unitario se aplica de una manera instantánea y constante en el tiempo.

La evolución del desplazamiento vertical en la esquina superior derecha (punto A) para un análisis 2D de deformación plana se muestra en las figuras 5.49 y 5.50 para valores de Poisson de $\nu = 0.3$ y $\nu = 0.499$, caso compresible y quasi-incompresible respectivamente. Se puede observar que para $\nu = 0.3$, ambas formulaciones presentan resultados similares en el campo de los desplazamientos y presiones, aunque MEX-FEM es más preciso. Sin embargo, nótese como en el caso quasi-incompresible $\nu = 0.499$, la formulación propuesta

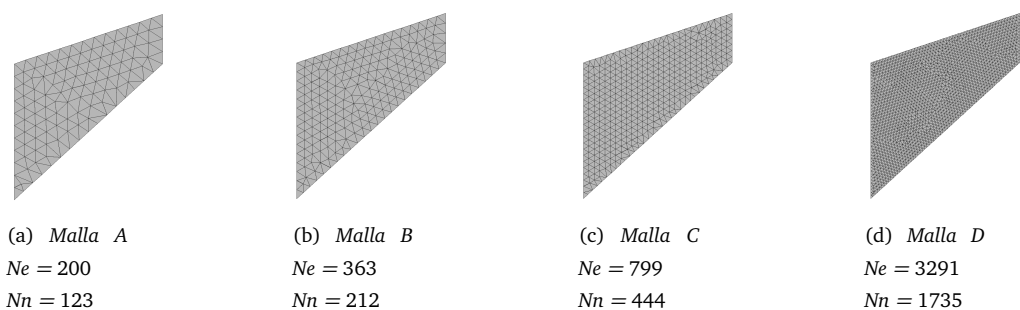


Figura 5.47: Membrana de Cook. Mallas de elementos finitos empleada en el análisis bidimensional.
 N_e : número de elementos y N_n : número de nodos.

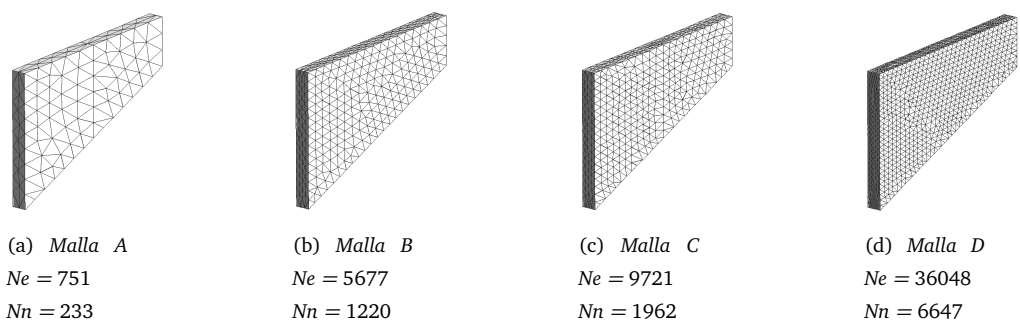


Figura 5.48: Membrana de Cook. Mallas de elementos finitos empleada en el análisis tridimensional.
 N_e : número de elementos y N_n : número de nodos.

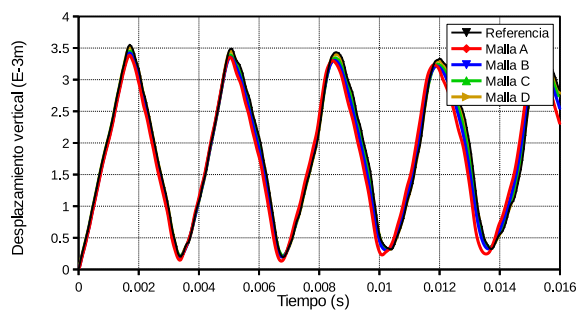
claramente supera a la irreducible. La figura 5.50a muestra el pobre comportamiento del elemento triangular estándar en el campo de los desplazamientos debido al efecto de bloqueo volumétrico. El desplazamiento predicho por este elemento, incluso utilizando mallas finas, está muy por debajo del valor correcto. Nótese además que el error de fase en la formulación irreducible es notoriamente mayor que el obtenido con la presente formulación para una misma malla de elementos finitos. La evolución del campo de las presiones para $\nu = 0.499$ (punto *B* de la figura 5.46) se aprecia en las figuras 5.50c y 5.50d tanto para la formulación irreducible como la de la presente formulación. Dado que el valor de la presión es constante dentro del elemento lineal irreducible, el valor nodal se ha obtenido mediante la proyección \mathcal{L}_2 , o sea, $p_h = \mathcal{P}_h(p)$. Obsérvese cómo el efecto del bloqueo volumétrico en la formulación irreducible provoca oscilaciones en el campo de las presiones que desvirtúan completamente la solución. En la figura 5.50d se puede comprobar que la presente formulación produce resultados satisfactorios y razonablemente precisos en el campo de las presiones.

Las curvas de convergencia para el caso estacionario para los valores de coeficiente de Poisson mencionados se muestran en la figura 5.51. Nuevamente para valor $\nu = 0.3$, la formulación irreducible, Mex-Fem estándar \tilde{u} y MEX-FEM convergen al valor correcto del desplazamiento (1.843 mm) y presión (1.632 MPa) a media que se refina la malla. Además, puede verse que las formulaciones mixta estándar y la propuesta convergen a la misma velocidad pero más rápido que la formulación irreducible. Por otra parte, cuando $\nu = 0.499$, se observa la capacidad de MEX-FEM para predecir el valor correcto del desplazamiento vertical (1.554 mm) y la presión (1.872 MPa). Obsérvese también que la formulación mixta explícita estándar, a pesar de dar un resultado satisfactorio del campo de los desplazamientos, presenta inestabilidades en el campo de las presiones que desvirtúan. En el mismo sentido, nótese que el valor del desplazamiento y de la presión predicho por la formulación irreducible está subestimado.

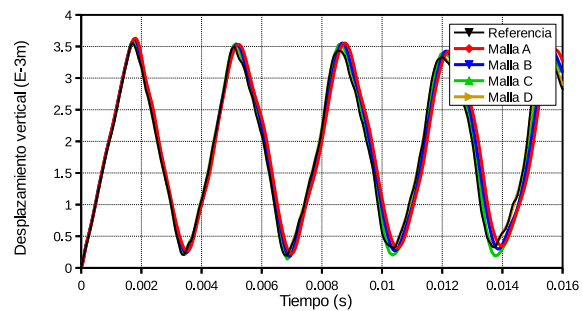
La figura 5.52 muestra el campo de las presiones de las formulaciones mencionadas en la Malla *D* para un valor de $\nu = 0.499$. Obsérvese como MEX-FEM es capaz de dar una solución estabilizada del campo de las presiones, no siendo así para el caso irreducible y el caso mixto explícito estándar.

Los resultados para el análisis dinámico tridimensional quasi-incompresible de la membrana de Cook se muestra en la figura 5.53. El caso compresible, no mostrado, tiene un comportamiento similar al caso bidimensional. Nuevamente, se observa el pobre rendimiento del elemento tetraédrico estándar en el campo de los desplazamientos debido al efecto de bloqueo volumétrico. El desplazamiento predicho por este elemento, incluso utilizando mallas tupidas, está muy por debajo del valor correcto. Nótese otra vez que el error en el periodo en la formulación irreducible es notoriamente mayor que con el obtenido de la presente formulación para una misma malla de elementos finitos. Las curvas de convergencia para el caso tridimensional se muestran en la figura 5.54. Sobresale la capacidad de MEX-FEM para predecir el valor correcto del desplazamiento vertical (1.998 mm) y la presión (1.251 MPa).

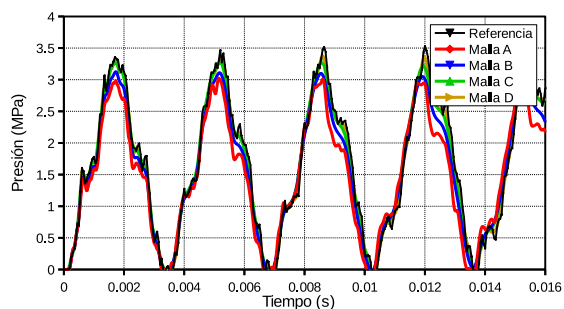
Finalmente, la figura 5.55 muestran el campo de las presiones de las formulaciones mencionadas en la Malla *D* para un valor de $\nu = 0.499$. Adviértase como MEX-FEM es capaz de dar una solución estabilizada del campo de las presiones en un problema tridimensional.



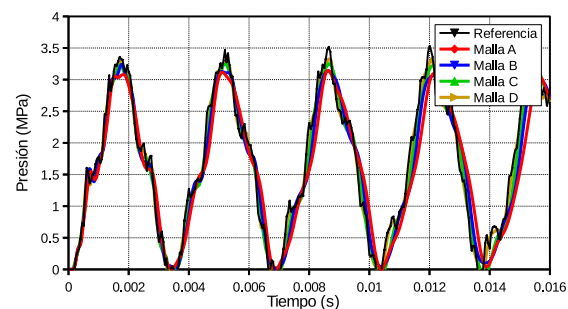
(a) Desplazamiento vertical en punto A. Irreducible.



(b) Desplazamiento vertical en punto A. MEX-FEM.

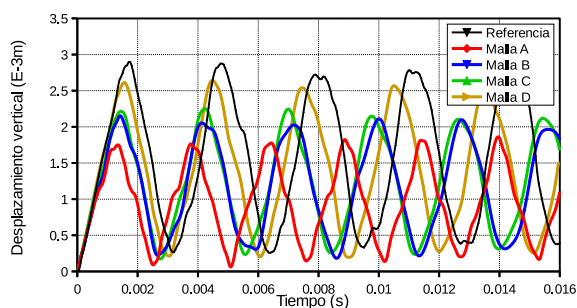


(c) Presión en punto B. Irreducible.

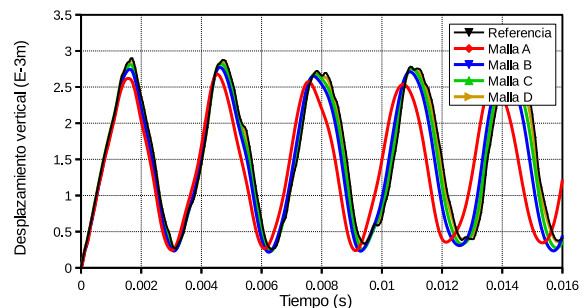


(d) Presión en punto B. MEX-FEM.

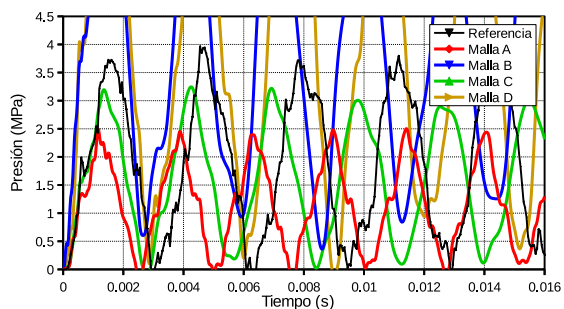
Figura 5.49: Membrana de Cook 2D. Formulación irreducible vs MEX-FEM con $\nu = 0.3$.



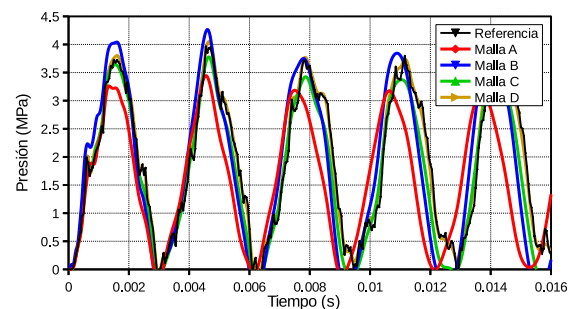
(a) Desplazamiento vertical en punto A. Irreducible.



(b) Desplazamiento vertical en punto A. MEX-FEM.

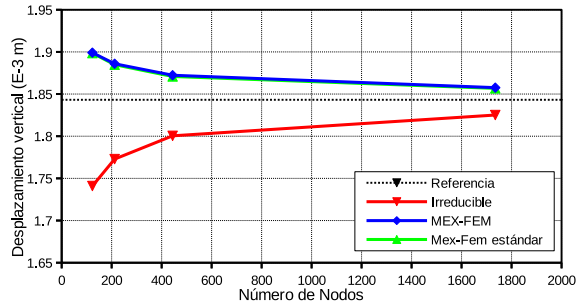


(c) Presión en punto B. Irreducible.

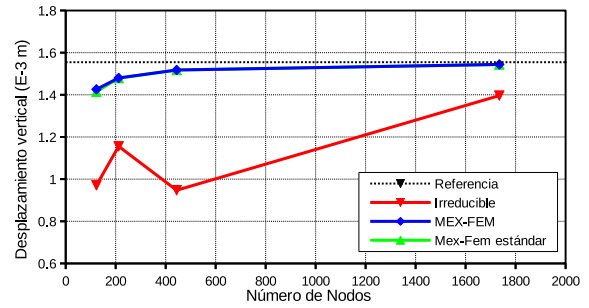


(d) Presión en punto B. MEX-FEM.

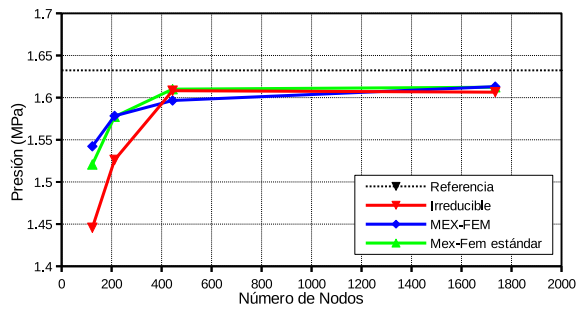
Figura 5.50: Membrana de Cook 2D. Formulación irreducible vs MEX-FEM con $\nu = 0.499$.



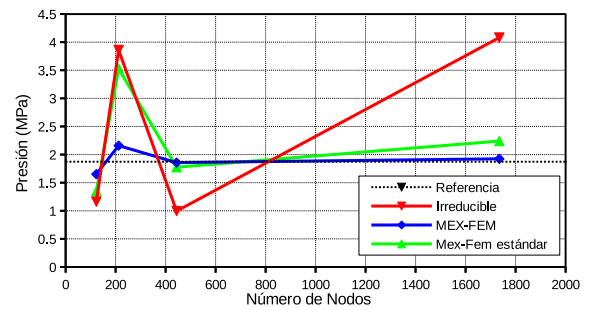
(a) Desplazamiento vertical en punto A, $\nu = 0.30$



(b) Desplazamiento vertical en punto A, $\nu = 0.499$

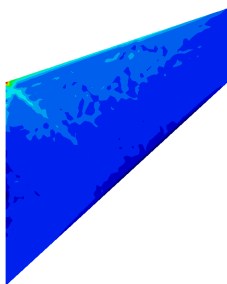


(c) Presión en punto B, $\nu = 0.30$

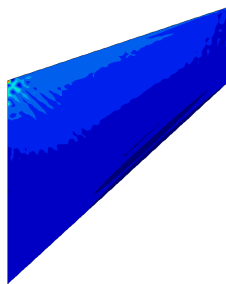


(d) Presión en punto B, $\nu = 0.499$

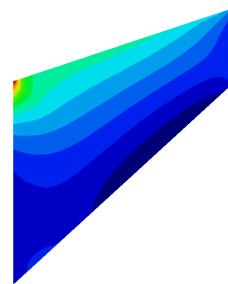
Figura 5.51: Membrana de Cook 2D. Curvas de convergencia.



(a) Irreducible.



(b) Mex-Fem estándar.



(c) MEX-FEM.

Figura 5.52: Membrana de Cook 2D. Campo de presiones. Malla D.

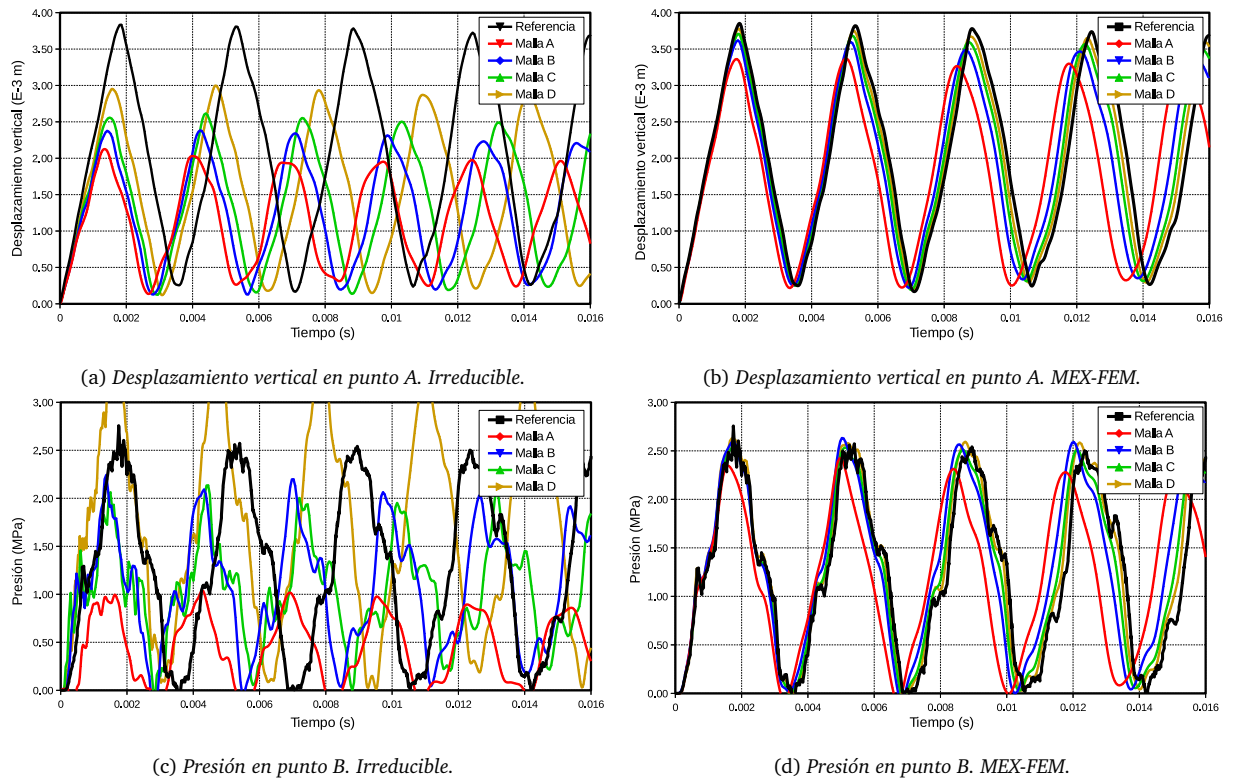


Figura 5.53: Membrana de Cook 3D. Formulación Irreducible vs MEX-FEM con $\nu = 0.499$.

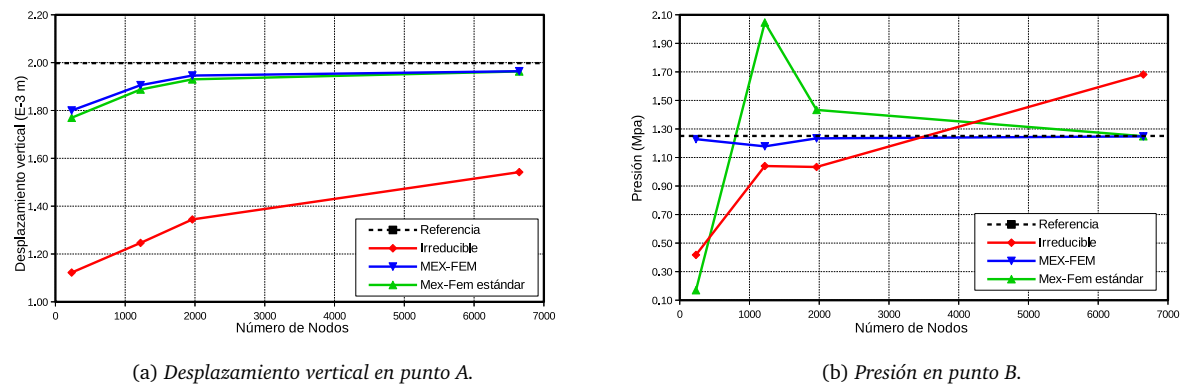


Figura 5.54: Membrana de Cook 3D. Curva de convergencia .

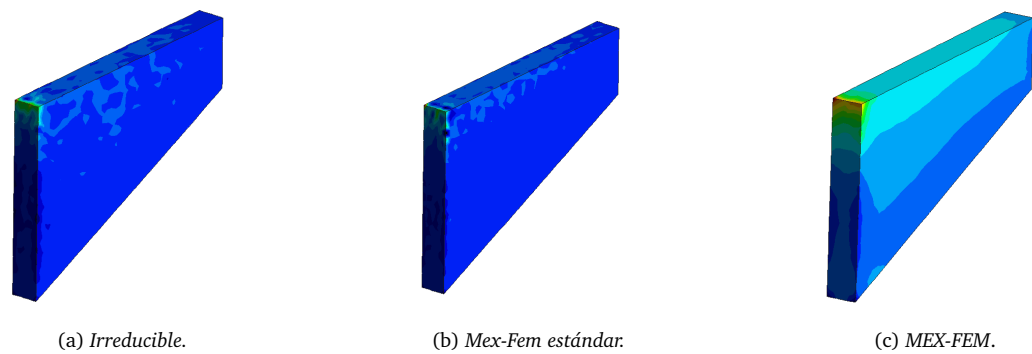


Figura 5.55: Membrana de Cook 3D. Campo de presiones. Malla D.

5.5.3.5. Ensayo de Prantl. Plasticidad Perfecta

El problema que se aborda a continuación se le conoce como ensayo de Prandtl. Consiste en un problema bidimensional en deformación plana muy empleado en la literatura para probar la capacidad de los modelos plásticos clásicos como J2, Tresca, Mohr Coulomb y Drucker-Prager y a la vez verificar los mecanismos de colapso y cargas últimas. Las figuras 6.26 muestran la geometría y la malla utilizada en el análisis respectivamente. Los materiales están dados en el cuadro E.1.

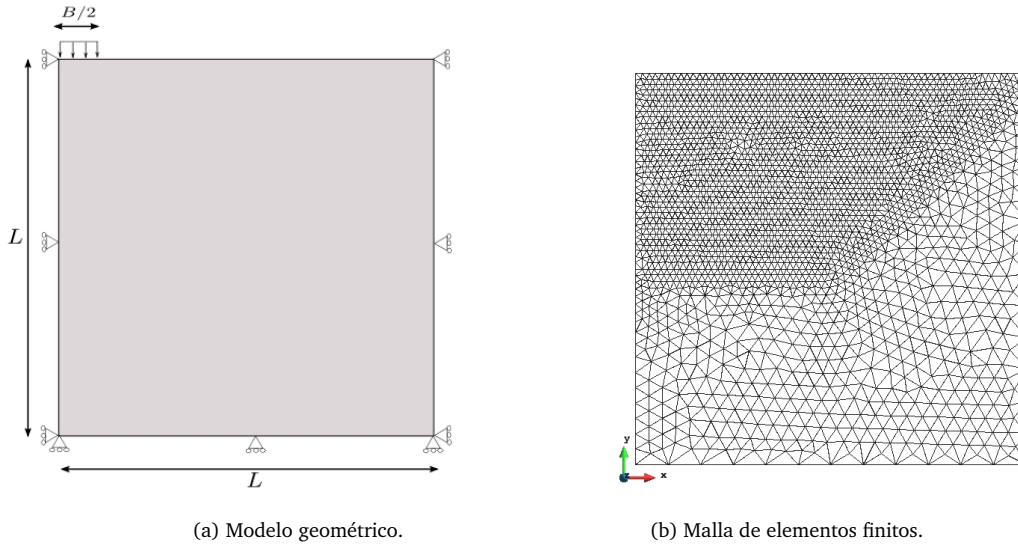


Figura 5.56: Geometría y malla de EF utilizado para la prueba de Prandtl.

Datos materiales	Valor($N - m$)
Densidad ρ	100 kg/m^3
Módulo de Young E	10^7 kPa
Razón de Poisson ν	0.48
Cohesión c_0	490 kPa
Ángulo de fricción ϕ	20°
Ángulo de dilatación ψ	20°

Cuadro 5.13: Datos de los materiales para la prueba de Prandtl.

Dada la simetría del problema, sólo se requiere que la mitad del dominio (la mitad derecha) sea discretizado. Las dimensiones L y B mostrados en la figura 5.56a son $5m$ y $1m$ respectivamente. Se asume un espesor de un $1m$. Con el objeto de simular un proceso quasi-estático, el proceso de carga se impone mediante una pequeña velocidad, instantánea y constante en el tiempo, de $10^{-3}m/s$ en la parte inferior de la zapata. La solución analítica de este problema para un modelo de plasticidad perfecta de MC predice una carga última normalizada de $P_{lim}/c_0 = 14.8$ donde P_{lim} es la fuerza total (reacción) aplicada. Este problema se analiza con la formulación irreducible empleando el elemento triangular lineal de 3 nodos, la formulación mixta explícita estándar (con $\tilde{u} = 0$) y MEX-FEM con elementos triangulares de tres nodos e igual interpolación para los desplazamientos y deformaciones. Las constantes algorítmicas de estabilización se toman como $c_u = 1.0$, $c_e = 1.0$ y $L_0 = 5m$.

Los resultados de los análisis se muestran en las figuras E.8 y E.9 para la formulación irreducible, mixta estándar y MEX-FEM respectivamente. Las figuras E.10b, 6.27c y 6.26e muestran la distribución suavizada de las deformaciones plásticas equivalentes, la presión y la tensión von Mises para el caso irreducible. Las figuras 5.57b, 5.64e y 5.57f muestran la distribución de las variables anteriormente mencionadas empleando la formulación mixta estándar. De igual manera, las figuras 5.58a, 5.58b y 5.58c muestran los resultados obtenidos con MEX-FEM. En el caso del elemento irreducible se observa una localización espuria debido al problema de la dependencia de la malla y al bloqueo volumétrico siendo incapaz de capturar la teórica rama logarítmica de localización. Además, el caso irreducible presenta oscilaciones en el campo de las presiones debido al efecto de bloqueo volumétrico inducido por el flujo plástico. Estas oscilaciones se presentan también en la formulación mixta estándar. Sin embargo, incluso con este problema de oscilaciones, el elemento de la formulación mixta explícita estándar es superior a su análogo irreducible y es capaz de capturar el mecanismo de colapso y la correcta localización sin presentar ramas espurias.

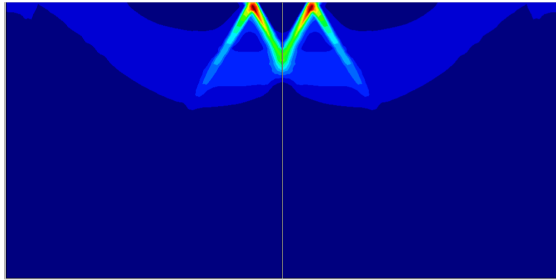
El mecanismo de colapso predicho por MEX-FEM es virtualmente idéntico a la formulación mixta explícita estándar. En particular es notable cómo se obtiene la rama logarítmica teórica sin ninguna ramificación espuria. Nótese también el campo estabilizado de las presiones obtenidas. De ahí la importancia de incluir la sub-escalas de los desplazamientos en el análisis. Obsérvese además que la resolución de la banda de corte es óptima ya que pasa a través de una sola banda de elementos. Las bandas de localización se forman de acuerdo a la solución clásica y es prácticamente libre de la dependencia de la malla.

La figura 5.60 muestra la curva Desplazamiento-Reacción obtenida. Como se puede observar, el elemento triangular irreducible de 3 nodos no es capaz de obtener la respuesta plástica perfecta y por consiguiente el valor de la carga última. Sin embargo, el elemento de la formulación mixta explícita estándar y MEX-FEM capturan satisfactoriamente el comportamiento plástico perfecto. El valor evaluado de la carga última normalizada para ambas formulaciones es de 15.19 y 14.98 respectivamente. Estos valores están en excelente acuerdo (aproximadamente 2.7% y 1.2% superior) con la solución analítica.

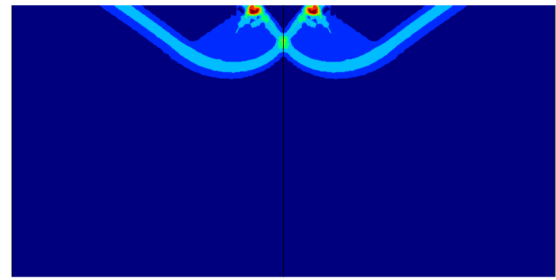
Finalmente, las figuras 5.59 muestran la deformada del ensayo de Prantl obtenida con la formulación irreducible y MEX-FEM. Obsérvese que el resultado obtenido con la formulación irreducible está afectada por el efecto del bloqueo volumétrico arrojando una deformada incorrecta. Sin embargo, MEX-FEM captura satisfactoriamente la deformada en común acuerdo con la solución clásica.

5.5.3.6. MEX-FEM en grandes deformaciones. Bloque 3D sometido a compresión

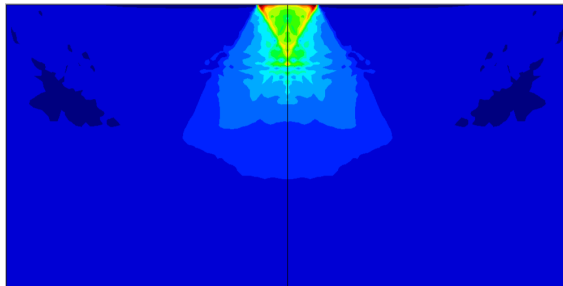
Se presenta a continuación un ensayo a compresión de dinámica rápida con la finalidad de mostrar el comportamiento del elemento mixto explícito propuesto en grandes deformaciones. Un bloque de $1m \times 1m \times 1m$ se comprime por su parte superior mediante la aplicación de una velocidad de $10m/s$ hasta que se logre imponer un desplazamiento del 15% de su altura original. La figura 5.61 muestra el dominio discretizado con una malla de tetraedros. Las condiciones de contorno se han prescrito en las bases superior e inferior de manera que los movimientos horizontales estén completamente restringidos. Se emplea un coeficiente de amortiguamiento al crítico de $\xi = 0.1$. y el clásico modelo constitutivo elástico casi-incompresible, con modulo de elasticidad de $10^7 N/m^2$ y coeficiente de Poisson de 0.49. Para este material hipotético se asume una densidad de $10kg$. Hay que resaltar que las condiciones de contorno prescritas son sumamente restrictivas, particularmente en casos quasi-incompresibles para elementos tetraédricos, pues en este caso cada elemento que tiene una cara en la base tiene solamente un nodo con posibilidad de movimiento que está restringido a tomar posiciones que preserven el volumen. La dimensión característica del modelo se toma como $L_0 = 1.00m$

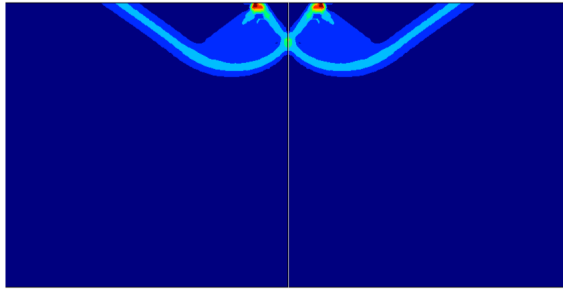


(a) Deformaciones plásticas equivalentes.
Formulación Irreducible.

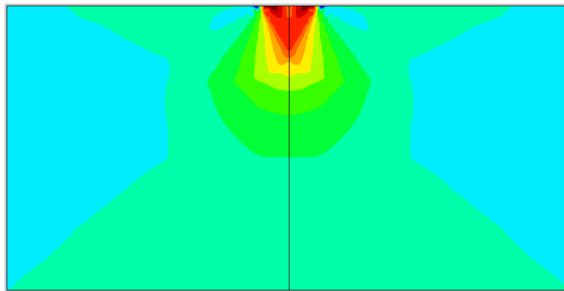


(b) Deformaciones plásticas equivalentes.
Mex-Fem estándar.

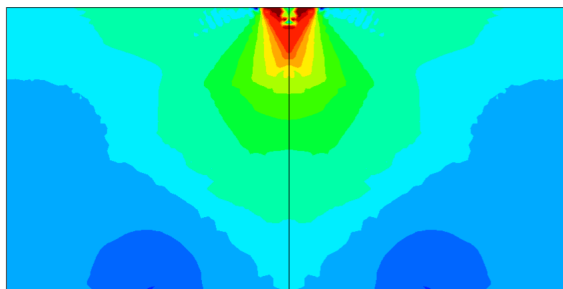




(a) Deformaciones plásticas equivalentes.

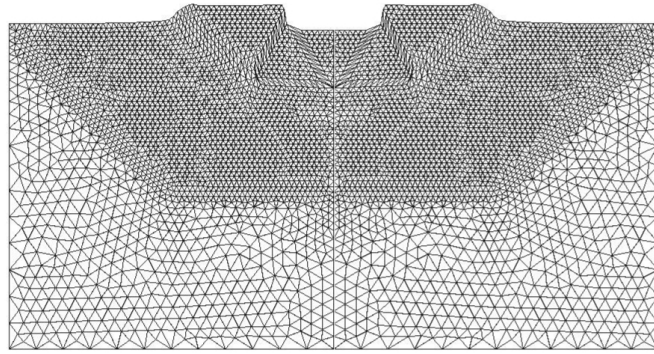


(b) Campo de presiones.

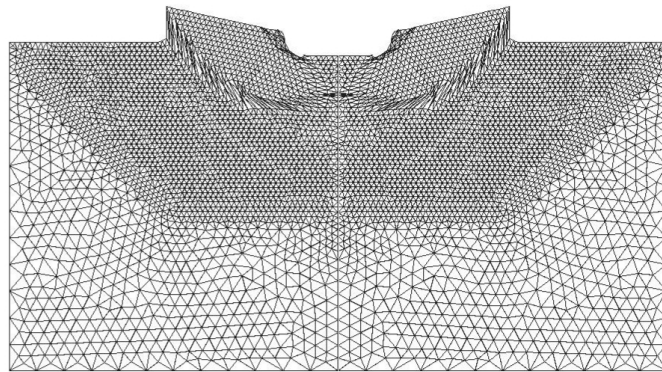


(c) Campo de tensiones de Von-Mises.

Figura 5.58: Resultado de los análisis con MEX-FEM .



(a) Deformada formulación irreducible.



(b) Deformada MEX-FEM.

Figura 5.59: Deformada del test de Prantl.

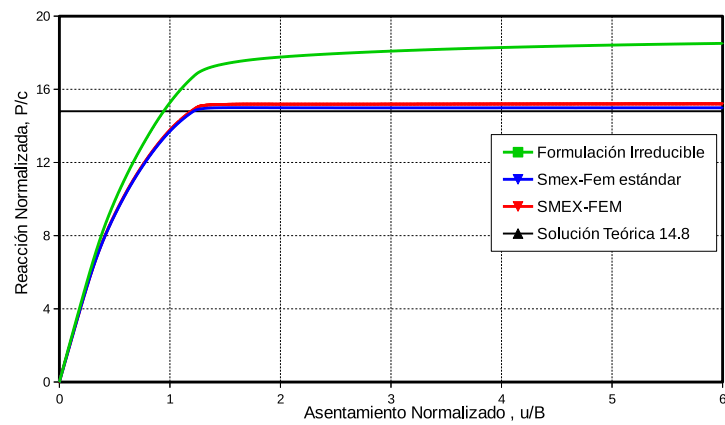


Figura 5.60: Curvas de Desplazamiento-Reacción obtenidas con la formulación irreducible, mixta explícita estándar y MEX-FEM .

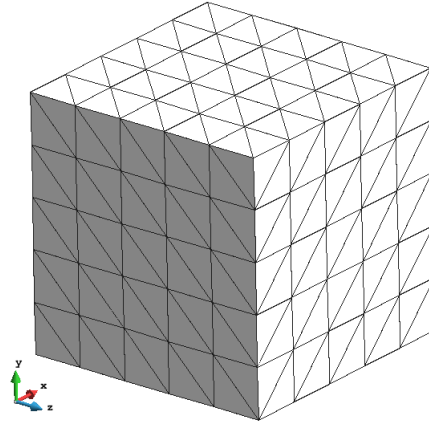
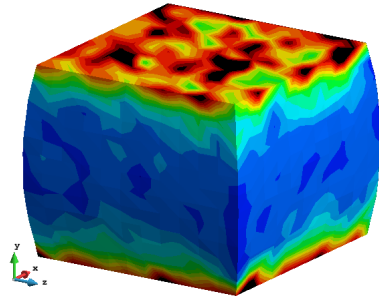


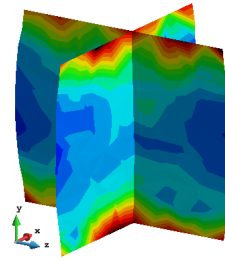
Figura 5.61: Ensayo a compresión de un bloque en 3D. Malla sobre la configuración de referencia.

y la longitud característica del elemento finito como $h = (6/\pi V)^{\frac{1}{3}}$. Para observar el efecto estabilizador de la sub-escala de los desplazamientos en el campo de las presiones se toman $c_u = 1.0$ y $c_u = 2.50$. La constante c_e se toma como $c_e = 1$.

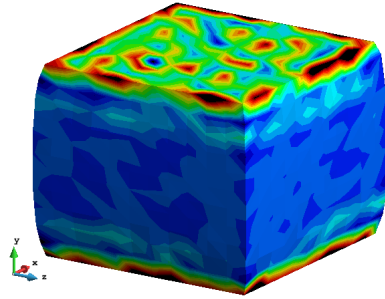
Las figuras 5.62 muestran la distribución de la presión obtenida con la formulación irreducible total lagrangiana, Mex-Fem estándar (sin considerar la sub-escala de los desplazamientos) y MEX-FEM respectivamente. Como se puede apreciar, el elemento irreducible de la formulación total lagrangiana no ofrece un buen resultado en situaciones quasi-incompresibles en grandes deformaciones. De igual manera, el elemento mixto explícito estándar de la formulación propuesta, cuyos resultados se muestran en las figuras 5.62c y 5.62d, presentan oscilaciones en el campo de las presiones. El elemento tridimensional MEX-FEM con $c_u = 1$ u $c_u = 2.5$ está libre de oscilaciones en el campo de la presiones y ofrecen resultados similares. Sin embargo, para el caso de $c_u = 1$ presenta el efecto de los bordes en las bases de manera más localizada que el valor de $c_u = 2.5$.



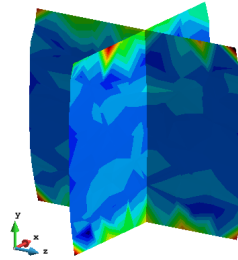
(a) Campo de presiones en la configuración deformada con formulación langragiana total.



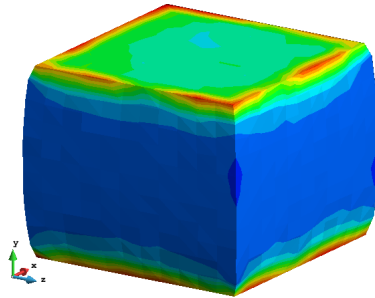
(b) Campo de presiones en la configuración deformada en dos secciones perpendiculares de corte.



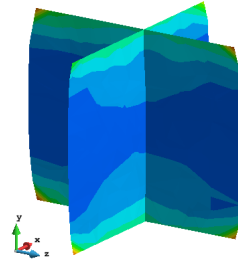
(c) Campo de presiones en la configuración deformada con Mex-Fem estándar.



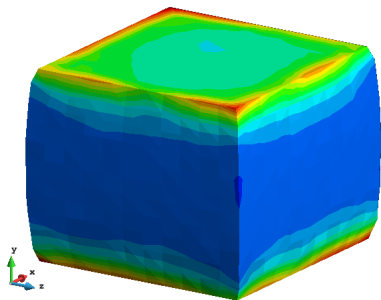
(d) Campo de presiones en la configuración deformada en dos secciones perpendiculares de corte.



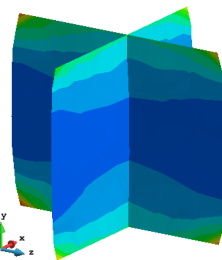
(e) Campo de presiones en la configuración deformada con MEX-FEM ($c_u = 1.0$).



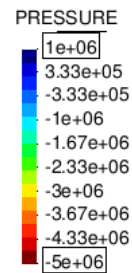
(f) Campo de presiones en la configuración deformada en dos secciones perpendiculares de corte.



(g) Campo de presiones en la configuración deformada en dos secciones perpendiculares de corte.



(h) Campo de presiones en la configuración deformada en dos secciones perpendiculares de corte.



(i) Leyenda.

Figura 5.62: Distribución del campo de las presiones en grandes deformaciones con formulación irreducible y la formulación propuesta.

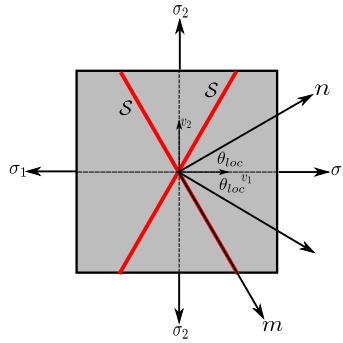


Figura 5.63: Ángulo de localización.

5.5.4. Aplicación de MEX-FEM en problemas de localización de deformaciones

5.5.4.1. Orientación de la banda de localización. Generalidades

Últimamente el fenómeno de localización de la deformación ha recibido una atención considerable y actualmente constituye el centro de varias investigaciones en muchas áreas de la ingeniería debido a su influencia significativa en el comportamiento de un gran número de materiales. La localización de la deformación ha sido durante mucho tiempo un tema desafiante y de controversia en la mecánica computacional[281]. Es además una característica ubicua de los materiales elasto-plásticos que experimentan deformaciones no homogéneas[11], en especial los materiales quasi-frágiles. Este fenómeno se manifiesta en una forma de banda de corte, una zona estrecha de intensas deformaciones a través del cual los campos de deformaciones en un cuerpo son discontinuos.

La formación de una banda de localización está acompañada por una respuesta de reblandecimiento en el material que por lo general conduce al completo colapso de la estructura. La deformación localizada es común en suelos y rocas, o en cualquier material susceptible al agrietamiento. En general, la localización de la deformación se considera una consecuencia de la inestabilidad del material[79] y desempeña un papel crítico en la descripción del fallo en muchas estructuras de ingeniería.

Varios autores [45, 193, 236, 268, 279, 284, 296, 336, 337, 365] empleando diferentes estrategias han encontrado soluciones analíticas y geométricas para la orientación de las bandas de discontinuidad en modelos elasto-plásticos (véase figura 5.63). Todos ellos basan sus soluciones en la llamada *condición de localización* que implica la pérdida de elipticidad de la ecuación de gobierno, demostrando que es una condición necesaria para la aparición de discontinuidades débiles y posteriormente el fallo localizado. Por lo general, se acepta que la formación de bandas de corte dependen de las propiedades del material. Un enfoque clásico consiste en la bifurcación de una solución homogénea con un gradiente de deformación discontinua, denominado discontinuidad débil en [356]. Algunos análisis de bifurcación se llevan a cabo empleando el tensor acústico \mathbf{Q} . Se dice entonces que un punto material es estable si los valores propios de este tensor se mantienen positivos e inestable en caso contrario. Sin embargo, el análisis de la localización en materiales isotrópicos empleando el tensor acústico resulta en dos direcciones de banda de localización, el cual hace que este criterio sea ambiguo. Por otra parte, Cervera et al. [72, 77, 395] proponen una metodología distinta para encontrar el valor analítico de la orientación de banda de localización. Este procedimiento formula las condiciones de acotabilidad de las tensiones y decohesión total, que combinados, son las condiciones necesarias para la formación de la banda de corte. Según estas condiciones, la banda de localización en un modelo de plasticidad asociada no depende de las constantes elásticas, sino únicamente del estado tensional y del vector de flujo plástico. Cervera et al. [71]

han verificado numéricamente por EF los resultados analíticos de localización en un modelo de plasticidad $J2$ y DP empleando una formulación mixta implícita.

El problema principal es que la aproximación dada por los elementos finitos basados en el enfoque de los desplazamientos (formulación irreducible) no es capaz de reproducir la dirección analítica de la localización debido entre otras razones a la dependencia de la malla, la poca aproximación del campo de deformaciones y tensiones y el efecto del bloqueo volumétrico producido por el flujo plástico. Por otra parte, al día de hoy sólo Cervera et al. [71] han verificado numéricamente por EF los resultados analíticos de localización en un modelo de plasticidad de Drucker Prager empleando formulación mixta implícita. En esta tesis validamos numéricamente por primera vez los resultados analíticos obtenidos por Runesson et al.[337](1991) en un modelo de plasticidad de MC asociado y no asociado mediante MEX-FEM .

5.5.4.2. Ensayo a tracción de una barra con agujero

Considere nuevamente el problema de la figura 5.12. Dada la simetría del modelo y de las condiciones de contorno, analizaremos sólo la parte superior derecha al igual que se hizo con el ejemplo envolviendo refinamiento local. Para obtener una respuesta de estado plano en una análisis tridimensional se fijan los desplazamientos en la dirección Z . Se emplea el modelo de MC en pequeñas deformaciones equipado con ablandamiento exponencial. Los datos de los materiales se presentan en el cuadro 5.7. El objetivo de este ejemplo es demostrar la capacidad de MEX-FEM para la obtención de la dirección de la banda de localización en un modelo asociado y no asociado de MC. Las constantes algorítmicas de estabilización se han tomado como $c_u = 1.0$ y $c_\epsilon = 1.0$. La dimensión representativa del problema se toma como $L_0 = 1.70$ y la longitud de elemento finitos como $h = (6/\pi)V^{\frac{1}{3}}$.

Los resultados numéricos se comparan con los resultados obtenidos por Runesson et al.[337](1991) y por Arthur et al. ²⁰. De hecho, esta es la primera verificación numérica que se realiza para obtener la dirección de la banda de localización en un modelo de MC sin necesidad de utilizar *Tracking* o remallado adaptable. Los casos a analizar y los resultados obtenidos del ángulo de localización θ_{loc} se presentan en la tabla 5.14.

Caso	ϕ	ψ	(T) (Runesson et al.)	(E) Arthur et al.)	(T) (Cervera et al.)	Numérico MEX-FEM
Caso 1	0°	0°	45°	45°	45°	43.89°
Caso 2	15°	15°	37.5°	37.5°	37.5°	37.57°
Caso 3	30°	30°	30°	30°	30°	29.36°
Caso 4	40°	40°	25°	25°	25°	26.86°
Caso 5	60°	60°	15°	15°	15°	15.07°
Caso 6	15°	30°	33.85°	33.75°	-	33.18°
Caso 7	30°	15°	33.85°	33.75°	-	34.35°
Caso 8	60°	30°	23.46°	22.5°	-	24.91°

Cuadro 5.14: Resultados obtenidos del ángulo de localización θ_{loc} empleando MEX-FEM (medido desde $90 - \theta_{loc}$). *T*(Resultado teórico, *E*) Resultado empírico.

Los resultados presentados en la tabla 5.14 muestran la eficacia de la formulación mixta explícita propuesta. Los resultados obtenidos están en completo acuerdo con la solución teórica y empírica, demostrando

²⁰Arthur, J., Dunstan, T., Al-Ani, Q. and Assadi, A. "Plastic Deformation and Failure in Granular Media". Géotechnique, 27, 53-74

una vez más que el problema de la fractura y su propagación es una cuestión de aproximabilidad. Obsérvese que se obtienen soluciones muy satisfactorias empleando una malla gruesa. Por otra parte, nótese que el caso 1 ($\phi = 0$ y $\psi = 0$) corresponde al clásico criterio de plasticidad de Tresca. Las figuras 5.64 muestran la distribución de las deformaciones plásticas equivalentes en la banda de localización. Las soluciones son virtualmente independientes de la malla de elementos usada y sin necesidad de emplear un complejo y difícil algoritmo de rastreo tridimensional o un algoritmo de remallado o refinamiento adaptable.

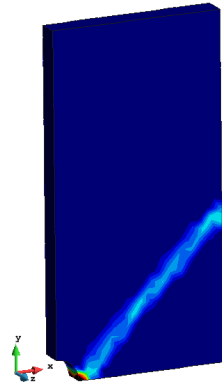
Finalmente, la figura 5.65 muestra la curva numérica Desplazamiento-Reacción computada para cada uno de los casos de análisis. En general, se puede observar un buen comportamiento en la curva de ablandamiento. Asimismo, note la influencia del ángulo de fricción interna en la resistencia a tracción del material. Era de esperar este comportamiento pues a medida que el ángulo de fricción interna ϕ aumenta disminuye la capacidad del material para resistir estados tensionales de tracción. Por otra parte, las curvas no asociadas (Caso 6, Caso 7 y Caso 8) alcanzan virtualmente la misma carga última que el caso asociado (Caso 2, Caso 3 y Caso 5). Si embargo, la respuesta post-pico es distinta debido al flujo potencial plástico empleado. Es obvio que la repuesta post-pico depende fuertemente del criterio de potencial empleado. Estos casos son meramente teóricos, pues en materiales reales sobre todo en los materiales friccionales se da la correlación de que $\psi < \phi$.

5.5.5. Cilindro de pequeño espesor con agujero a torsión longitudinal. Localización tridimensional

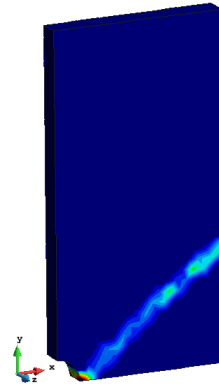
El último problema presentado es un cilindro hueco de pequeño espesor sometido a torsión según el eje longitudinal del cilindro. Las dimensiones del cilindro son: $h = 1.95m$, radio externo $r = 0.50m$ y espesor $t = 0.05m$; el cilindro presenta un hueco rectangular en su centro a fin de provocar una concentración de tensiones y la formación de una banda helicoidal de localización de deformación plástica. Para esta geometría y las solicitaciones estudiadas el estado resultante es de tensión plana, por lo que los ángulos de localización son $\theta_{loc} = 45^\circ \pm \phi/2$ ([72, 77, 395]). Dada la simetría de la geometría, sólo se analiza la parte superior. El modelo geométrico y la discretización estructurada empleada, con 15357 nodos y 59880 elementos tetraedros MEX-FEM P1-P1, se muestran en la figura 5.66. En las simulaciones se usan las propiedades materiales: densidad $\rho = 100 \text{ Kg/m}^3$, módulo de Young $E = 10^5 \text{ Pa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$, límite elástico $f_y = c_0 = 400 \text{ Pa}$ y energía de fractura $\mathcal{G}_f = 5 \text{ N/m}$. La torsión se aplican mediante desplazamientos impuestos en la superficie superior a una velocidad de $0.001m/s$. Se utiliza como modelo de plasticidad el modelo de Mohr-Coulomb, con un ángulo de fricción de 45° .

En este caso, el estado tensional en las paredes del cilindro es de cortante puro, con tensiones principales iguales y de signos opuestos actuando a 45° con el plano horizontal. Según los resultados analíticos ([72, 77, 395]), las líneas de deslizamiento se forman a $\pm 22.5^\circ$ con la dirección principal menor, es decir, a 22.5° y 67.5° con el plano horizontal. Ambas soluciones alternativas se muestran en las figuras 5.67 y 5.68, respectivamente. Para obtener una u otra, se perturba ligeramente el problema de torsión pura con una tracción/compresión longitudinal, respectivamente.

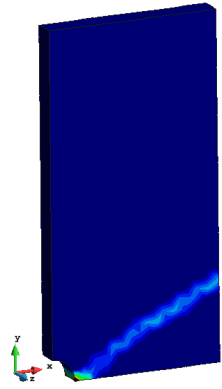
En ambos casos se obtienen las soluciones analíticas con independencia de la orientación de la malla. La formulación propuesta es capaz de dar una solución satisfactoria al problema tridimensional de la localización, sin necesidad de emplear un complejo algoritmo de rastreo tridimensional.



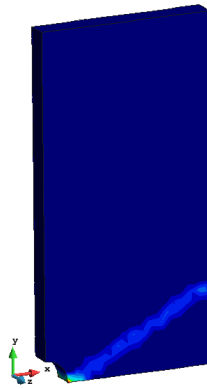
(a) $\phi = 0$ y $\psi = 0$. $\theta_{loc} = 43.89$.



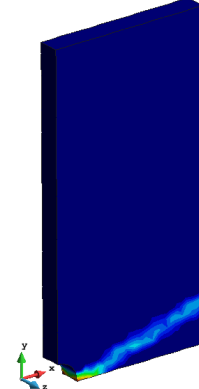
(b) $\phi = 15$ y $\psi = 15$. $\theta_{loc} = 37.57$.



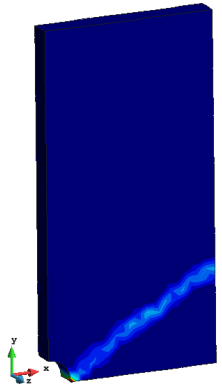
(c) $\phi = 30$ y $\psi = 30$. $\theta_{loc} = 29.36$.



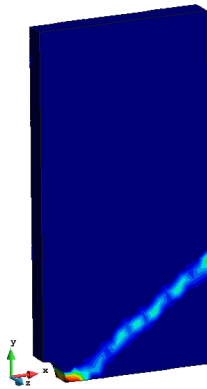
(d) $\phi = 40$ y $\psi = 40$. $\theta_{loc} = 26.86$.



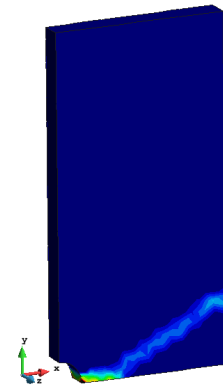
(e) $\phi = 60$ y $\psi = 60$. $\theta_{loc} = 15.07$.



(f) $\phi = 15$ y $\psi = 30$. $\theta_{loc} = 33.18$.



(g) $\phi = 30$ y $\psi = 15$. $\theta_{loc} = 34.35$.



(h) $\phi = 60$ y $\psi = 30$. $\theta_{loc} = 24.06$.

Figura 5.64: Banda de localización obtenida con MEX-FEM . Deformaciones plásticas equivalentes.

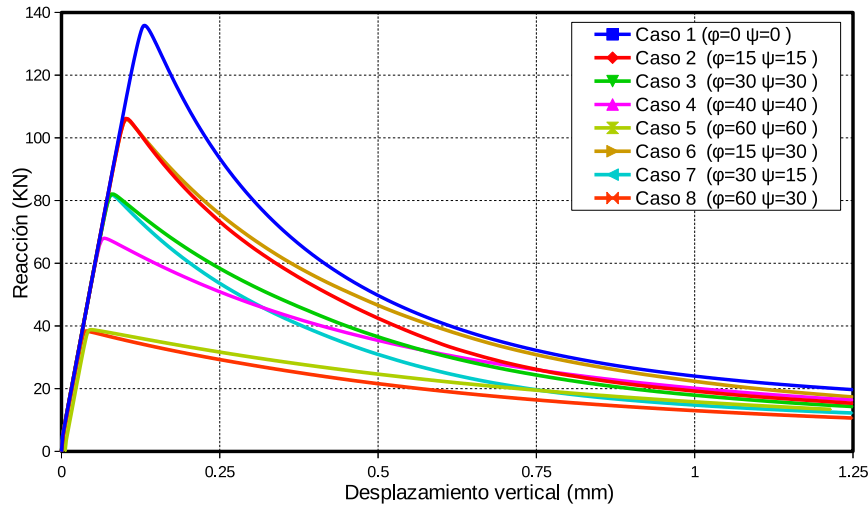


Figura 5.65: Curvas Desplazamiento-Reacción para el problema de la barra con agujero.

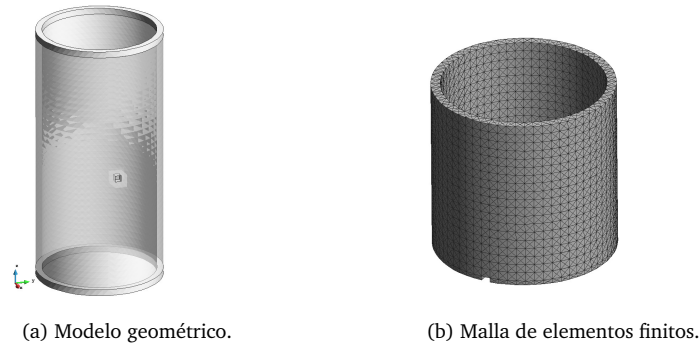


Figura 5.66: Geometría y malla empleada.

5.6. Conclusión y discusión

Este capítulo introduce lo que a nuestro entender son los ingredientes fundamentales para la simulación de la fractura discreta: a) Un algoritmo de refinamiento local adaptativo para mallas triangulares y tetraédricas, el cual nos proporciona de una manera más sencilla la realización discreta de la fractura en la malla de elementos finitos, b) Un modelo de rotura de elementos basado en la combinación de un modelo de rotura por caras y/o por elementos y c) La primera formulación mixta estabilizada explícita en la mecánica de sólidos en pequeñas y grandes deformaciones capaz de abordar problemas cercanamente incompresibles y abordar efectivamente el problema de la fractura y la localización de las deformaciones sin necesidad de un algoritmo de rastreo.

El motivo principal de la realización de esta novedosa formulación fue resolver los inconvenientes encontrados en la formulación irreducible tradicional que a lo largo de los años fue y es empleada para la resolución del problema de la fractura. Realizar fractura discreta con la formulación tradicional derivaría en los mismos inconvenientes encontrados por Ingraffea et al. [191, 192, 341]. En este sentido, esta tesis nos llevó y derivó a la necesidad de replantear la fractura desde un enfoque distinto.

El principal mensaje de este capítulo radica en que el problema de la fractura y su propagación es un asunto de aproximabilidad del campo tensional y deformacional. Los ensayos numéricos realizados son la

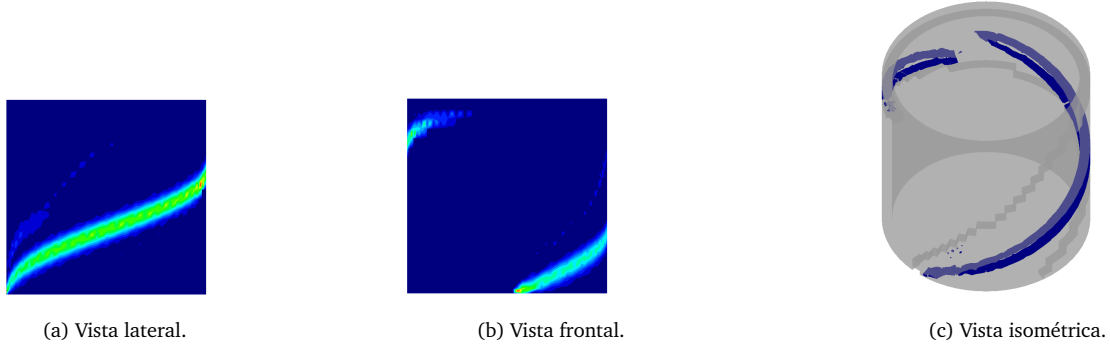


Figura 5.67: Deformaciones plásticas equivalentes en el modelo de MC con $\phi = 45^\circ$ en torsión con perturbación de tracción. Ángulo de localización teórico: $\theta_{loc}^{teo} = 22.5^\circ$ con el plano horizontal. Ángulo de localización numérico: $\theta_{loc}^{num} = 23.62^\circ$.

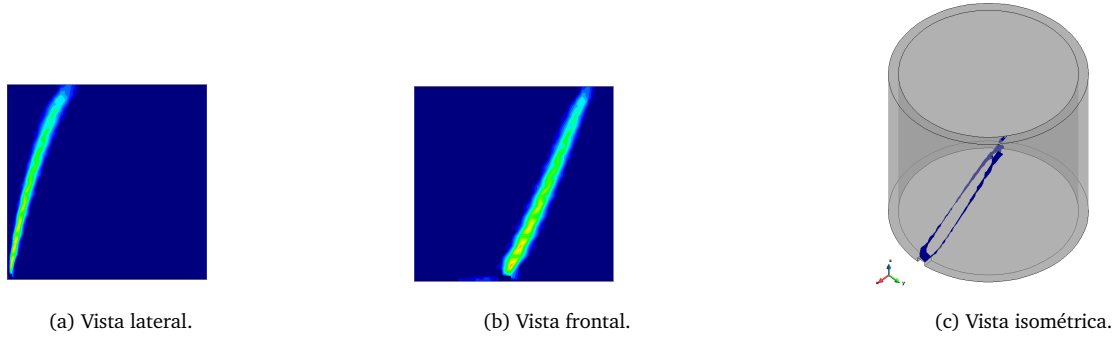


Figura 5.68: Deformaciones plásticas equivalentes en el modelo de MC con $\phi = 45^\circ$ en torsión pura. Ángulo de localización teórico: $\theta_{loc}^{teo} = 67.5^\circ$ con el plano horizontal. Ángulo de localización numérico: $\theta_{loc}^{num} = 67.53^\circ$.

prueba de ello, sobre todo el ejemplo que involucra la localización de las deformaciones. La banda de corte sale de una manera natural a medida que evoluciona el proceso elasto-plástico, localizando en la dirección correcta de la banda de corte (incluso en mallas gruesas) y siendo virtualmente independiente de malla de elementos finitos usada. Esto abre una nueva línea para abordar problemas de fractura y localización de deformaciones.

En particular estoy muy de acuerdo con una reflexión realizada por Lautersztajn y Samuelsson (2000) en la cual cito: “*To choose an appropriate element for the given problem can be a choice between a simple element with a few degrees of freedom in a very fine mesh and a physically more correct element in a coarse mesh.*”. Este pensamiento es directamente aplicable al problema de la fractura.

Modelado discreto de la fractura. Simulaciones Numéricas

Un científico debe tomarse la libertad de plantear cualquier cuestión, de dudar cualquier afirmación, de corregir errores.

Robert Julius

6.1. Introducción

En este capítulo se presentan algunos ejemplos numéricos con el fin de aplicar los conceptos y técnicas desarrolladas a lo largo del presente trabajo a la simulación numérica de problemas que envuelven localización, fractura discreta, fragmentación y contacto. Comprobar el buen desempeño de todos estos conceptos en su conjunto para el modelado de procesos complejos de fractura discreta y fragmentación es el objetivo principal de este capítulo y de este trabajo. Los elementos triangulares y tetraédricos de la formulación propuesta MEX-FEM se comparan con los elementos de la formulación irreducible. Se muestran aplicaciones en problemas de deformación plana así como un ejemplo tridimensional en grandes deformaciones, asumiendo pequeñas deformaciones elásticas y grandes deformaciones plásticas en base a una formulación langragiana total. Con la finalidad de mostrar el comportamiento en situaciones extremas se emplean mallas bastas en la mayoría de los casos. Para problemas bidimensionales, el tamaño del elemento finito se ha tomado como $h = (4/\pi \cdot A)^{\frac{1}{2}}$ siendo A el área del elemento finito correspondiente. En el caso tridimensional se ha tomado $h = (6/\pi \cdot V)^{\frac{1}{3}}$ donde V el volumen del elemento finito. Como método de estabilización se emplea el OSS computando la sub-escala de los desplazamientos \tilde{u} con la ecuación (5.4.116). Se asume que la fractura discreta se forma una vez el daño plástico alcance el valor de 95%; es decir, $\kappa_p = 95\%$. Los modelos de discontinuidad empleados son Rankine, Mohr-Coulomb y Mohr-Coulomb modificado, asumiendo ablandamiento exponencial en la cohesión y la resistencia a tracción del material. Se asume que el ángulo de fricción ϕ y dilatancia ψ permanecen constantes. Los parámetros de estabilización c_u y c_ε se toman en el rango de $[0.01 - 2]$. A fin de obtener la respuesta quasi-estática el tiempo se emplea un amortiguamiento proporcional del $[10 - 20]\%$ equipado con relajación dinámica. Se introduce igualmente un amortiguamiento en la sub-escala de los desplazamientos a fin de eliminar las frecuencias espurias en dicha sub-escala $\tilde{\xi} = [0.1 - 0.5]$. Todas las simulaciones presentadas se han realizado con el programa de elementos finitos KRATOS [103, 104], desarrollado en el Centro Internacional de Métodos Numéricos (CIMNE). Como pre y post-procesador se ha utilizado GiD[148], también desarrollado en CIMNE.

6.2. Simulaciones Numéricas

6.2.1. Simulación numérica de fractura discreta en ensayo brasileño

El ensayo brasileño es un sencillo método de prueba indirecta para obtener la resistencia a tracción f_t del material quasi-frágil. Debido a las dificultades técnicas para llevar a cabo un ensayo uniaxial de tracción directa, el ensayo brasileño es una alternativa simple y viable para medir dicha resistencia. Este método fue introducido de manera independiente por Akazawa[3] y Carneiro[59]. Consiste en someter un cilindro a compresión sobre un plano diametral. Debido al estado tensional del disco, la rotura se produce por tracción cuando las tensiones que aparecen en el plano de aplicación de las cargas alcanzan la resistencia a tracción del material. En ese instante el material comienza su fractura y ésta se propaga a lo largo del plano diametral $A-B$, tal y como se muestra en la figura 6.1c. Esta compresión induce esfuerzos normales de tracción, los cuales son en esencia constantes, salvo en la zona próxima a la aplicación de cargas. Sin embargo, el estado tensional no es uniaxial y el material soporta tensiones de compresión que son normales a las tensiones de tracción, con valores absolutos que sobrepasan más de tres veces la resistencia a tracción del material en el momento de la fractura. Para materiales con valor de relación de resistencia $\mathcal{R} = f_c/f_t$ altos como los materiales cerámicos y el hormigón, la fractura del material se debe a las tensiones de tracción mientras se asume que las tensiones de compresión no produce daño alguno, siendo ésta una de las principales razones por la que el ensayo brasileño se presenta como una solución viable para la medida de la resistencia a tracción de los materiales quasi-frágiles[132]. No obstante, la evidencia experimental demuestra que las tensiones de compresión producidas en las proximidades de la zona de carga pueden tener una influencia significativa en los resultados del ensayo que se manifiesta por lo general como un fallo por cortante. De igual manera, la velocidad de aplicación de cargas, la imposición de las cargas y la anisotropía local del material tienen una fuerte influencia en los resultados. Un resultado experimental y patrones de fractura pueden observarse en la figura 6.2 en donde se ha realizado el ensayo correspondiente en un disco de concreto.

En este ensayo se asume que el fallo ocurre en el punto de máxima tensión de tracción, es decir, el centro del disco. La ecuación sugerida por *American Society for Testing Materials* (ASTM) para calcular el valor de la resistencia a tracción del material quasi-frágil en el ensayo brasileño es:

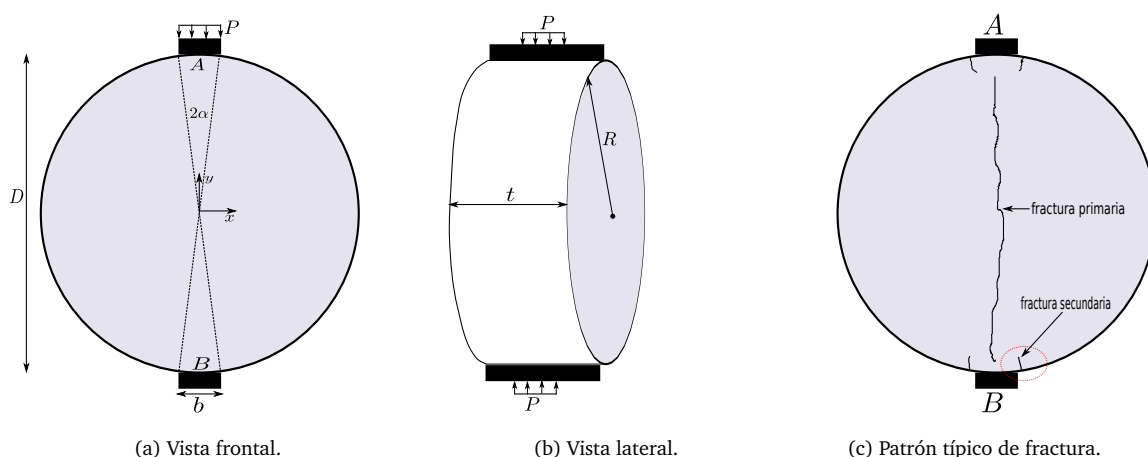


Figura 6.1: Ensayo brasileño. Geometría, condiciones de carga y patrón de fractura.

$$f_t = \frac{2P}{\pi Dt} \quad (6.2.1)$$



Figura 6.2: Resultado experimental del ensayo brasileño[402].

donde P es la carga aplicada hasta el fallo, D (mm) y t (mm) es el diámetro y es el espesor del disco respectivamente y b (mm) el ancho de aplicación de carga. En la realización de este ensayo, se asume lo siguiente. En primer lugar se asume la aplicación de una presión uniforme en el disco, radialmente aplicada sobre un pequeño sector circunferencial o *ancho de reparto* $b_r = b/D$. Asimismo, se desprecian los efectos friccionales entre el disco y la placa de carga. El material es homogéneo, isótropo y elástico lineal antes del fallo. Este fallo sigue los criterios de Griffith y la tensión principal intermedia σ_2 no tiene una influencia significativa. La ecuación 6.2.1 es la solución analítica cuando el ancho de reparto $b_r = 0$, lo que corresponde a la aplicación de una carga puntual, el cual, en la práctica no es posible. Si este ancho de reparto no es lo suficientemente elevado, la ecuación anterior sigue siendo válida excepto en la zona próxima de aplicación de cargas, donde las tensiones de tracción disminuyen de valor. De hecho, la solución elástica analítica de la distribución de tensiones de este problema, válido tanto para un estado de tensión plana como para un estado de deformación plana, está dado por Hondros[141]:

$$\sigma_\theta = \frac{P}{\pi R t \alpha} \left(\frac{(1 - (r/R)^2) \sin 2\alpha}{1 - 2(r/R)^2 \cos 2\alpha + (r/R)^4} - \tan^{-1} \left(\frac{1 + (r/R)^2}{1 - (r/R)^2} \tan \alpha \right) \right) \quad (6.2.2)$$

$$\sigma_r = -\frac{P}{\pi R t \alpha} \left(\frac{(1 - (r/R)^2) \sin 2\alpha}{1 - 2(r/R)^2 \cos 2\alpha + (r/R)^4} + \tan^{-1} \left(\frac{1 + (r/R)^2}{1 - (r/R)^2} \tan \alpha \right) \right) \quad (6.2.3)$$

donde R es el radio de la probeta, α es la distancia angular sobre el cual se aplica la carga P y r es la distancia medida desde el centro del disco. De acuerdo con el criterio de Griffith, el centro del disco es el único punto en el que se cumplen las condiciones para el fallo a tracción con un valor igual a la resistencia a tracción de

material. En este punto las tensiones principales son:

$$\sigma_{\theta} = \frac{P}{\pi R t} \left(\frac{\sin 2\alpha}{\alpha} - 1 \right) \approx \frac{P}{\pi R t} \quad (6.2.4)$$

$$\sigma_r = -\frac{P}{\pi R t} \left(\frac{\sin 2\alpha}{\alpha} + 1 \right) \approx \frac{-3P}{\pi R t} \quad (6.2.5)$$

cuya aproximación es válida para valores de α pequeños. La normativa ASTM recomienda valores de $\alpha < 15^\circ$ o de ancho de reparto $b_r < 0.16$.

Sin embargo, la validez del ensayo brasileño se ha debatido durante mucho tiempo y es de mucha polémica y controversia debido a los resultados contradictorios obtenidos por diferentes investigadores respecto a la variación de la tensión nominal de rotura con el tamaño de probeta. En comparación con el ensayo a tracción directa, por lo general el ensayo brasileño produce resultados mucho más cercanos a la resistencia real de tracción del material aunque puede sobre-estimar dicho valor debido al estado biaxial de tensiones que se presenta en la zona de fisuración. Una revisión completa y exhaustiva puede encontrarse en la referencia [238]. A pesar de las discrepancias de los resultados experimentales, el ensayo brasileño es todavía un método popular para determinar la resistencia a la tracción de las rocas, ya que la preparación de la muestra y los procedimientos experimentales en dicho ensayo son mucho más fáciles que la prueba de tracción directa.

Por otra parte, la reproducción numérica de este ensayo y la predicción de las formas de fallo han sido de intenso estudio. La mayoría de los investigadores coinciden que en un material homogéneo e isótropo la fractura primaria se inicia en el centro del espécimen, independientemente del criterio o modelo de fractura empleado. En rocas estratificadas o materiales quasi-frágiles transversalmente isótropos[372] los patrones de fractura son muy distintos y complejos donde el esfuerzo por cortante tiene una influencia significativa en el patrón final de fractura. La modelización numérica de la fractura en el ensayo brasileño está muy discutido en la literatura empleándose comúnmente modelos de fisura cohesiva[329, 316], modelos de fisura distribuida[132], modelos de elementos finitos con remallado[51], modelos de elementos finitos y discretos (FEM-DEM)[247]. Aquí emplearemos el método de los elementos finitos aplicando los conceptos y técnicas de los capítulos precedentes. A fin de contrastar el valor teórico, experimental y numérico de la resistencia a tracción del material, se emplean los datos del ensayo *STC4* de la referencia[329] realizados sobre rocas graníticas cuyos datos materiales se presentan en la tabla 6.1. Los valores en $\ast(\cdot)$ no fueron facilitados en el ensayo mencionado y se han escogido según los valores convencionales reportados en la literatura. No es objeto discutir el efecto tamaño de las probetas ni las condiciones de carga, sino más bien determinar numéricamente el valor de la resistencia a tracción del material y simular el proceso de fractura y fragmentación.

El ensayo *STC4* consiste en un disco circular de diámetro $D = 240 \text{ mm}$ y ancho de reparto $b_r = 0.16$. Se asume un espesor unitario y una condición de deformación plana. Las cargas aplicadas en ambos extremos del diámetro vertical y paralelo al plano de aplicación de cargas se imponen mediante un desplazamiento impuesto en la placa de cargas que se comportan como un cuerpo rígido. La transmisión de las fuerzas aplicadas se realizan a través del contacto de la placa de carga y la probeta el cual se asume que no ejerce ninguna fuerza de fricción. Las fuerzas de contacto normales se computan empleando el método combinado de multiplicadores de Lagrange (placa de carga y probeta) y el método de penalización con un coeficiente de penalización $p = 2E$ cuando el contacto ocurre entre los fragmentos de la probeta. No se incluyen los efectos de las fuerzas de contacto friccionales una vez se desarrollen los procesos de fragmentación. La inclusión de las fuerzas de fricción y su efecto se deja para una línea futura de investigación. El análisis se realiza bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones elásticas y en grandes deformaciones plásticas empleando el modelo Rankine, Mohr-Coulomb (MC) y el modelo modificado de Mohr-Coulomb (MCM) como superficies de descon-

Datos Materiales	Valor($N - m$)
Módulo de Young E	34.0 GPa
Resistencia a tracción f_t	10.1 MPa
Resistencia a compresión f_c	*(200.00) MPa
Cohesión c_0	*(30.00) MPa
Razón de Poisson ν	0.25
Fricción interna ϕ	*(45°)
Energía de Fractura \mathcal{G}_f	167 N/m
Energía de Aplastamiento \mathcal{G}_c	$\xi \alpha_c \cdot \mathcal{G}_f$

Cuadro 6.1: Datos de materiales de la probeta STC4 [329].

tinuidad¹. En el análisis se emplea una malla triangular no estructurada de elementos finitos con 1198 nodos y 2206 elementos lineales analizado con la formulación irreducible y MEX-FEM. A fin obtener la respuesta quasi-estática en el tiempo, se emplea un amortiguamiento proporcional con relajación dinámica y un coeficiente de amortiguamiento $\xi = 10\%$. Los parámetros de estabilización, el coeficiente de amortiguamiento en la sub-escala de los desplazamientos y el coeficiente de retardo para el módulo de cizallamiento se toman como $c_u = 2$, $c_e = 2$, $L_0 = 240\text{ mm}$, $\tilde{\xi} = 0.5$ y $\eta = 0.5$. respectivamente.

En la figura 6.4 se compara la distribución de tensiones elásticas σ_{xx} y σ_{yy} sobre la línea diametral $A - B$ obtenida con las ecuaciones 6.2.2 y 6.2.3 y MEX-FEM para un valor de carga $P = 2173.3N$. Otra vez se contrasta que la formulación mixta explícita propuesta es capaz de proporcionar una solución satisfactoria del campo tensional elástico del cilindro en las zonas alejadas de la aplicación de cargas. En la zona de aplicación de cargas, los resultados son menos precisos necesitándose más elementos finitos en la zona de contacto. Nótese además que la distribución de tensiones σ_{xx} es casi constante en el rango de $-35\text{mm} < r < 35\text{mm}$ con valor aproximado de $2P/\pi Dt$, cuyo valor analítico en el centro del espécimen es de 5.567MPa . La tensión vertical analítica absoluta σ_{yy} en ese punto es de 17.09MPa . Las tensiones computadas con MEX-FEM valen a 5.53MPa y 17.12MPa respectivamente. Las figuras 6.5, 6.6 y 6.7 muestran distintos eventos de la simulación numérica realizada con la formulación propuesta empleando el modelo Rankine, MCM y MC en el momento de la formación de la fractura y los procesos de fragmentación. En ellas se observan tres etapas bien diferenciadas. Se distingue en primer lugar, previa a la formación de la fractura discreta y justo al final de la rama elástica, procesos de discontinuidades débiles y localización de las deformaciones tanto en el centro del disco como en las zonas de aplicación de cargas (véase figuras 6.5d, 6.6d y 6.7d). Debido a la concentración de tensiones de compresión producidas en los extremos libres de la zona de carga, se producen deformaciones plásticas que pueden entenderse como pequeñas microfisuras, antes de que la fractura principal (o primaria) se desarrolle. Seguidamente, una vez alcanzado el nivel de daño total en el centro del disco, se produce la fisura principal paralelo al plano de carga extendiéndose rápidamente sobre el plano diametral $A - B$, tal y como indica la evidencia experimental (figuras 6.5b, 6.6b y 6.7b). La rotura del disco y su fragmentación en dos partes se produce de manera repentina, en unos pocos segundos ($2 - 4\text{ s}$), que se refleja en una caída abrupta y frágil en la curva Desplazamiento-Reacción (6.5b, 6.6b y 6.7b). El patrón final de fractura predicho

¹§La energía de aplastamiento en los materiales quasi-frágiles es del orden mucho mayor que la energía de fractura del material. En hormigones convencionales, la energía de aplastamiento es del orden de 100 veces la energía de fractura correspondiente, o más específicamente $\mathcal{G}_c = \mathcal{N}^2 \mathcal{G}_f$ (véase [287]). Como una aproximación simple, pero a sabiendas de que se requiere evaluar dicho parámetro de material, la energía de aplastamiento del material se tomará igual a cien veces la energía de fractura del material.

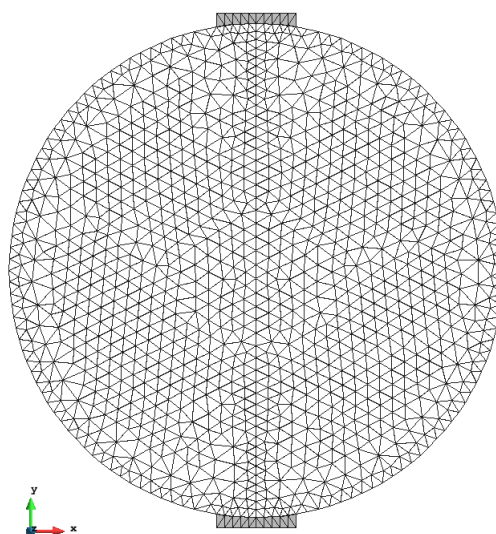


Figura 6.3: Malla de elementos finitos.

por MEX-FEM para los modelos de plasticidad empelados se muestra en las figuras 6.5e,6.6e,6.7e). Es notable como la formulación propuesta es capaz de predecir satisfactoriamente los resultados experimentales. Nótese el nivel de daño producido en la zona de aplicación de cargas y la división en dos partes del disco. Obsérvese además que se logra captar las fracturas secundarias cerca de la zona de aplicación de cargas tal y como se muestra en las figuras 6.5f, 6.6f, 6.7f y 6.2. El campo de las presiones justo antes del colapso se muestran en las figuras (6.5e,6.6e y 6.7e)). Se observa un campo estabilizado del campo de las presiones, virtualmente libre de oscilaciones y de bloqueo volumétrico.

Las figuras 6.8, 6.9 y 6.10 muestran distintos eventos de la simulación numérica empleando la formulación irreducible. Según se observa en los resultados numéricos, esta formulación no predice satisfactoriamente formación de las fracturas discretas observándose un patrón erróneo de fractura (figuras 6.8d, 6.9d y 6.10d). Este hecho se debe a que en la formulación irreducible, el factor de daño nodal no es buen criterio para la realización de las fractura discreta. Las fracturas se forman en aquellas zonas en donde se alcanzado el daño total, pero sin seguir la evidencia experimental. Esto se refleja más notoriamente en la figura 6.8d en donde carece de la formación de la fractura primaria en el centro del disco. Es posible obtener una mejor resolución y descripción de la fractura discreta siempre y cuando el daño plástico ponderado alcance un valor de 0.50. Es obvio que la formulación irreducible es incapaz de dar una respuesta satisfactoria en los procesos de fractura discreta.

La curva Desplazamiento-Reacción para los distintos modelos de plasticidad empleados, tanto en MEX-FEM como en la formulación irreducible se muestra en la figura 6.11. Lo que tienen en común todas estas curvas es la rama elástica y la caída frágil después del post-pico. Obsérvese, como se comentó con anterioridad, la solución irreducible es mucho más rígida que la mixta. Obsérvese además que la predicción de la tensión rotura en el disco empleando el modelo estándar MC es mucho más elevada que en el modelo de Rankine o que en el modelo de MCC, que virtualmente predicen la misma carga última de rotura. Este hecho se debe a que el modelo de MC no es directamente aplicable en muchos de los materiales quasi-frágiles empleados en ingeniería, razón por la cual se introduce la tensión de corte.

Finalmente, la tabla 6.2 compara el valor numérico de la tensión de tracción obtenida mediante las

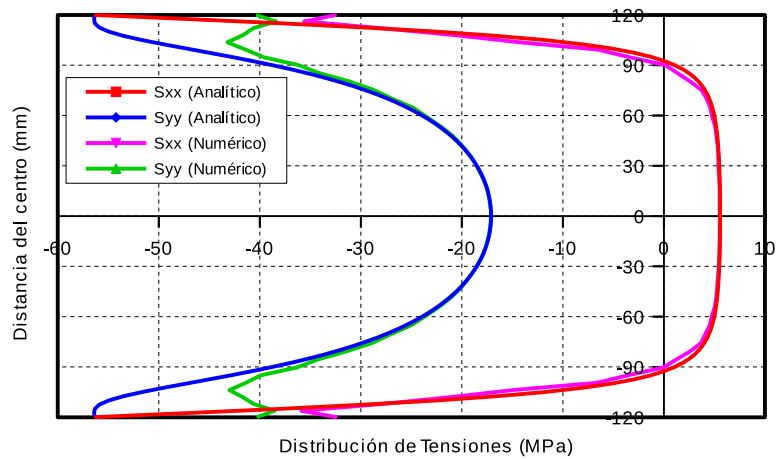
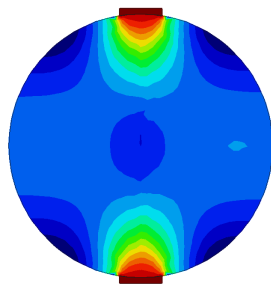
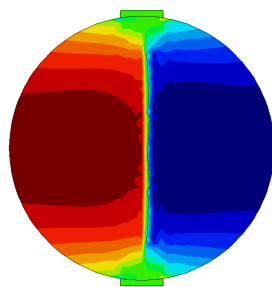


Figura 6.4: Distribución elástica de tensiones. Comparación de la solución analítica con la solución numérica obtenida con MEX-FEM.

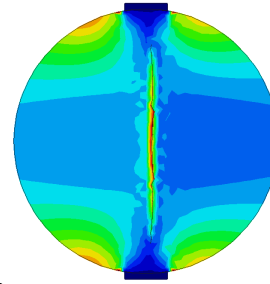
formulaciones empleadas con la experimental. Nótese que MEX-FEM predice adecuadamente la resistencia a tracción del material. En apariencia, también la formulación irreducible arroja resultados cercanos a la experimental.



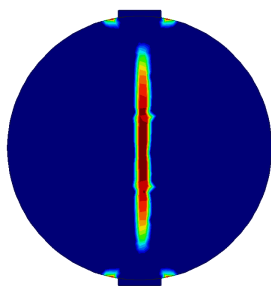
(a) Tiempo 182.49 s. Formación de localización débil.



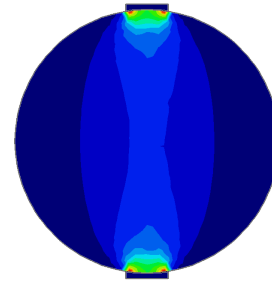
(b) Tiempo 183.74 s. Formación de la fractura primaria.



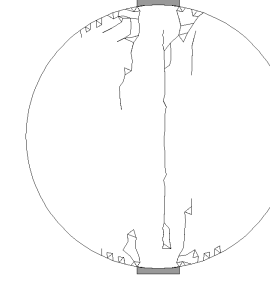
(c) Tiempo 184.99 s. División del disco.



(d) Tiempo 182.49 s. Distribución del daño plástico.

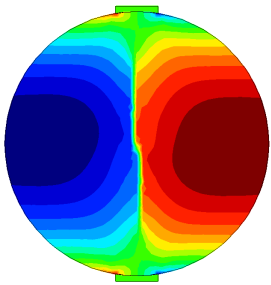


(e) Tiempo 182.49 s. Distribución de campo de las presiones.

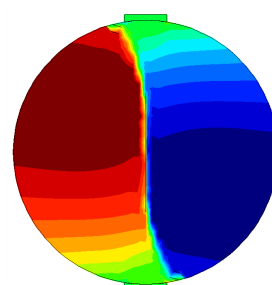


(f) Tiempo 350.0 s. Patrón final de fractura.

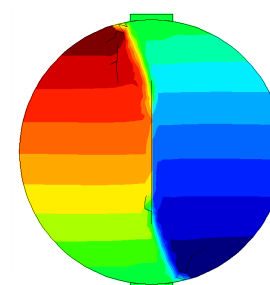
Figura 6.5: Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de Rankine con MEX-FEM.



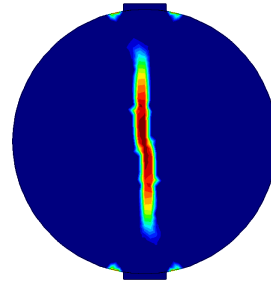
(a) Tiempo 263.8 s. Formación de localización débil.



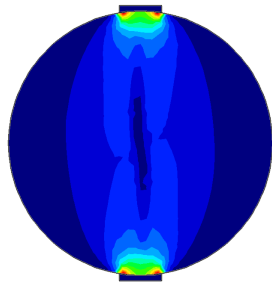
(b) Tiempo 277.2 s. Formación de la fractura primaria y secundaria.



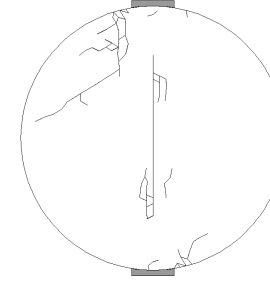
(c) Tiempo 375.5 s. Fragmentación del disco.



(d) Tiempo 263.8 s. Distribución del daño plástico.



(e) Tiempo 263.8 s. Distribución de campo de las presiones.



(f) Tiempo 500.0 s. Patrón final de fractura.

Figura 6.6: Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de MC con MEX-FEM.

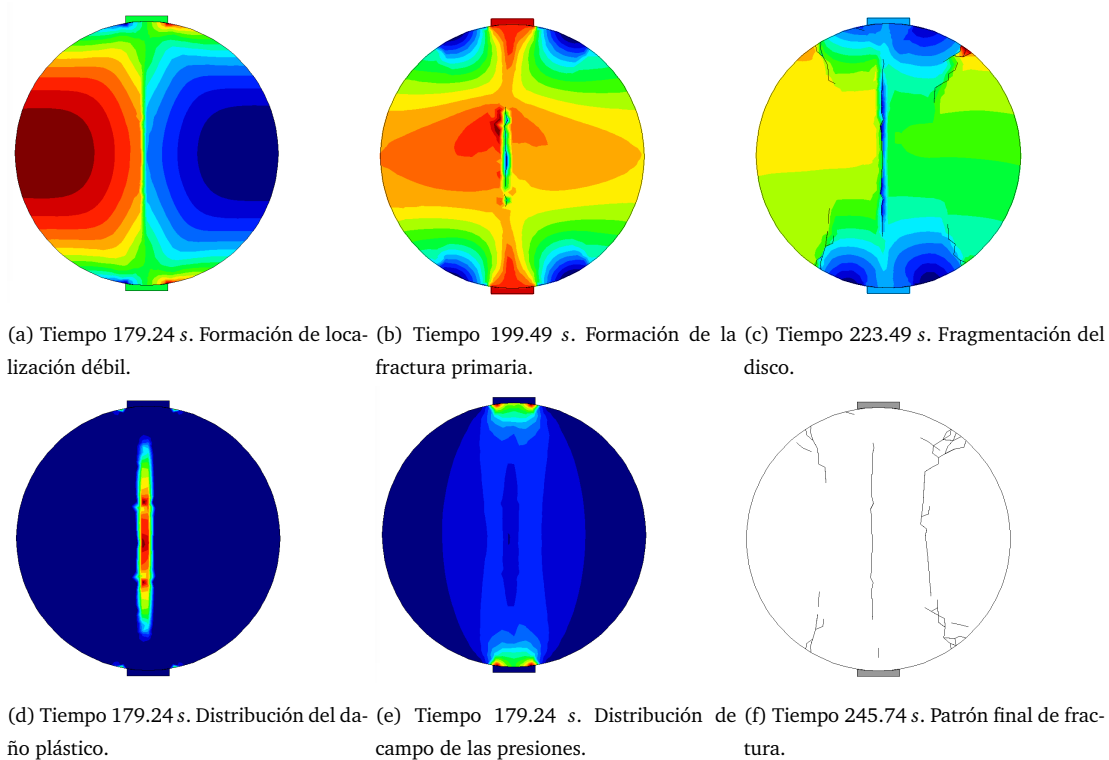


Figura 6.7: *Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de MCM con MEX-FEM.*

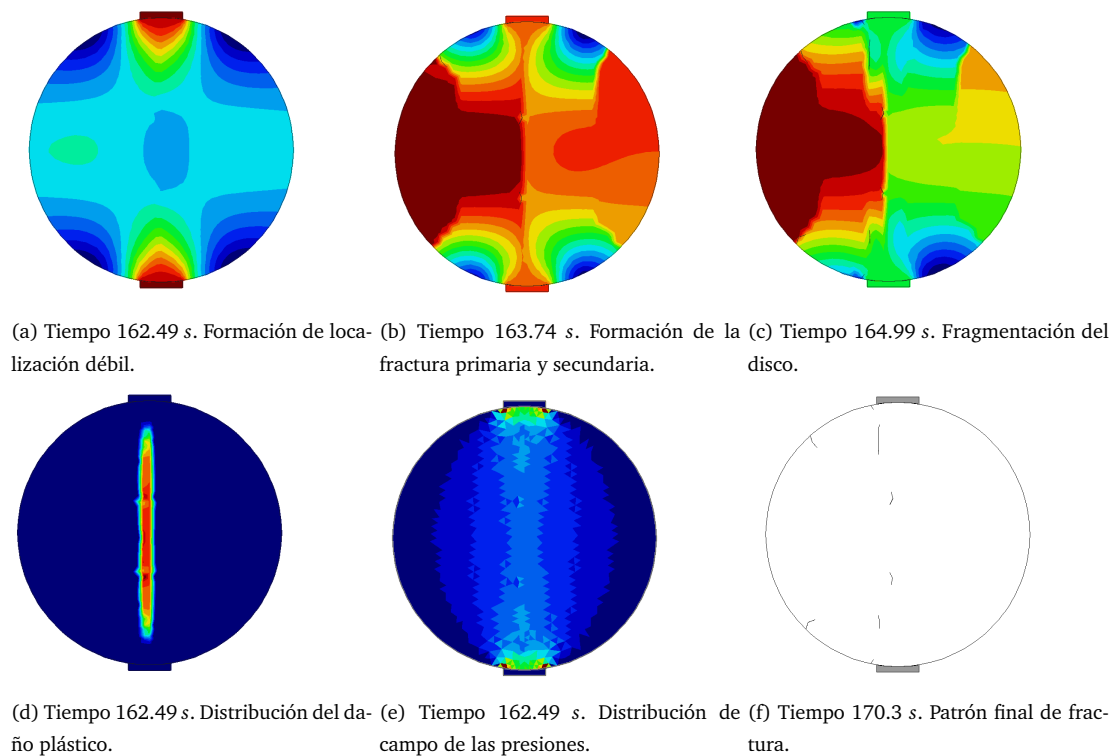


Figura 6.8: *Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de Rankine con formulación irreducible.*

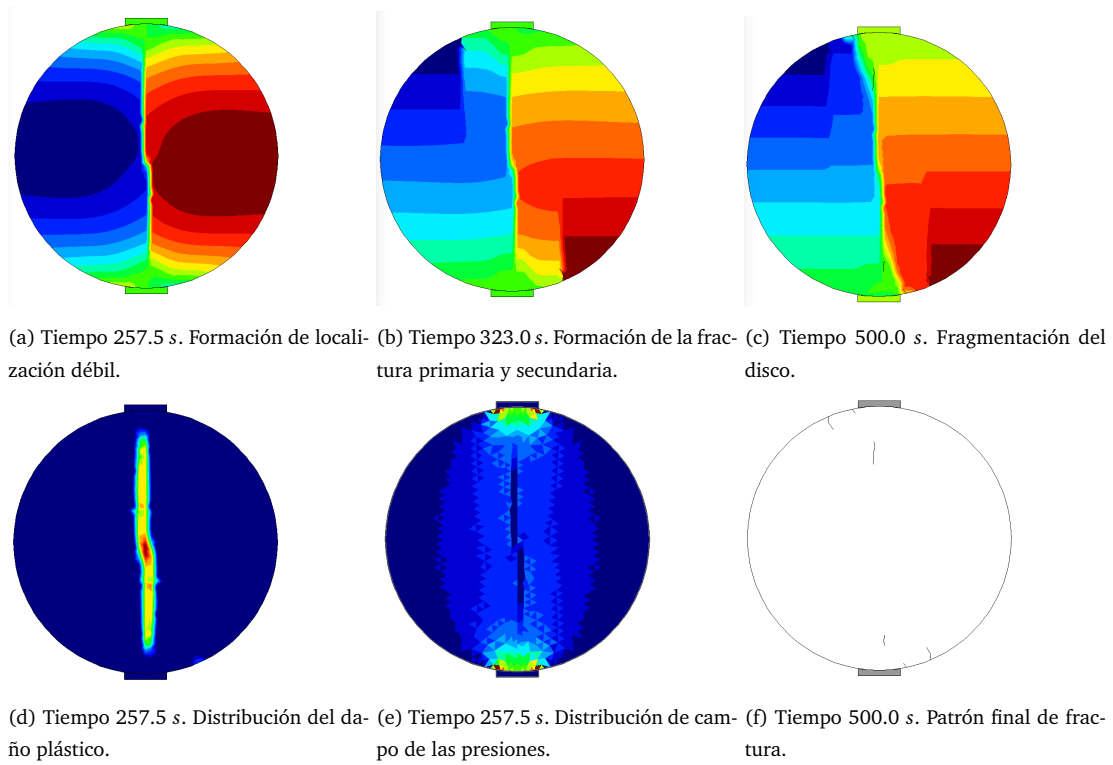


Figura 6.9: Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de MC con formulación irreducible.

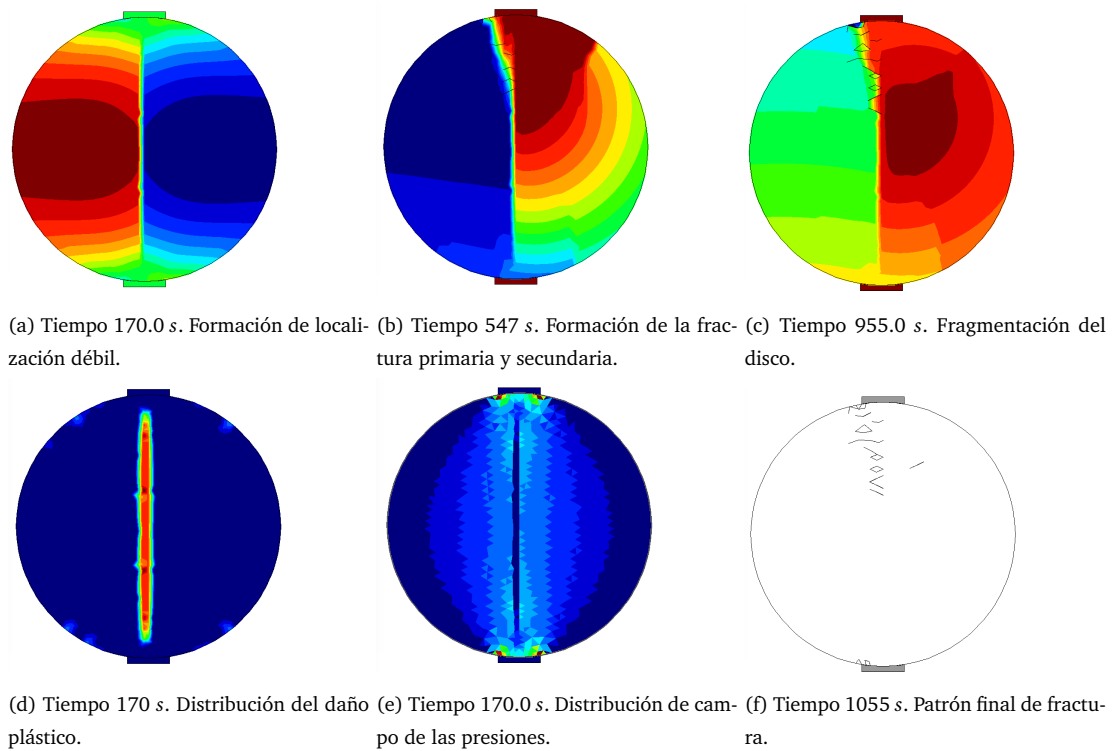


Figura 6.10: Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de MCM con formulación irreducible.

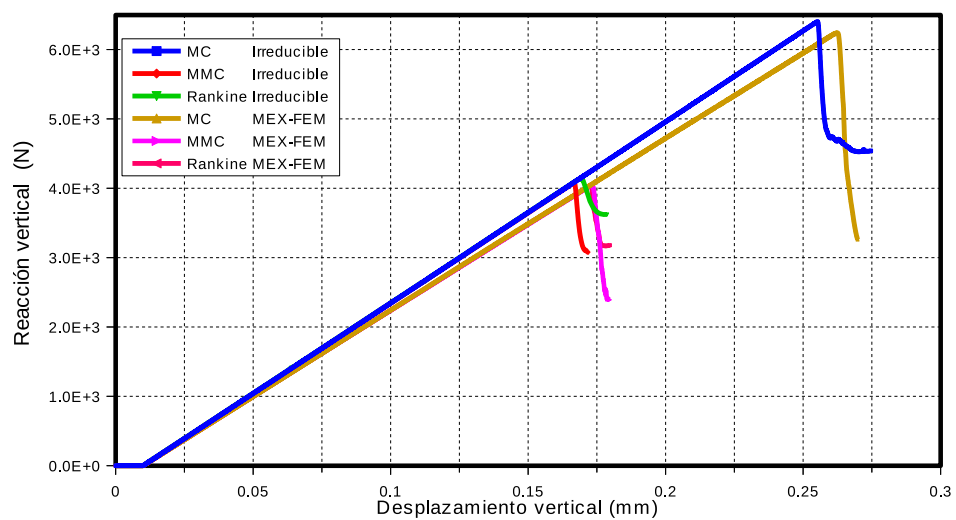


Figura 6.11: Curva Desplazamiento-Reacción.

	MEX-FEM			Formulación estándar		
	Rankine	MC	MCC	Rankine	MC	MCC
10.39MPa	10.68MPa	16.56MPa	10.71MPa	10.97MPa	16.57Mpa	10.23MPa

Cuadro 6.2: Comparación de la resistencia a tracción obtenida empleando MEX-FEM y la formulación estándar .

6.2.2. Modelado de fractura discreta alrededor de una cavidad circular

La distribución de la fractura alrededor de una cavidad circular ha sido ampliamente estudiado en la literatura [62, 63, 123, 127, 147, 231, 232, 386]. Los patrones de fractura bajo aumento de la carga uniaxial de compresión consisten generalmente en tres tipos de fractura: fracturas primarias (T1), las fracturas remotas (T2), así como fracturas de cizalla (NS) (véase figura 6.12). Las fracturas primarias se forman en el centro de la corona de la cavidad debido a la alta tracción local existente y se propaga verticalmente en la dirección opuesta y paralela a la carga. Seguidamente siguen las grietas remotas que se forman en una posición alejada de la cavidad debido a la redistribución del estado tensional ocasionado por la fractura primaria. Por lo general, las cuatro fracturas remotas no inician simultáneamente y en ocasiones no aparecen las cuatro fracturas [63]. Las fracturas de cizalla se desarrollan en las paredes laterales de la cavidad donde existen altas tensiones de compresión. El mecanismo global de fallo observado en los experimentos se debe a la unión de la fractura remota y las fracturas en la pared lateral de la cavidad. Por otra parte, este mecanismo de fallo no es general. Existen evidencias experimentales en especímenes de concreto en la cual sólo se observa fractura por cizallamiento en completa ausencia de las fracturas primarias y remota [222]. Otros experimentos muestran solamente el desarrollo de la fractura remota, véase la figura 6.13. Según Klerck [222] esta discrepancia se debe al tipo de material, a la concentración de tensiones ubicado en las equinas del espécimen debido al efecto friccional entre la placa y el espécimen, y a la distancia entre la cavidad y las caras del espécimen.

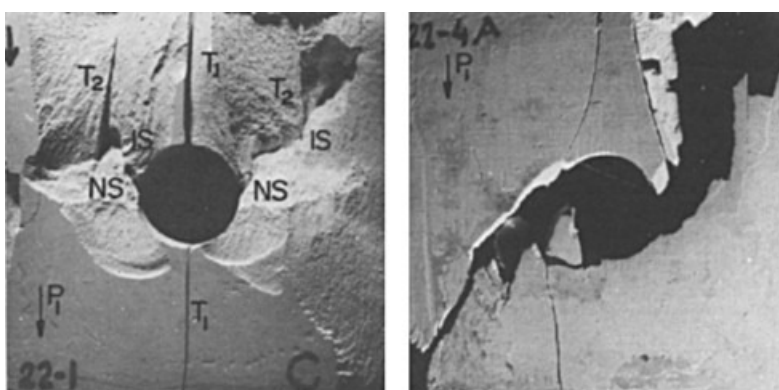


Figura 6.12: *Ensayo experimental reportado por E.Z. Lajtai y V.N. Lajtai[232].*

Carter [63] realizó una serie de ensayos a compresión uniaxial en rocas calizas tipo Tyndall (Tyndallstone) con un agujero circular en un radio de rango de $1.6\text{mm} - 31\text{mm}$ e investigó el efecto tamaño en el proceso de iniciación de la fractura. Los especímenes fueron moldeados de forma rectangular con un agujero circular y cargado axialmente a compresión a través de placas de acero. La figura 6.14 muestra el prototipo del ensayo realizado por Carter en donde se ha indicado la posición de los medidores de deformación colocados en las supuestas zonas de iniciación de la fractura primaria, remota y de cizalla. El objetivo de este ejemplo es simular el proceso de iniciación y crecimiento de la fractura primaria, remota y las fracturas que surgen en las paredes laterales de la cavidad. Para tal fin, se ha seleccionado el ensayo de la serie #8 de la referencia [63] cuyas dimensiones del espécimen son $254 \times 254 \times 89\text{mm}$ con radio de 25mm . Este ejemplo ha sido analizado anteriormente por Klerck [222] empleando un modelo de plasticidad de fractura a compresión (compressive fracture model) pero empleando la formulación irreducible. Las propiedades de los materiales se muestran en el cuadro 6.3. En el análisis se emplea una malla no estructurada y quasi-simétrica de elementos finitos la cual se muestra en la figura 6.15. La misma consiste en 6025 nodos y 11711 elementos triangulares de la

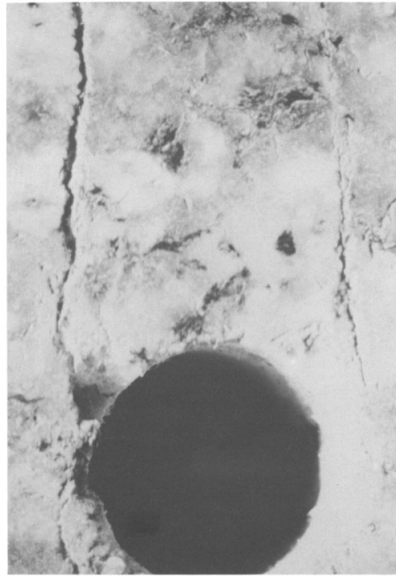


Figura 6.13: *Ensayo experimental reportado por E. J. Dzik y E. Z. Lajtai [119].*

Datos Materiales	Valor(N – mm)
Módulo de Young E	21 GPa
Resistencia a tracción f_t	1.5 MPa
Resistencia a compresión f_c	41.0 MPa
Razón de Poisson ν	0.31
Energía de Fractura \mathcal{G}_f	9 Joules/m ²
Ángulo de fricción interna ϕ	30°
Ángulo de dilatancia ψ	20°
Cohesión c	15 MPa

Cuadro 6.3: *Propiedades materiales de la roca caliza del ensayo de la cavidad sometida a compresión.*

formulación propuesta. Dada la simetría del problema sólo se analiza la parte superior. La carga se impone mediante con placa metálica colocada en la cara superior del espécimen y cargada a 5GPa/s [222]. Las fuerzas de contacto se computan combinando el método de multiplicadores de Lagrange y el método de la función de penalización. Se desprecian los efectos friccionales entre la placa de carga y el espécimen. Sólo se considera contacto normal. Se emplean los tres modelos de discontinuidad descritos en esta tesis para observar los mecanismos de rotura y fragmentación y verificar cuál de ellos describe fielmente lo observado del ensayo experimental. Dada las dimensiones del espécimen, el análisis se realiza bajo la hipótesis de deformación plana.

La figura 6.16 muestra los resultados de la simulación empleando el criterio de tracción máxima. Se puede observar que el modelo efectivamente predice la aparición de la fractura primaria en la corona de la cavidad y seguidamente, tras la redistribución del estado tensional tensional actuante, aparece la fractura remota. Nótese que esta simulación no presenta la fractura en las paredes laterales de la cavidad, sino que se forman dos fracturas remotas paralelas a las dos anteriores. Esta efecto es debido a que el modelo de Rankine

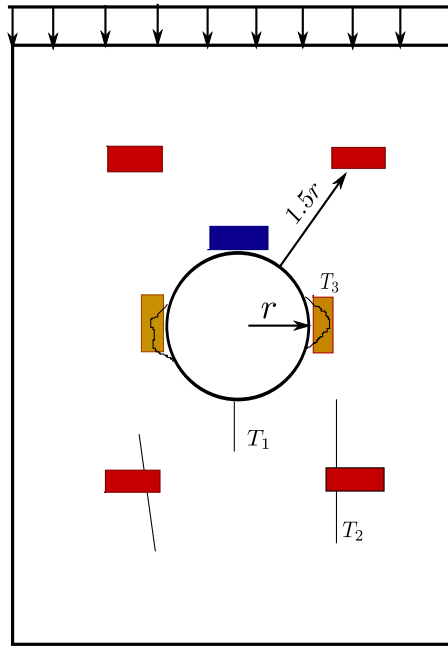


Figura 6.14: Boceto del ensayo experimental reportado por Carter[63].

es infinitamente rígido en estados de compresión, fallando el espécimen numérico por tracción en la dirección paralela a la carga.

La figura 6.17 muestran los resultados obtenidos con el modelo de MC. En la simulación se observa que se produce de manera satisfactoria la fractura primaria por tracción, sin embargo, el modelo no presenta la fractura remota fallando principalmente por la alta tensión de compresión existente en la paredes laterales de la cavidad. La figura 6.18 muestran los resultados obtenidos con el modelo de MCM. Dicho modelo describe razonablemente lo observado en los ensayos experimentales. Se observa concentraciones de deformaciones plásticas en en lugar donde aparece la fractura primaria y remota. La fractura remota se enlaza con las fracturas de cizalla en las paredes de la cavidad prediciendo el mecanismo de fallo observado de los ensayos experimentales. Tras el aumento de la carga de compresión, la cavidad finalmente colapsa y se desploma.

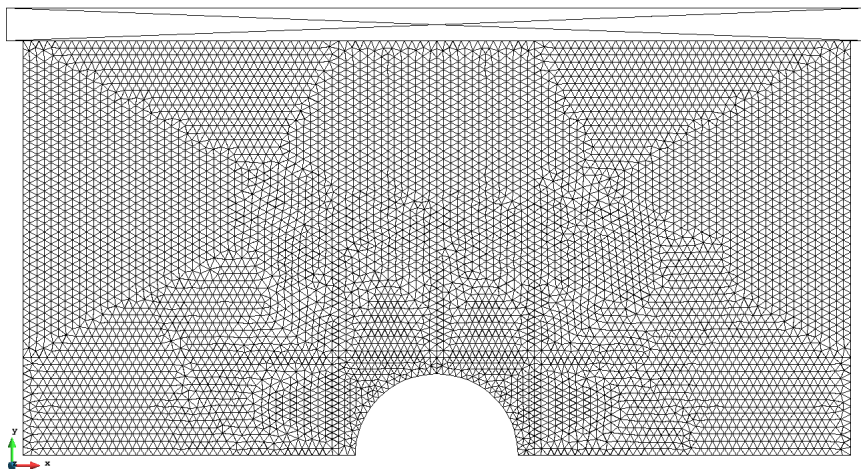


Figura 6.15: Malla de elementos finitos.

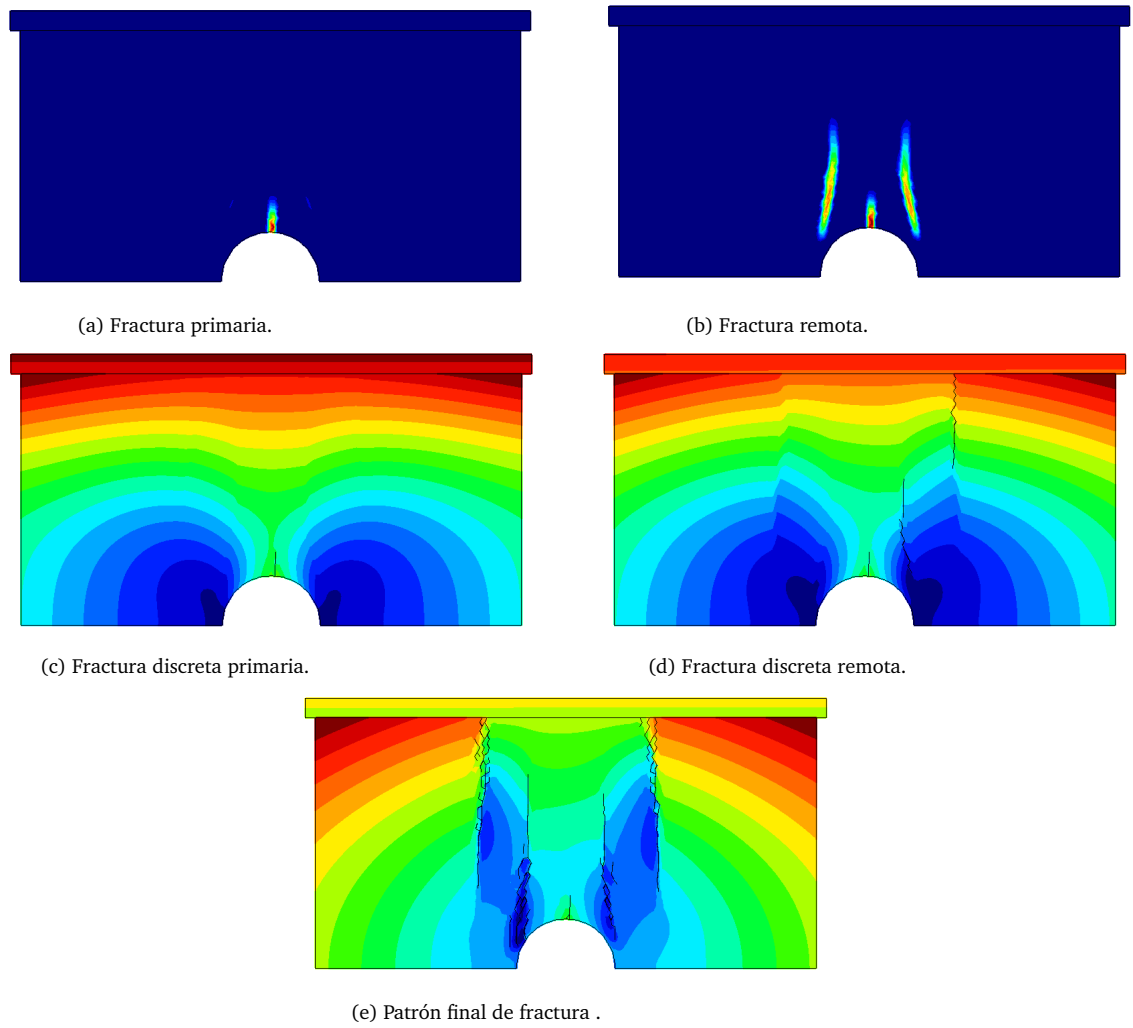


Figura 6.16: Localización de la fractura primaria y remota en el modelo de Rankine.

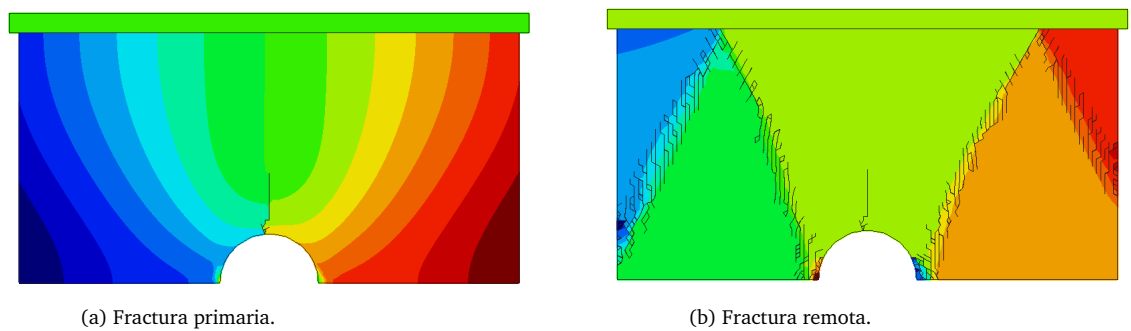


Figura 6.17: Localización de la fractura primaria y remota en el modelo de MC.

6.2.3. Simulación de fractura dinámica con bifurcación

El siguiente ejemplo de simulación de fractura que abordaremos es un problema de inestabilidad dinámica que implica el crecimiento de una grieta con ramificación en una lámina de vidrio con muesca. Este problema fue analizado experimentalmente por Ramulu M. y Kobayashi AS. [322]. Sin embargo, sólo unos

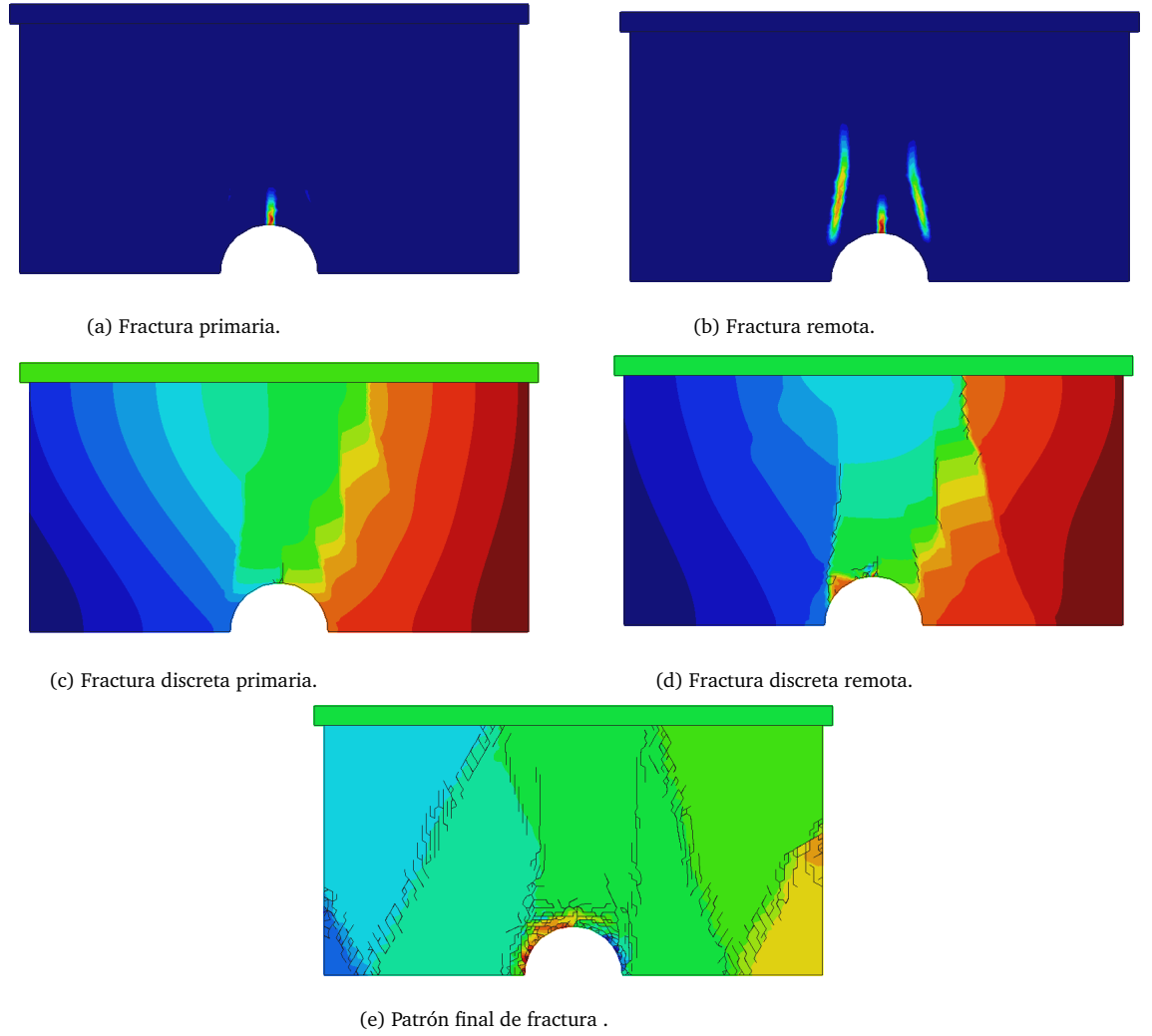


Figura 6.18: Localización de la fractura primaria y remota en el modelo de MCM.

pocos resultados numéricos han sido reportados debido a las dificultades para rastrear la fractura; algunos ejemplos se pueden encontrar en [36, 362, 363, 397, 408]. Para eludir estas dificultades, Belytschko et al.[36] y Song et al.[363] han permitido que la fractura principal bifurque una sola vez. En el método Xu y Needleman[397] han modelado múltiples ramas de fractura empleando el modelo de fisura cohesiva, no obstante sus resultados fueron altamente dependientes de la malla empleada.

En la mayoría de las referencias mencionadas emplean el modelo de daño de Lamaitre para describir el comportamiento del material. En nuestro caso nos basamos en la mecánica clásica de la fractura empleando modelos de plasticidad. Las propiedades del material son: densidad $\rho = 2,450 \text{ kg/m}^3$, módulo de Young $E = 32 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.20$, energía de fractura $\mathcal{G}_f = 3 \text{ N/m}$ y resistencia a tracción $f_t = 2.72 \text{ MPa}$. Un esquema del experimento se muestra en la 6.19.

Como puede observarse, se aplica en las superficies superior e inferior una tensión σ de 1 MPa ; la evolución temporal de la carga es instantánea y constante en el tiempo. Experimentos con muestras de dimensiones similares han sido reportados por [134, 325, 349, 350]. En estos experimentos, la grieta comienza a crecer en la muesca y se propaga horizontalmente hacia la derecha, en general, con el aumento de velocidad. En un momento dado, la fractura principal se ramifica en dos grietas (algunos experimentos muestran más

ramas [349, 350]). Es de destacar que, como se muestra en la figura 6.20, la cual corresponde al ensayo de Ramulu y Kobayashi, antes de que se produzca la ramificación principal, se producen bifurcaciones menores pero sólo crecen en pequeñas longitudes. El objetivo es simular con la formulación propuesta este fenómeno

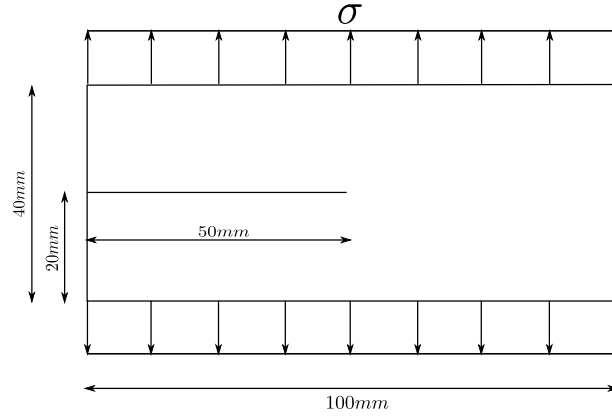


Figura 6.19: Problema de fractura dinámica con bifurcación.

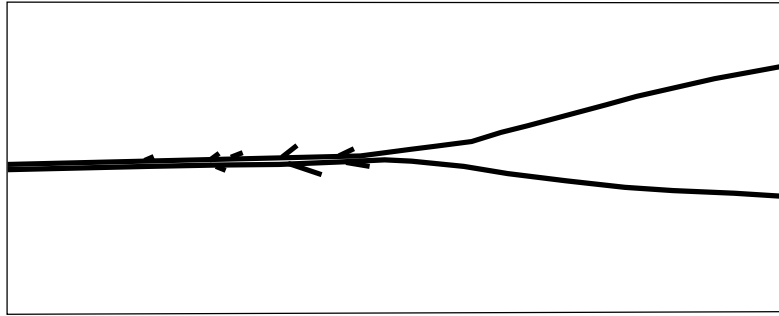


Figura 6.20: Patrón de fractura del ensayo experimental reportado por Ramulu y Kobayashi [322].

de inestabilidad dinámica y mostrar que la formulación propuesta es capaz de predecir satisfactoriamente el resultado experimental sin necesidad de emplear un algoritmo de rastreo o *level set*. Por otro lado, también mostrar cualitativamente que la fractura y su propagación es un asunto de aproximabilidad. Dada los datos materiales disponibles, emplearemos el modelo de Rankine con ablandamiento exponencial. En el análisis se emplea una malla estructurada y simétrica de elementos triangulares con 8191 nodos y 16000 elementos. Las frecuencias espúreas se emplea solo amortiguamiento proporcional de Rayleigh en las altas frecuencias con un factor $= 10^{-8}$. Las constantes para evaluar los parámetros de estabilización y la sub-escala de los desplazamiento se toman $c_u = 0.1$, $c_e = 1.0$, $\tilde{\xi} = 0.5$ y $\eta = 0.50$.

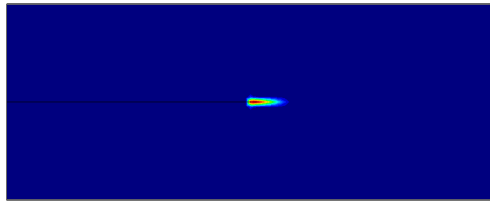
La figura 6.21 muestra la evolución de la fractura empleando la formulación propuesta. Se observa que las dos ramificaciones, virtualmente simétricas, son predichas correctamente por la formulación propuesta. La fractura avanza hacia la derecha tal como indica el resultado experimental y luego, a 50 microsegundos comienza el proceso de bifurcación de la fractura. Esta bifurcación sale de manera natural y se propaga simétricamente. Se observa además que estas ramificaciones presentan otra bifurcación (véase figura 6.21f), pero sólo una de ellas crece y avanza hacia el extremo derecho. Es notable como la formulación propuesta es capaz de predecir lo observado el laboratorio.

La figura 6.22 muestra la evolución de la fractura empleando la formulación estándar. A pesar de que predice igualmente la ramificación de la fractura principal, se observa que los resultados son dependiente

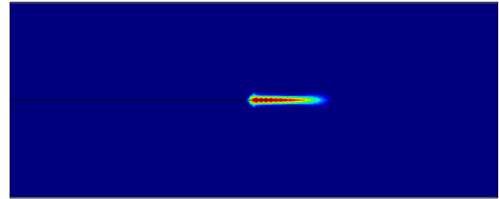
de la malla de elementos finitos empleada. Nótese además que se pierde completamente la simetría en la trayectoria de la fractura, yéndose la misma por bandas favorables de elementos finitos.

La figura muestra 6.24 la velocidad de propagación de la fractura empleando MEX-FEM. La misma se ha medido localmente monitorizando el tiempo en que tarda la punta de la fractura (en la cual se ha asumido un daño de 90%) en traspasar el elemento finito correspondiente y llegar al nodo adyacente. La fractura empieza a los 24 microsegundos moviéndose hacia la derecha a una velocidad inicial de $784m/s$. El proceso de fractura continúa pero la velocidad de fractura varía en el tiempo pero sin superar la velocidad de Rayleigh $c_s = 2120m/s$. La bifurcación ocurre a los 50 microsegundos a una velocidad de aproximadamente $300m/s$. Seguidamente se presenta un incremento de la velocidad de propagación de la fractura llegando a un máximo de $1666m/s$. Song, J. H. et al[362], Rabczuk, T et al[317] y Belytschko et al[36] reportan en sus modelos una velocidad máxima de fractura de $1600m/s$, $1250m/s$ y $2050m/s$ respectivamente. Por otra parte, Ravi-Chandar, K [325] argumenta que la velocidad máxima de propagación de fractura en materiales quasi-frágiles varia entre $0.347c_s$ a $0.614c_s$. En nuestro caso dicha relación es de 0.629. He de resaltar nuevamente que la medida de velocidad de fractura fue local, pero aún así se ha obtenido una razonable correlación con los resultados de otros autores.

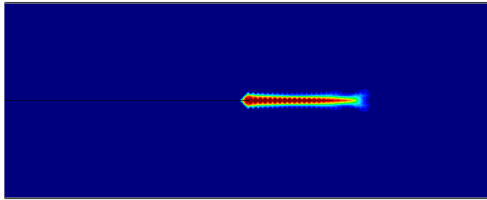
Finalmente la figura 6.23 muestra el patrón de fractura discreta obtenido empleando el criterio de fractura por elementos y fractura por caras con MEX-FEM. Es notable como ambas metodologías describen satisfactoriamente lo observado en el resultado experimental. Sin embargo, se debe destacar que en el proceso de bifurcación, solo una fractura discreta fue introducida a la vez. Sin embargo, durante el proceso de carga la otra fractura de la ramificación surgió de manera natural y se conectó finalmente con la rama principal.



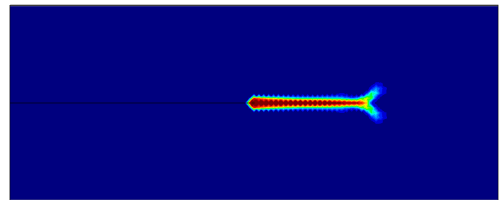
(a) Tiempo $1.5 \times 10^{-5} \text{ seg.}$



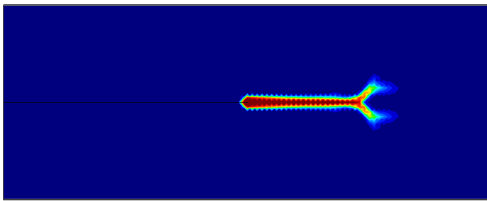
(b) Tiempo $3.00 \times 10^{-5} \text{ seg.}$



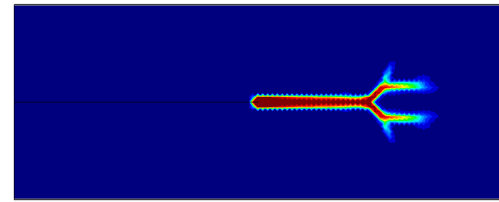
(c) Tiempo $4.5 \times 10^{-5} \text{ seg.}$



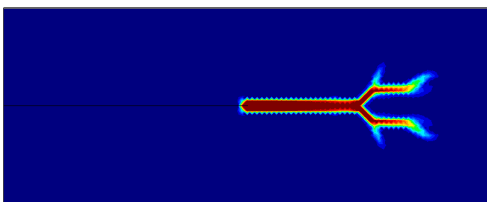
(d) Tiempo $4.87 \times 10^{-5} \text{ seg.}$



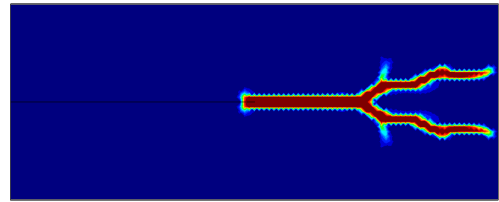
(e) Tiempo $5.245 \times 10^{-5} \text{ seg.}$



(f) Tiempo $5.62 \times 10^{-5} \text{ seg.}$



(g) Tiempo $6.74 \times 10^{-5} \text{ seg.}$



(h) Tiempo $1.049 \times 10^{-4} \text{ seg.}$

Figura 6.21: Evolución de la fractura empleando un modelo de plasticidad de Rankine con MEX-FEM.

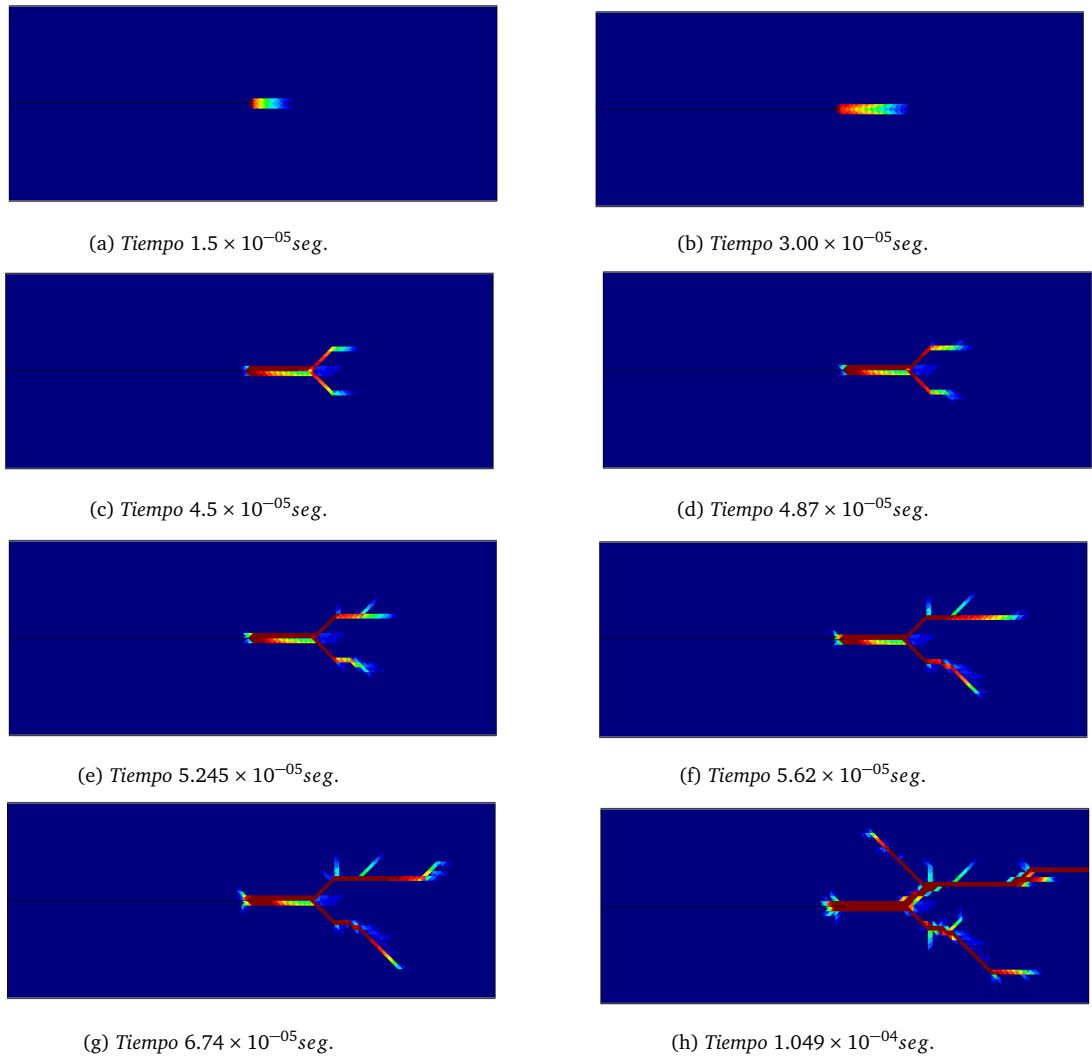


Figura 6.22: Evolución de la fractura empleando un modelo de plasticidad de Rankine con formulación irreducible.

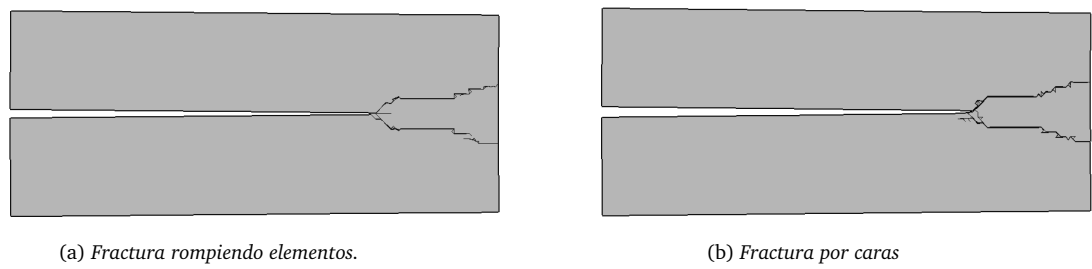


Figura 6.23: Modelo discreto de fractura empleando fractura por elementos y fractura por caras.

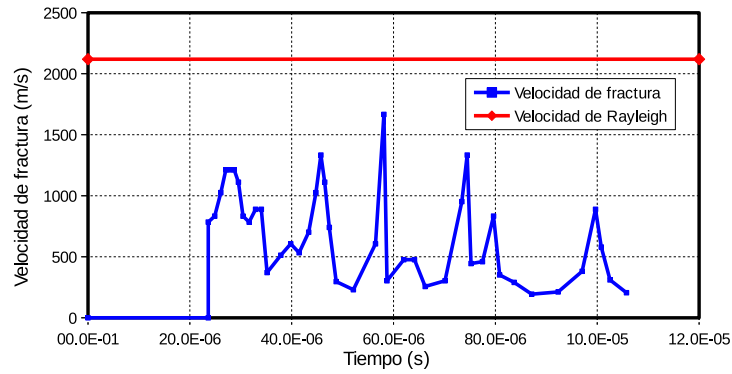


Figura 6.24: Velocidad de fractura.

6.2.4. Simulación de fragmentación de un cilindro sometido a una presión interna

Considérese un cilindro sometido a una presión interna tal como se muestra en la figura 6.25. El objetivo de este ejemplo es simular los procesos de fragmentación que surgen tras imponer la carga impulsiva $p(t)$, que varía en el tiempo de forma exponencial y decreciente con la función $p(t) = p_0 e^{-t/t_0}$, donde p_0 es el impulso inicial de valor de 10000 MPa y $t_0 = 0.1 \text{ ms}$ es el parámetro de decaimiento. Este problema se ha analizado en las referencias [318, 361, 408] mediante otras metodologías. La malla de elementos finitos empleada con 3307 nodos y 5638 elementos se muestra en la figura 6.25b, con un longitud promedio de elemento finito de $h_{ave}^e = 5 \text{ mm}$. Las propiedades de los materiales son: densidad $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, módulo de elasticidad $E = 210 \text{ GPa}$, razón de Poisson $\nu = 0.30$, energía de fractura $G_f = 2.0 \times 10^4 \text{ N/m}$, resistencia a tracción $f_t = 1050 \text{ MPa}$, cohesión 1106.4 MPa y ángulo de fricción interna $\phi = 39.23^\circ$. En esta simulación se mantiene la simetría de las propiedades del problema, es decir, no se introduce ninguna perturbación en el módulo de elasticidad. El problema se analiza asumiendo un estado de deformación plana (con espesor de 1 mm) aplicando MEX-FEM y envolviendo contacto entre los fragmentos. Para ello se emplea el método de la función de penalización con un coeficiente de penalización de $P = 2E$. Una vez se aplica la carga, se forma una onda que avanza radialmente hacia afuera comprimiendo todo el material que se encuentra en frente de la onda y traccionando el material que se encuentra detrás de la onda. Debido a la alta presión aplicada, los procesos de fragmentación en el cilindro se inician en los primeros 0.4 ms , en donde la energía de fractura disipada crece rápidamente y los fragmentos que se han formado se mueven radialmente hacia afuera. Las primeras fracturas que se forman son perpendiculares a la onda de choque. Cuando la onda llega al contorno libre opuesto, la misma se refleja y genera procesos radiales de fragmentación y fractura. Los procesos de fragmentación continúan generando pequeños fragmentos que entran en contacto unos con los otros y que siguen moviéndose hacia afuera. Todo este proceso se puede visualizar en la figura 6.26 en donde se presenta la evolución de los procesos de fragmentación en los primeros 0.7 ms empleado el modelo de Rankine. Se ha obtenido un comportamiento similar con los modelos de MC y MCM. Los procesos de fractura continúan después de los 0.7 ms pero con menos formación de nuevas fracturas. Los procesos de fractura finalizan después de 2 ms .

La figura 6.27 muestra el patrón final de fractura obtenido con los distintos modelos de discontinuidad empleados en esta tesis. Se observa un patrón bastante similar en todos ellos. Este patrón es similar a la referencia [361], sin embargo, en sus procesos de fractura no se observa el patrón radial de fractura debido a la reflexión de la onda. El número de fragmentos de mayor tamaño que se han formado son 25, 26, 24, para

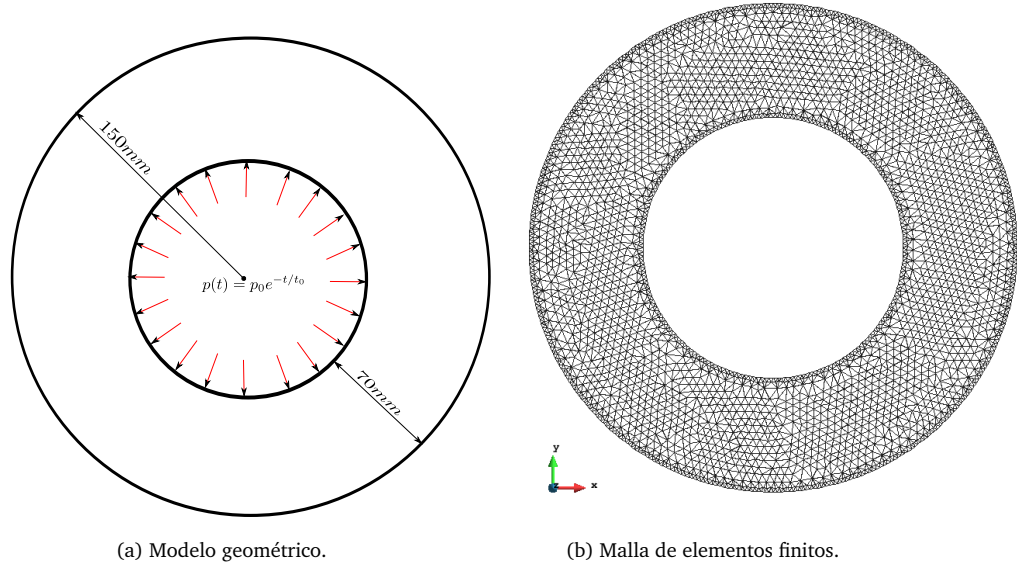


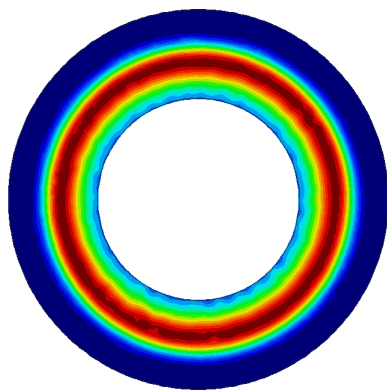
Figura 6.25: *Cilindro sometido a presión interna.*

los modelos de Rankine, MC y MCC, respectivamente.

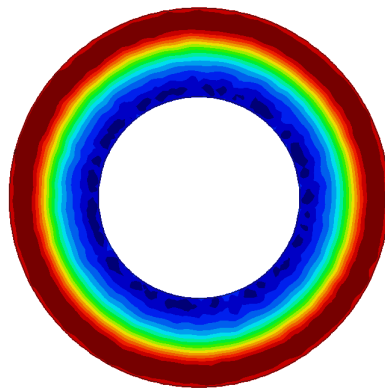
La figura 6.28 muestra la energía de fractura disipada en los primeros 3ms después de la explosión. Se observa una disipación súbita de la energía de fractura entre los 0.4ms y 0.5ms, intervalo en la cual ocurre la reflexión de la onda. Una vez finaliza el proceso de fragmentación, la energía total disipada permanece casi constante. Obsérvese que la energía total disipada es similar.

6.2.5. Simulación numérica de fractura discreta tridimensional en el ensayo brasileño

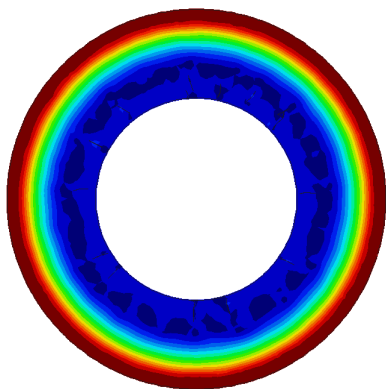
Retomemos nuevamente el ensayo brasileño discutido en el primer ejemplo de este capítulo. El objetivo es simular el mismo ensayo pero en un estado completamente tridimensional y observar los patrones de fractura discreta tridimensional que surgen. A fin de reducir coste computacional, las cargas se imponen ahora mediante un desplazamiento impuesto en la zona de aplicación de cargas a una velocidad de 0.005mm/s. Debido a las situaciones complejas de contacto que surgen tras la fractura, las fuerzas de contacto son computadas mediante el método de la función de penalización. Desde el punto de vista del autor, muy pocas simulaciones numéricas de fractura tridimensional discreta se han realizado. Esta es la primera propuesta de fractura tridimensional discreta realizada en el ensayo brasileño y constituye otra contribución innovadora de este trabajo. Se emplean las mismas propiedades del material descritos en el primer ejemplo y en el análisis se usan los tres modelos de discontinuidad empleados en esta tesis. La malla de elementos finitos empleada se muestra en la figura 6.29. La misma consiste en malla de elementos finitos con 3860 nodos y 17304 elementos tetraedros lineales de la formulación propuesta. Los resultados de los análisis se muestran en las figuras 6.30, 6.31, 6.31 empleando el modelo de plasticidad de Rankine, Mohr-Coulomb y Mohr-Coulomb modificado respectivamente. Se puede observar que se obtiene respuestas similares con el caso bidimensional. En primer lugar se desarrollan los procesos de discontinuidades débiles que derivan finalmente en procesos de fractura discreta sobre el plano diametral paralelo a la dirección de las cargas. En segundo lugar se observa la aparición de las fracturas secundarias en las zonas de aplicación de cargas resul-



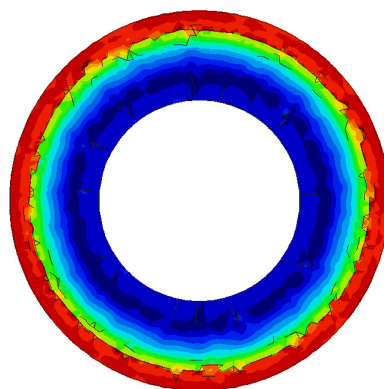
(a) Tiempo 0.000196seg.



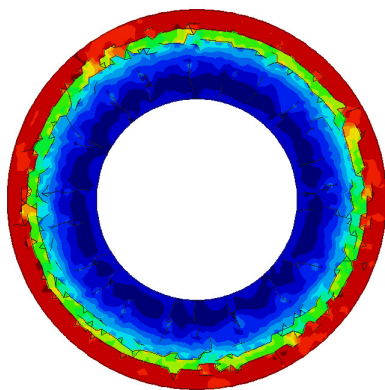
(b) Tiempo 0.000336seg.



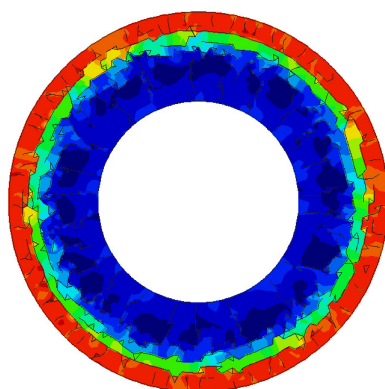
(c) Tiempo 0.000462seg.



(d) Tiempo 0.000511seg.

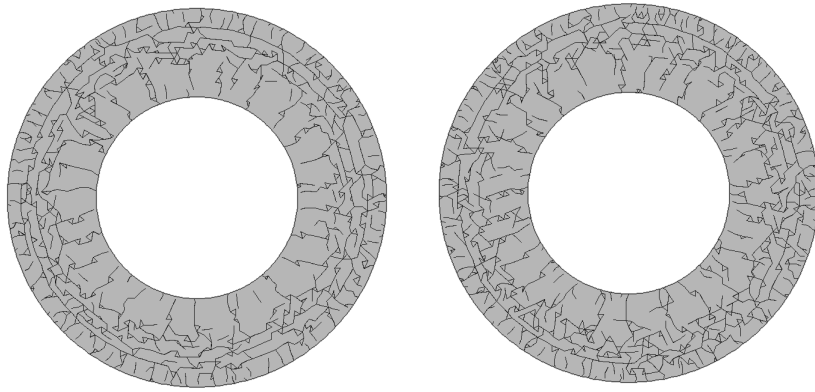


(e) Tiempo 0.0005676seg.



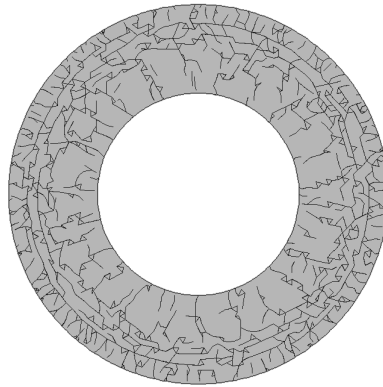
(f) Tiempo 0.000717seg.

Figura 6.26: Evolución de la onda expansiva y del proceso de fragmentación en el cilindro empleando el modelo de Rankine.



(a) *Modelo de Rankine.*

(b) *Modelo de MC.*



(c) *Modelo de MCM.*

Figura 6.27: *Patrón final de fractura.*

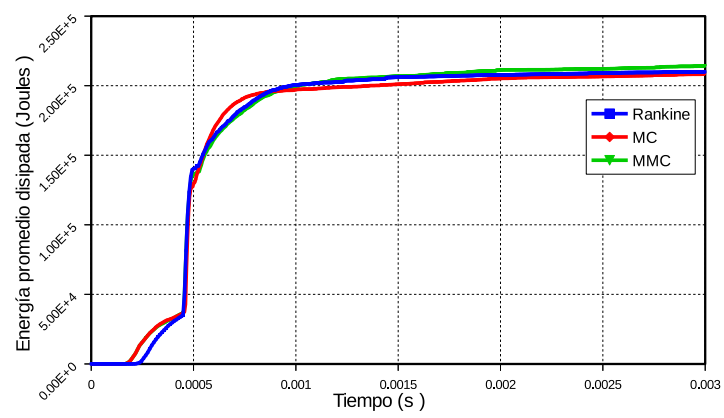


Figura 6.28: *Energía de fractura disipada.*

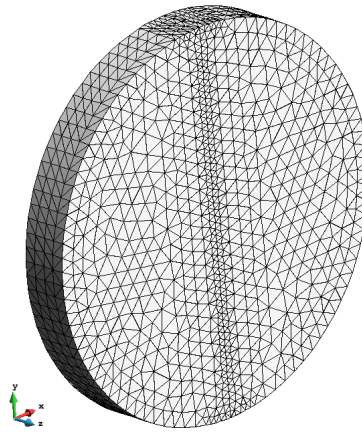


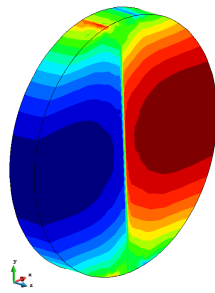
Figura 6.29: Malla de elementos finitos en el ensayo brasileño en 3D.

tado de las altas concentraciones de tensiones de compresión en dicha zona. Finalmente el disco se fragmenta en dos partes, tal y como se observa en el resultado experimental.

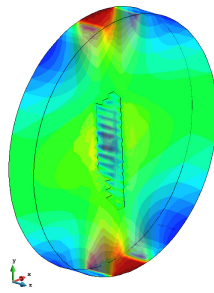
La figura 6.33 muestra la curva Desplazamiento-Tracción ($\sigma_t = \frac{2P}{\pi Dt}$) obtenida con los distintos modelos de plasticidad empleados. Se observa nuevamente que el modelo de MC sobreestima el valor de tensión de rotura ($17.4MPa$) comparado con los otros dos modelos empleados. La resistencia a tracción predicha por los modelos de Rankine y MCM es de $10.65MPa$ y $10.75MPa$ respectivamente. Es notable como la formulación propuesta es capaz de garantizar una respuesta y descripción objetiva de la fractura discreta tridimensional.

6.3. Conclusión

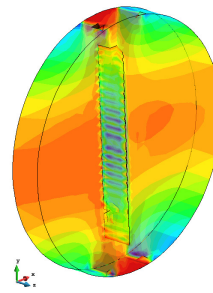
Se ha llevado a cabo una series de ejercicios numéricos en 2D y 3D que demuestran y validan la aplicación todas las ideas y conceptos desarrollados en este trabajo en su conjunto. La descripción discreta de la fractura es consistente y se obtenido resultados satisfactorios que contrastan favorablemente con lo observado en los ensayos experimentales. Nuevamente se puede observar que la fractura y su propagación es un asunto de aproximabilidad. La fractura discreta fue insertada en la malla de elementos finitos siguiendo un criterio puramente energético basado en la variable fundamental del daño plástico, aunque otros criterios también son posibles. Los procesos no lineales como el contacto fueron tomados en cuenta. Se ha de resaltar que con los modelos tradicionales de discontinuidad empleados se obtienen resultados razonables en el proceso de fragmentación y fractura, pudiéndose empear cualquier otro tipo de modelos constitutivos, como por ejemplo, modelos de daño. A diferencia de otros que realizan fractura discreta empleando los modelos basados en la formulación irreducible, gracias a la formulación mixta propuesta, no hay necesidad de emplear algoritmos de rastro además de obtener un campo presiones estabilizadas en los procesos de localización de deformaciones y virtualmente libre del bloqueo volumétrico.



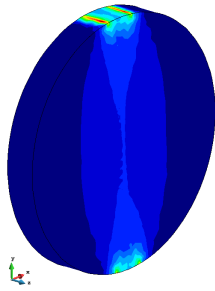
(a) Tiempo 19.75 s. Formación de localización débil.



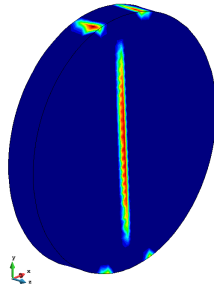
(b) Tiempo 20.75 s. Formación de la fractura primaria y secundaria.



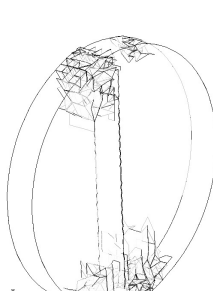
(c) Tiempo 27.45 s. Fragmentación del disco.



(d) Tiempo 19.75 s. Distribución del daño plástico.

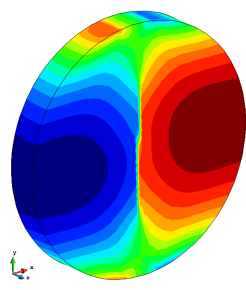


(e) Tiempo 19.75 s. Distribución de campo de las presiones.

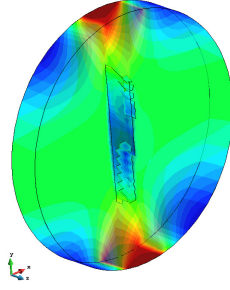


(f) Tiempo 55 s. Patrón final de fractura.

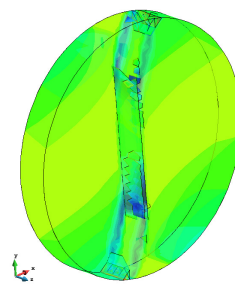
Figura 6.30: Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de Rankine con MEX-FEM.



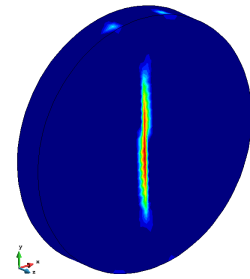
(a) Tiempo 27.5 s. Formación de localización débil.



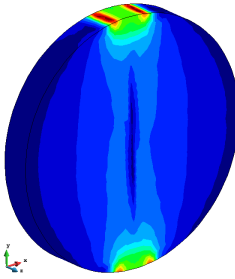
(b) Tiempo 29.7 s. Formación de la fractura primaria y secundaria.



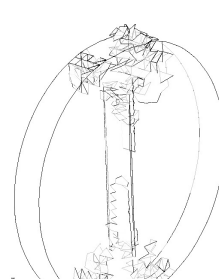
(c) Tiempo 45.0 s. Fragmentación del disco.



(d) Tiempo 27.5 s. Distribución del daño plástico.



(e) Tiempo 27.5 s. Distribución de campo de las presiones.



(f) Tiempo 91 s. Patrón final de fractura.

Figura 6.31: Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de MC con MEX-FEM.

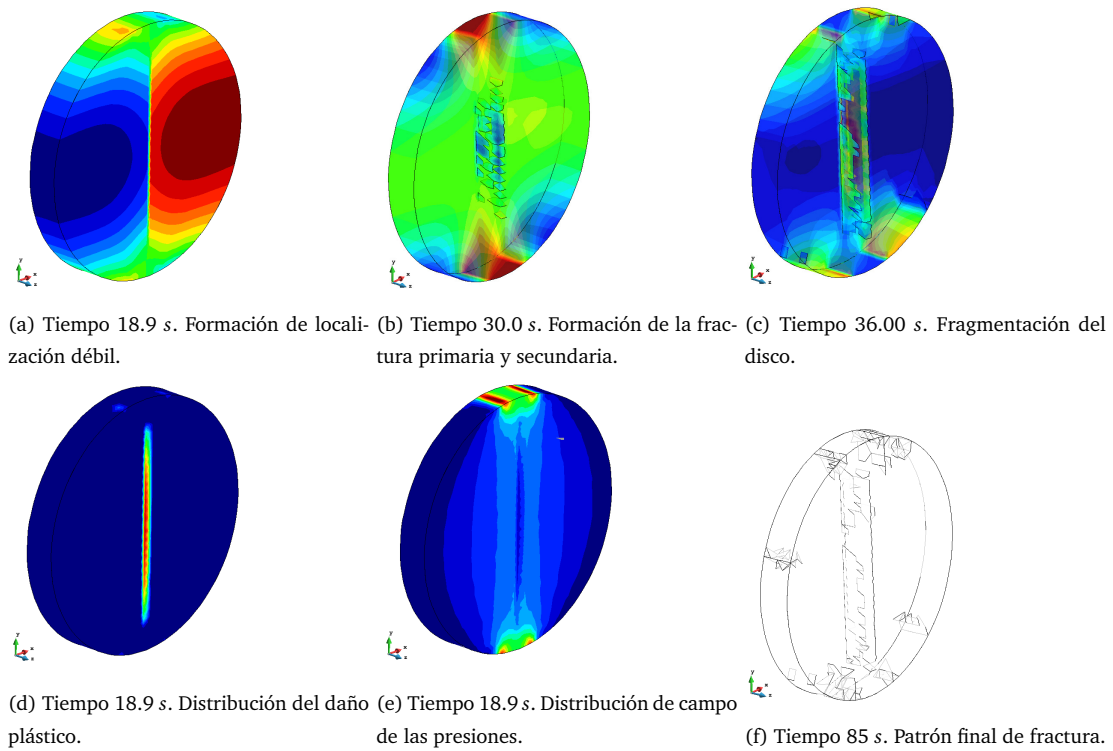


Figura 6.32: Distintas etapas de la simulación numérica en el proceso de fractura del ensayo brasileño empleando el modelo de MCM con MEX-FEM.

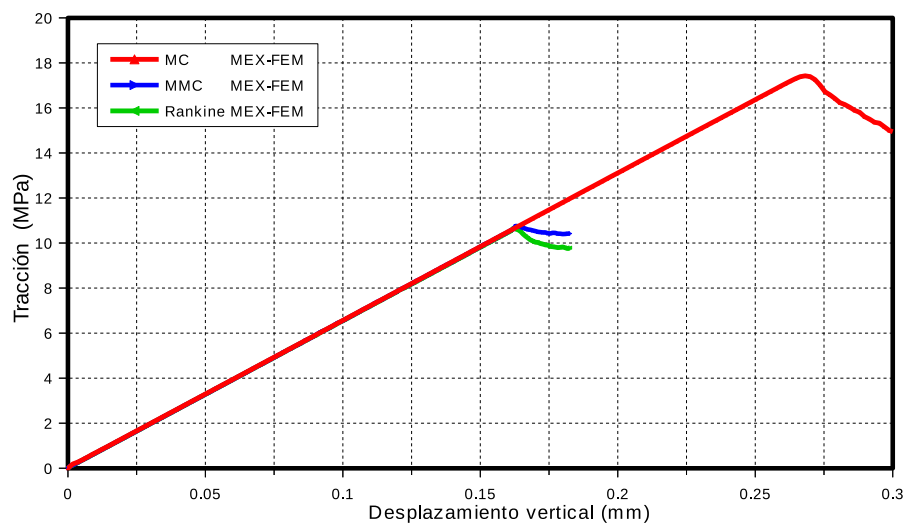


Figura 6.33: Curva Desplazamiento-Reacción.

Conclusiones

La constancia es la virtud por la que todas las cosas dan su fruto.

Arturo Graf

7.0.1. Síntesis

El objetivo planteado en este trabajo es el desarrollo de una metodología numérica explícita de elementos finitos capaz de abordar de manera efectiva la simulación de procesos de localización, fractura discreta y fragmentación en materiales quasi-frágiles, envolviendo procesos altamente no lineales, como la no linealidad del material y el contacto. La descripción del material quasi-frágil se basa en los conceptos de la mecánica de fractura clásica de la teoría de plasticidad y más específicamente en el modelo de daño plástico y su variable fundamental, la variable de daño plástico, empleando los modelos tradicionales de discontinuidad de Mohr-Coulomb y Rankine. Tres tipos de algoritmos fueron necesarios para trazar nuestro objetivo. Un algoritmo de búsqueda de contactos, un algoritmo combinado penalización y multiplicadores de Lagrange para computar las fuerzas normales de contacto y un algoritmo de refinamiento local adaptable. La algoritmia de búsqueda es necesaria para determinar los pares de contactos potenciales con un coste computacional razonable; la segunda para establecer la condición de contacto y la tercera para permitir, no sólo un refinamiento local sino también trazar el modelado geométrico de la fractura discreta.

Por otra parte, dada la incapacidad de los elementos lineales de la formulación irreducible para capturar mecanismos de colapso, cargas últimas y procesos de localización de deformaciones se optó por desarrollar la primera formulación mixta explícita de elementos finitos en desplazamientos y deformaciones dentro de la mecánica de sólidos estabilizada mediante el método de sub-escalas variacionales, particularmente en las sub-escalas ortogonales. Esta formulación estabilizada elude la condición LBB y permite obtener elementos con independiente e de igual orden de interpolación en el campo de los desplazamientos y deformaciones. Esta formulación constituye la principal aportación original de este trabajo. Nuestra metodología, bautizada como MEX-FEM, y desarrollada para abordar problemas en pequeñas y grandes deformaciones, no solamente viene a mejorar el esquema explícito tradicional de integración temporal de la ecuación de movimiento, sino que obtiene un mejor campo de tensiones y deformaciones en una malla de elementos finitos, una mejor descripción de los procesos de localización de deformaciones virtualmente libre de la dependencia de la malla y sin necesidad de emplear algoritmos de rastreo y una mejor solución a problemas cercanamente incompresibles.

Todas estas metodologías numéricas desarrolladas fueron integradas en su conjunto para realizar nuestra principal meta: el modelado discreto la fractura y fragmentación de los materiales quasi-frágiles empleando el método de los elementos finitos.

7.0.2. Conclusiones

Las principales conclusiones de este trabajo se puede resumir brevemente en los siguientes puntos:

- Se ha desarrollado, implementado y validado un algoritmo de búsqueda de potenciales contactos empleando el concepto de sub-división espacial, celdas y cajas contenedoras. Este algoritmo ha sido diseñado mediante una implementación de programación genérica, en el sentido que puede ser empleado para cualquier tipo de geometría, dando al usuario una interfaz de programación para tal fin. En nuestro caso, se ha empleado triángulos y tetraedros. Por otra parte, este algoritmo de búsqueda es apto para otras tipos de aplicaciones como por ejemplo el Método de los Elementos Discretos (DEM).
- Se ha propuesto, implementado y validado un algoritmo combinado de cómputo de fuerzas de contacto basado en el Método de la función de penalización y el método de los multiplicadores de Lagrange dentro de un integrador explícito. El objetivo principal es aprovechar cada una de las ventajas proporcionadas por ambos algoritmos.
- Se ha propuesto, implementado y validado por primera vez un algoritmo de refinamiento local adaptativo para mallas de triángulos y tetraedros lineales basado en el mapeado de las conectividades de los elementos finitos con una matriz dispersa. Este algoritmo se le ha llamado apropiadamente AL-RA y considera todas las formas posibles de refinamientos. El caso más complicado de refinamiento es del elemento tetraedro, pues requiere más de 700 posibles patrones de refinamientos. A diferencia del remallado adaptable, este algoritmo de refinamiento divide adecuadamente los elementos finitos seleccionados cuidando la conformidad de la malla final y sin necesidad de realizar una extrapolación de variables de estado en la nueva malla creada, ya que los elementos generados heredan toda la información del elemento padre. Este algoritmo se destaca en su versatilidad, pudiéndose emplear a otros campos de la mecánica donde se requieran aplicar algoritmos de refinamientos.
- El algoritmo de refinamiento propuesto es independiente del criterio de refinamiento empleado, dándose al usuario la posibilidad de elegir los elementos que se requieran refinar. Asimismo, puede emplearse cualquier tiempo de criterio de refinamiento en caso de que se requiera disminuir el error global de la aproximación empleada por elementos finitos o mejorar el campo tensional en la zona del proceso de la localización. Nuevamente se refleja que el algoritmo de refinamiento es una técnica útil para reducir la dependencia de la malla en los procesos de localización.
- El algoritmo de refinamiento es una estrategia útil en los programas de mallado. En caso de que se requieran hacer mallas muy tupidas, bastaría realizar una malla base y luego realizar tantos refinamientos necesarios a fin de obtener la malla deseada.
- El algoritmo de refinamiento es la base fundamental para la inserción geométrica de la fractura discreta dentro de la malla de elementos finitos. Proporciona los datos necesarios como la reconectividad, los nuevos elementos y nodos de la malla necesarios para reflejar la inserción de la fractura discreta. Por otra parte, se recomienda cuidar el aspecto de malla final resultante, pues la inserción geométrica de

la fractura puede generar elementos con mala relación de aspecto. En tal caso, proponemos un modelo combinado de fractura por caras y fractura rompiendo elementos, este último realizado sólo dentro de una región admisible para cuidar la relación de aspecto de la malla refinada final resultante.

- Se ha desarrollado, implementado y validado por primera vez una formulación mixta de elementos finitos dentro de un esquema explícito, a la que hemos llamado MEX-FEM, capaz de abordar problemas cercanamente incompresibles y dar resultados satisfactorios al problema de la localización de las deformaciones. Esta formulación se ha desarrollado en el rango de pequeñas y grandes deformaciones en mecánica de sólidos, apta para cualquier tipo de modelo constitutivo, sea de elasticidad, plasticidad o daño y aplicado a elementos finitos triangulares y tetraedros lineales.
- Los elementos desarrollados son elementos mixtos estabilizados mediante el método de las sub-escalas ortogonales OSS, tienen interpolaciones de desplazamientos y deformaciones $\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}$ lineales y continuas entre los elementos. Estos elementos tienen bajo coste computacional, presentan muy buen comportamiento a situaciones generales y son robustos, capaces de dar resultados precisos en mallas bastas; por lo tanto resultan competitivo frente a la formulación estándar en desplazamientos.
- Los elementos desarrollados presentan propiedades superiores en comparación con la formulación estándar irreducible. En primer lugar, el rango de estabilidad y por ende el paso de tiempo crítico en la formulación mixta explícita es mayor que la formulación irreducible. Se mantiene la convergencia cuadrática del problema en un esquema mixto explícito. Si se consideran las sub-escalas de los desplazamientos se obtiene un campo estabilizado de las presiones. Al contrario que la versión implícita mixta, posee la ventaja de que no requiere la resolución de un sistema no simétrico y acoplado de ecuaciones. Su facilidad de implementación e integración a códigos explícitos resulta relativamente fácil. Estos elementos se desarrollan en el marco de las sub-escalas, por lo que son más precisos y robustos.
- Los elementos mixtos explícitos desarrollados reproducen satisfactoriamente la respuesta elasto-plástica perfecta y a la vez reproducen objetivamente los procesos de localización de deformaciones tanto para el caso asociado como el no asociado en un modelo de MC. En este caso, los elementos de bajo orden de la formulación mixta explícita estándar no son capaces de dar resultados satisfactorios a este tipo de problemas. La dependencia de la malla y el efecto de bloqueo volumétrico son eliminados y no se requiere la necesidad de un algoritmo de rastreo. Por ende, el problema de la fractura y su propagación es un asunto de aproximabilidad.
- El modelo de daño plástico es un modelo potente capaz de describir adecuadamente el comportamiento de un material quasi-frágil. La variable de daño plástico es un indicador de daño objetivo para la inserción de la fractura discreta. Al contrario de otros modelos constitutivos que utilizan indicadores basados en el promedio ponderado del daño local en una banda de elementos, la formulación mixta explícita desarrollada proporciona el indicador de daño directamente en el nodo de la malla de elementos finitos, realmente conveniente para la inserción la fractura discreta. Se adopta un modelo no asociado de MC como una primera aproximación a la respuesta quasi-frágil en estados tensionales de compresión. La implementación del algoritmo de retorno en el espacio de tensiones principales ha mostrado ser más simple y eficiente que una implementación basada en los invariantes. Por otro lado, dado que MC no es capaz de proporcionar resultados satisfactorios en estados tensionales de tracción, se adopta un modelo de Rankine para recuperar la dirección correcta del flujo plástico para estos estados tensionales.

- Se mostrada la factibilidad de utilizar un modelo discreto de fractura, combinado con un algoritmo de búsqueda de contacto, un algoritmo de refinamiento y un algoritmo mixto explícito para el estudio de los procesos de fractura y localización de deformaciones. A la vez simular procesos de deterioro y fragmentación en los materiales.

7.0.3. Aportaciones

Las principales aportaciones realizadas en este estudio se citan a continuación:

- Se desarrolla una algoritmo de búsqueda de contactos en base al concepto de programación orientada a objetos. El algoritmo, inspirado en las ideas del método de los elementos discretos, se aplica en aplicaciones de la dinámica de mecánica de sólidos en donde se requieren computar y establecer las situaciones de contacto. Este algoritmo fue planteado y diseñado para operar con cualquier tipo de entidad geométrica independiente, siendo reutilizable para otros tipos de aplicaciones.
- Se propone el uso combinado de los métodos de contacto empleados en este trabajo, el método de la función de penalización y el método de multiplicadores de Lagrange, a fin de aprovechar cada una de las ventajas ofrecidas por estos métodos.
- Se extiende el Modelo de Daño Plástico para abordar problemas en donde se requieran considerar grandes deformaciones y se propone la variable de daño plástico como indicador fundamental en la transición continuo-discreto. La introducción de tal transición permite simular procesos de fragmentación en el material, proceso que no puede ser descrito con los modelos de fisura distribuida.
- Se propone una alternativa al remallado adaptable empleando un método de refinamiento local adaptativo. Si bien, estas algoritmias surgieron en las primeras aplicaciones de elementos finitos, las aplicaciones relevantes de refinamientos se emplearon con elementos triangulares y cuadriláteros. Aquí se desarrolla y se extiende a elementos tetraedros, en donde se han tomado en cuenta todos los casos posibles de refinamiento. Nuestra técnica de refinamiento difiere de otras en el sentido de que el algoritmo de refinamiento utiliza una matriz dispersa para mapear de las conectividades generadas. El algoritmo proporciona las nuevas conectividades de los elementos generados tras el refinamiento, cuidando siempre la conformidad de la malla. Por otra parte, y es la principal razón de emplear esta herramienta, se evita realizar el mapeado de variables comúnmente realizados en los algoritmos de remallado y que resulta en mucha difusión numérica.
- Se retoma el modelo original de fractura discreta de Ngo y Scordelis[274] e Ingraffea[341] y sus colaboradores y se propone una metodología combinada de fractura por cara y por elementos en la malla de elementos finitos.
- Se desarrollan las primeras aplicaciones del método de las *sub-escalas ortogonales* a problemas dinámicos y explícitos de la mecánica de sólidos. Aunque el ámbito de origen de este método es la mecánica de fluidos, es en sí innovador; de manera general la contribución de este trabajo es incorporar una formulación con una base conceptual sólida al ámbito de la dinámica de mecánica de sólidos y demostrar la eficacia de los elementos diseñados en este marco.
- Por primera vez en la mecánica de sólidos se propone y se desarrolla la primera formulación mixta estabilizada dentro de un método explícito para abordar de una manera objetiva y precisa problemas

de la mecánica de la fractura y localización de las deformaciones. Efectivamente, y aunque no fue un objetivo primordial de este trabajo, esta formulación es capaz de proporcionar resultados satisfactorios en situaciones cercanamente incompresibles.

- Se ha propuesto una nueva formulación mixta explícita para la solución del problema de no linealidad geométrica en mecánica de sólidos. Efectivamente, se ha extendido la aplicación del método de las sub-escalas ortogonales al rango de grandes deformaciones en mecánica de sólidos, pudiéndose emplear cualquier tipo de modelo constitutivo sea lineal o no lineal.
- Se han adoptado e introducido una serie de simplificaciones con la finalidad de obtener una formulación mixta explícita estabilizada y de bajo coste computacional.
- Se ha desarrollado y propuesto una metodología numérica para abordar problemas de la mecánica de la fractura, con énfasis en la fractura discreta, incluyendo la no linealidad geométrica y del material, y considerando las interacciones del contacto.

7.0.4. Líneas futuras de investigación

Las líneas futuras de investigación que se pueden derivar a partir de esta investigación se pueden incluir:

- A fin de extenderse a aplicaciones industriales, es conveniente paralelizar el código explícito empleando MPI.
- Nuestras simulaciones demuestran que más 60 % del tiempo computacional se consume en la búsqueda de los pares de contacto y el computo de las fuerzas de contacto. Para aplicaciones en grandes escalas, es obligatorio emigrar dicho algoritmo en un entorno paralelización distribuida (MPI). Por otra parte, integrar mejores algoritmos de cálculo de intersección geométrica.
- Incluir y calcular las fuerzas de fricción generadas en el contacto para simular más objetivamente procesos en modo II y modo III de fractura en los materiales quasi-frágiles.
- Al realizar refinamientos locales, algunos elementos generados tras este procedimiento pueden tener muy mala relación de aspecto. Mejorar la relación de aspecto de estos elementos resulta clave si se quiere cuidar la calidad de la malla y por ende el resultado numérico.
- En aplicaciones a grandes escalas donde requieran algoritmos de refinamientos, la extensión paralela del mismo es una opción viable para hacer más eficiente dicho algoritmo.
- Aplicación del método mixto estabilizado explícito a problemas acoplados y la posibilidad de integrar dentro de esta formulación la metodología de discontinuidades fuertes.
- Estudiar la formulación espacial del problema en grandes deformaciones del método mixto explícito como una alternativa a la formulación propuesta aquí. Aunque estas formulaciones son equivalentes, cabe la posibilidad que desde el punto de vista numérico exista algún aspecto de interés de esta formulación.
- Desarrollar y comparar alternativas de formulaciones mixtas explícitas, por ejemplo una formulación mixta explícita en dos campos desplazamiento-presión ($\mathbf{u} - p$), desplazamiento-tensión ($\mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}$) o tres campos desplazamiento-tensiones desviadoras-presión ($\mathbf{u} - \mathbf{S} - p$) o desplazamiento-deformaciones desviadoras-deformaciones volumétricas ($\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}_d - \varepsilon_d$).

- Estudiar la posibilidad de una metodología semi-explicita para abordar problemas verdaderamente incompresibles.

A.1. Conceptos básicos de la mecánica medios continuos

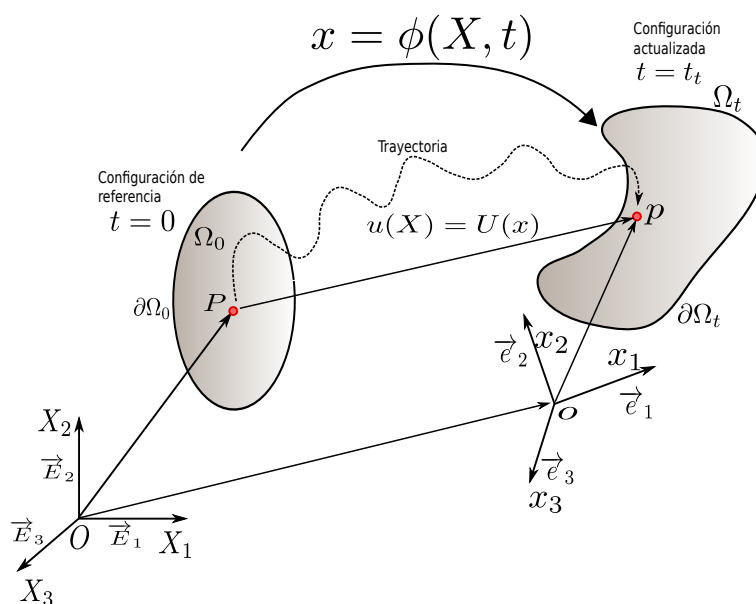


Figura A.1: Descripción del movimiento de un continuo.

Considere un cuerpo deformable \mathcal{B} formado por un conjunto de partículas materiales que ocupan una posición X dentro de una región Ω_0 de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) en un tiempo inicial t_0 . Como es habitual, se introduce un sistema de coordenada en la configuración de referencia Ω_0 definido por su origen fijo O y una base ortonormal $\vec{E}_I \forall I \in \{1, 2, 3\}$ tal que cada partícula material le sea asignada un vector de posición X con respecto al origen. La posición actual de dichas partículas, descrita mediante su vector de posición espacial x con respecto a otra base cartesiana $\vec{e}_i \forall i \in \{1, 2, 3\}$ y un origen o para un tiempo $t > 0$, se entenderá como la configuración actualizada Ω_t . Por tanto, el movimiento de las partículas puede describirse ahora por la evolución de sus coordenadas espaciales (o de su vector de posición) a lo largo del tiempo

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{A.1.1})$$

Note que para una partícula \mathbf{X} fija, esta ecuación describe la trayectoria de la partícula como una función del tiempo. En la literatura podemos encontrar esta ecuación reescrita como $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ para una mayor claridad de las expresiones resultantes. Observe que partiendo de los conceptos anteriores, el desplazamiento de cada partícula en el tiempo resulta:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (\text{A.1.2})$$

Un concepto fundamental en la mecánica de los medios continuos es la cantidad tensorial denominada *gradiente de deformación* \mathbf{F} , el cual participa en todas las ecuaciones que relacionan las cantidades antes y después (o durante) la deformación. Este tensor permite describir la posición espacial relativa de dos partículas vecinas en términos de su posición material. El gradiente de deformación \mathbf{F} se representa mediante la expresión:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (\text{A.1.4})$$

Para que en el proceso de deformación los volúmenes no nulos en la configuración de referencia se mantengan no nulos en la configuración deformada, en otras palabras, para que dos partículas no ocupen el mismo espacio en un momento dado, requiere que el jacobiano sea $J = \det(\mathbf{F}) > 0$. El tensor de gradiente de deformación \mathbf{F} es, por lo tanto, un tensor no singular admitiendo en consecuencia la descomposición polar, o sea:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{X}) \quad (\text{A.1.5})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{X}) \quad (\text{A.1.6})$$

siendo \mathbf{R} el tensor asociado a una transformación ortogonal propia y comúnmente llamado *tensor de rotación* que cumple con la condición de ortonormalidad $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \equiv \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \equiv \mathbf{I}$ y los tensores \mathbf{U} y \mathbf{V} son tensores simétricos definidos positivos denominados tensores de *estiramiento derecho e izquierdo* respectivamente. En la configuración de referencia se define el tensor langragiano covariante de *Cauchy-Green*, el cual se expresa en términos del gradiente de deformación mediante:

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (\text{A.1.7})$$

Análogamente a cómo se ha definido el tensor de Cauchy-Green en la configuración de referencia, en la configuración deformada se define el *tensor de Finger*:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (\text{A.1.8})$$

el cual es un tensor euleriano contra-variante. En algunos textos, \mathbf{b} se le denomina *tensor izquierdo de Cauchy-Green*. Note que el tensor de Cauchy-Green lo podemos re-expresar en términos del tensor de estiramiento derecho \mathbf{U}

$$\mathbf{C} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^T \cdot \mathbf{U}\mathbf{R} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (\text{A.1.9})$$

Tome en cuenta que los tensores \mathbf{C} , \mathbf{U} o \mathbf{V} no constituyen una medida de deformación es sí. Para cuantificar la deformación, es decir; para saber qué tanto los tensores de estiramiento se alejan de un movimiento de sólido rígido, se ha de definir convenientemente una medida de deformación. El tensor de deformación de *Green-Lagrange*, definido a partir del tensor de Cauchy-Green en la configuración de referencia Ω_0 se describe como¹:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T + \mathbf{J}^T \mathbf{J}) \quad (\text{A.1.10})$$

donde $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$. A partir del tensor inverso del de Finger se define el tensor de deformaciones de Almansi

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (\text{A.1.11})$$

Observe que para un movimiento de sólido rígido corresponde a un estado no deformado, es decir; $\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. En el caso de que $|\mathbf{F} - \mathbf{I}| \ll 1$, en otras palabras, cuando los términos cuadráticos de ambas deformaciones $\mathbf{h}^T \cdot \mathbf{h}$ se pueden despreciar (ver A.1.10), las dos deformaciones previamente definidas coinciden $\mathbf{E} \simeq \mathbf{e}$ y se aproximan a la *deformación infinitesimal* $\boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} \right) \quad (\text{A.1.12})$$

Dada la transformación gradiente de deformación \mathbf{F} , que permite relacionar la posición de un punto en una cierta configuración con su imagen en cualquier otra configuración, puede establecerse una equivalencia entre todas las variables mecánicas residente en una configuración con sus imágenes correspondiente a otra configuración cualquiera. Para ello, se introducen operaciones de transformaciones tensoriales conocidas como *Push-forward* y *Pull-back*[196] las cuales dependen de sus argumentos tensoriales. En notación directa, los operadores *Push-forward* y *Pull-back* para tensores genéricos covariantes de segundo orden (dígase tensor de deformación $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{e}$) se escriben²:

$$\xrightarrow{\varphi}(\bullet) = \mathbf{F}^{-T} \cdot (\bullet) \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A.1.13})$$

$$\xleftarrow{\varphi}(\bullet) = \mathbf{F}^T \cdot (\bullet) \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A.1.14})$$

¹Aplicando una métrica más general, el tensor de deformaciones de Green-Lagrange se expresaría como $\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G})$, donde \mathbf{G} es el *tensor métrico* definido en la configuración de referencia Ω_0 . De manera análoga se puede definir un tensor métrico en la configuración espacial Ω_t como \mathbf{g} . Un tensor métrico es simplemente un conjunto de cantidades, en general funciones, que sirven para medir distancias sobre un espacio sea euclidiano o no-euclidiano. Dado que las cantidades tensores que desarrollaremos a lo largo de este capítulo están expresadas en el sistema de coordenadas cartesianas, el tensor métrico en las configuraciones Ω_0 y Ω_t coincide con el delta de Kronecker $\delta_{ij} = \mathbf{I}$.

²Para mayor generalidad de las operaciones de transformación se empleará en esta tesis la notación φ_* y φ^* para *Push-forward* y *Pull-back* respectivamente, sin importar que los argumentos tensoriales sean covariantes o contravariantes.

y para tensores genéricos contra-variantes (tensores de tensión $\mathbf{S} \leftrightarrow \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\sigma})$), estos operadores toman la forma

$$\overrightarrow{\varphi}(\bullet) = \mathbf{F} \cdot (\bullet) \cdot \mathbf{F}^T \quad (\text{A.1.15})$$

$$\overleftarrow{\varphi}(\bullet) = \mathbf{F}^{-1} \cdot (\bullet) \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A.1.16})$$

Teniendo en cuenta estas definiciones, el tensor de deformaciones de Almansi no es más que la contraparte espacial del tensor de deformaciones de Green-Lagrange y viceversa,

$$\mathbf{e} = \overrightarrow{\varphi}(\mathbf{E}) = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A.1.17})$$

$$\mathbf{E} = \overleftarrow{\varphi}(\mathbf{e}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \quad (\text{A.1.18})$$

El gradiente espacial de la velocidad \mathbf{l} es un tensor covariante de segundo orden definido

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{A.1.19})$$

siendo $\dot{\mathbf{F}}$ la derivada de \mathbf{F} con respecto al tiempo. Este tensor no es válido para su inclusión en la descripción espacial del movimiento debido a la exigencia de marco-indiferencia de cualquier modelo constitutivo. Sin embargo, su parte simétrica, definida en la configuración espacial y llamada *tensor de velocidad de deformación* lo es y se escribe como:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{l}(\mathbf{x}) + \mathbf{l}^T(\mathbf{x})) \quad (\text{A.1.20})$$

Los tensores de Cauchy-Green y Green-Lagrange son lagrangianos con lo cual los correspondientes tensores de velocidad de deformación se obtienen simplemente derivando respecto del tiempo, esto es:

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{A.1.21})$$

No sucede lo mismo con los tensores de Finger y Almansi ya que hay que utilizar alguna derivada objetiva. Por tanto, sólo es posible hacer una derivada temporal objetiva en la configuración de referencia. Una forma posible de realizar una derivación temporal objetiva de una variable tensoriales a través del concepto de derivación objetiva de Lie $\mathcal{L}_v(\bullet)$. La derivación temporal de una variable tensorial que reside en la configuración actualizada, cuyo sistema referencial está en movimiento, puede realizarse trasladando ésta variable a un sistema de referencia fijo, en este caso la configuración referencial, luego derivar respecto del tiempo y por último volver a transportar dichas variable a la configuración actualizada. Esta operación que se apoya sobre los operadores de transportes *pull-back* y *push-forward* descritos anteriormente, y garantiza la objetividad. Se define entonces la derivada de Lie de un tensor covariante genérico \mathbf{z} y contra-variante $\hat{\mathbf{z}}$ como:

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{z}) = \overrightarrow{\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\overleftarrow{\varphi}(\mathbf{z}) \right) \right] \quad (\text{A.1.22})$$

$$\mathcal{L}_v(\hat{\mathbf{z}}) = \overleftarrow{\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\varphi}(\hat{\mathbf{z}}) \right) \right] \quad (\text{A.1.23})$$

Tomando en cuenta el concepto anterior, se puede demostrar que el tensor de velocidad espacial de deformación \mathbf{d} puede ser interpretado como la derivada de Lie del tensor de Almansi:

$$\mathbf{d} = \mathcal{L}_v(\mathbf{e}) = \varphi_* \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{A.1.24})$$

A.2. Descomposición multiplicativa

Una de las principales hipótesis de la elasto-plasticidad con deformaciones finitas es la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación \mathbf{F} en contribuciones elásticas y plásticas; es decir, se supone que el gradiente de deformación puede ser descompuesto como el producto

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p \quad (\text{A.2.1})$$

siendo \mathbf{F}_e y \mathbf{F}_p es el gradiente de deformación elástico y plástico respectivamente. Por lo tanto, desde el punto de vista micro-mecánico, el flujo plástico puede interpretarse como movimientos de dislocación de la red cristalina. Esta interpretación es el punto de partida de las descripciones del flujo plástico en problemas de plasticidad en metales, y se muestra en la figura A.2 para el caso de un cristal en que los movimientos de la red cristalina son paralelos a un único plano donde la base ortonormal $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ se considera unida a la red cristalina. El versor \mathbf{m} se toma en la dirección de dislocación mientras que el versor \mathbf{s} se toma perpendicular a \mathbf{m} , siendo el movimiento de la red paralelo al plano definido por ambos versores. La transformación definida por \mathbf{F}_p está asociada únicamente a un movimiento de dislocación del material que deja invariable la red cristalina. Esta transformación queda definida mediante la expresión

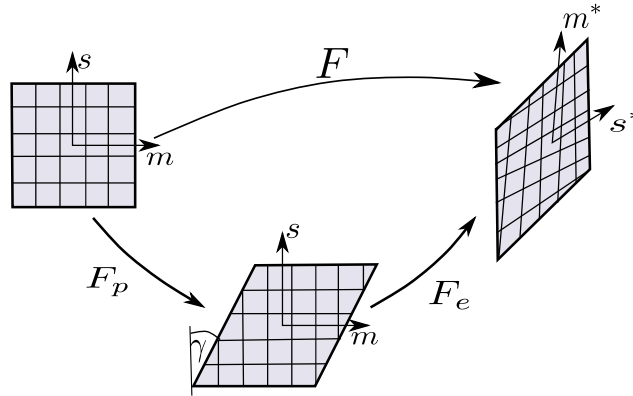


Figura A.2: Interpretación física de la descomposición multiplicativa del gradiente de deformaciones[64].

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{I} + \gamma \mathbf{m} \otimes \mathbf{s} \quad (\text{A.2.2})$$

siendo γ la magnitud de la dislocación y \mathbf{F}_e esta asociado al estiramiento y rotación de la red cristalina. La descomposición multiplicativa fue propuesta a finales de los años setenta [162]. Unos años antes Green y Naghdi propusieron un modelo basado en la descomposición aditiva del tensor de Green- Lagrange:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p \quad (\text{A.2.3})$$

Sin embargo, el inconveniente de la descomposición multiplicativa es que la configuración intermedia está indeterminada a falta de una rotación, aunque este hecho no tiene relevancia cuando el material es isótropo[64]. A lo largo de algunos años se desarrolló una polémica sobre la validez o no de ambas descomposiciones. Por otra parte, en el ámbito de la mecánica computacional algunos autores (Mc Mecking y Rice[251]; Nagtegaal y Jong[269]) han empleado la descomposición aditiva del tensor de velocidad de deformación:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_p \quad (\text{A.2.4})$$

postulada originalmente para el desarrollo de la teoría clásica de la plasticidad (Hill³, 1950). Afortunadamente, las hipótesis (A.2.1;A.2.3;A.2.4) son finalmente unificadas por Simo[357]. Se puede mostrar que partiendo de la descomposición multiplicativa se llega a la descomposición aditiva de las deformaciones de Green-Lagrange \mathbf{E} y Almansi \mathbf{e} , siendo esta última equivalente a A.2.4, pues la velocidad de deformación y las deformaciones del Almansi están relacionadas mediante la derivada de Lie, $\mathbf{d} = \mathcal{L}_v(\mathbf{e})$.

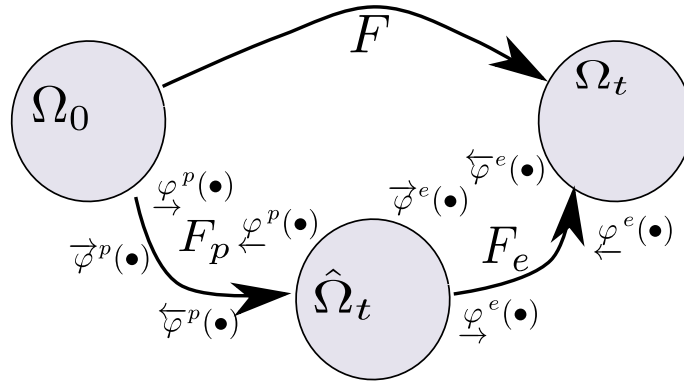


Figura A.3: Descomposición multiplicativa. Configuraciones original, deformada e intermedia.

Partiendo de la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de deformación \mathbf{F} , se puede considerar que la parte plástica de dicho tensor define una tercera configuración, adicional a las de referencia y deformada, denominada configuración intermedia $\hat{\Omega}_t$ (véase figura A.3). La configuración intermedia está definida de manera local, de manera que no puede interpretarse como la configuración del sólido descargado elásticamente. Se puede interpretar, de manera un poco intuitiva, como la configuración formada por los entornos infinitesimales de cada punto $\mathbf{x} \in \Omega_t$, cuando \mathbf{x} se descarga elásticamente[352]. Los gradientes de deformación \mathbf{F}_e y \mathbf{F}_p no pueden ser considerados como gradientes de cualquier proceso de deformación, por lo que se tiene que derivar alguna relación cinemática en analogía con las medidas de deformación dada por las ecuaciones A.1.7, A.1.8, A.1.10 y A.1.11. En la configuración de referencia Ω_0 , la contraparte plástica del tensor derecho de Cauchy-Green y el tensor de deformación de Green-Lagrange se definen como,

³ Hill, R. The mathematical theory of plasticity. Clarendon Press, Oxford, 1950.

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{F}_p \quad (\text{A.2.5})$$

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_p - \mathbf{I}) \quad (\text{A.2.6})$$

Análogamente y considerando una métrica ortonormal⁴, el tensor elástico de Cauchy-Green $\hat{\mathbf{C}}_e$ y Green-Lagrange $\hat{\mathbf{E}}_e$, y el tensor de deformación plástica de Finger $\hat{\mathbf{b}}_p$ y Almansi $\hat{\mathbf{e}}_p$ todos ellos escritos en la configuración intermedia $\hat{\Omega}_t$ están dados por:

$$\hat{\mathbf{C}}_e = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e \quad (\text{A.2.7})$$

$$\hat{\mathbf{E}}_e = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{C}}_e - \mathbf{I}) \quad (\text{A.2.8})$$

$$\hat{\mathbf{b}}_p = \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{F}_p^T \quad (\text{A.2.9})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_p = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{b}}_p^{-1}) \quad (\text{A.2.10})$$

donde se ha remplazado el tensor métrico $\hat{\mathbf{G}}$ en la configuración intermedia por $\hat{\mathbf{I}}$. Finalmente, el tensor espacial de deformación elástico de Finger \mathbf{b}_e y el tensor elástico de Almansi \mathbf{e}_e toman la forma:

$$\mathbf{b}_e = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T \quad (\text{A.2.11})$$

$$\mathbf{e}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{b}_e^{-1}) \quad (\text{A.2.12})$$

Retomando nuevamente los concepto de transporte de la ecuación A.1.13, la existencia de una configuración intermedia $\hat{\Omega}_t$ permite trabajar en este caso, con los siguientes operadores de trasporte para los tensores covariantes y contravariantes:

1. *Push-foward plástico* $\varphi^p(\bullet)$ y $\overrightarrow{\varphi}^p(\bullet)$: Este operador transforma los argumentos tensoriales definidos en la configuración de referencia Ω_0 es su correspondiente argumento en la configuración intermedia $\hat{\Omega}_t$.
2. *Pull-back plástico* $\overleftarrow{\varphi}^p(\bullet)$ y $\overleftarrow{\varphi}^p(\bullet)$: En este caso el operador se aplica sobre tensores definidos en el espacio de $\hat{\Omega}_t$ y los transforma en los correspondientes tensores del espacio Ω_0 .
3. *Push-foward elástico* $\varphi^e(\bullet)$ y $\overrightarrow{\varphi}^e(\bullet)$: En este caso el operador se aplica sobre tensores definidos en $\hat{\Omega}_t$ y los transforma en los correspondientes tensores espaciales en Ω_t .
4. *Pull-back elástico* $\overleftarrow{\varphi}^e(\bullet)$ y $\overleftarrow{\varphi}^e(\bullet)$: Transforma los tensores definidos en la configuración espacial Ω_t en tensores del espacio de $\hat{\Omega}_t$.

Aplicando estos operadores de push-foward y pull-back a los tensores definidos en A.2.8 y A.2.10 resulta

$$\mathbf{e}_p = \varphi^e(\hat{\mathbf{e}}_p) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_e^{-T} \mathbf{F}_e^{-1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \quad (\text{A.2.13})$$

$$\mathbf{E}_e = \overleftarrow{\varphi}^p(\hat{\mathbf{E}}_e) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{C}_p) \quad (\text{A.2.14})$$

⁴Empleando una métrica general, en lugar del tensor \mathbf{I} , aparecería el tensor métrico $\hat{\mathbf{G}}$ en la configuración intermedia $\hat{\Omega}_t$.

La conclusión más importante de las expresiones en A.2.13 y A.2.14 , es que a partir de la descomposición multiplicativa se llega a la descomposición aditiva del tensor de Green-Lagrange en la configuración de referencia, y a la descomposición aditiva del tensor de Almansi en la configuración deformada. Relacionando las ecuaciones A.1.11, A.2.12 y A.2.10 llegamos a:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} - \mathbf{e}_e &= \frac{1}{2} (\mathbf{b}_e^{-1} - \mathbf{b}^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{F}_e^{-T} \cdot (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{b}}_p^{-1}) \cdot \mathbf{F}_e^{-1} \\ &= \mathbf{F}_e^{-T} \cdot \hat{\mathbf{e}}_p \cdot \mathbf{F}_e^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.2.15})$$

$$= \varphi_e^e(\hat{\mathbf{e}}_p) \quad (\text{A.2.16})$$

Considere que \mathbf{F}_e puede ser expresado como

$$\mathbf{F}_e = \hat{\mathbf{I}} + \mathbf{J}_e \quad (\text{A.2.17})$$

Bajo el supuesto de deformaciones elásticas infinitesimales, cada componente del tensor \mathbf{J}_e es lo suficientemente pequeño comparado con el tensor unitario, es decir, $|J_{ij}| \ll 1$. En consecuencia, si despreciamos los términos $\mathcal{O}(\|\mathbf{J}_e\|)$ se acepta la aproximación

$$\mathbf{F}_e = \hat{\mathbf{I}} \quad (\text{A.2.18})$$

Lo mismo es aplicable para la inversa de \mathbf{F}_e expandiendo dicha expresión en una serie de Taylor despreciando nuevamente los términos $\mathcal{O}(\|\mathbf{J}_e\|)$. En consecuencia, todos los tensores definidos en la configuración intermedia se traducen en tensores espaciales mediante la aplicación de una transformación unitaria identidad (identity mapping) entre las dos configuraciones, o sea

$$\mathbf{e}_p = \hat{\mathbf{e}}_p \quad (\text{A.2.19})$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_e + \mathbf{e}_p \quad (\text{A.2.20})$$

obteniéndose nuevamente la descomposición aditiva del tensor de Almansi, a diferencia de que ahora las deformaciones plásticas son arbitrarias en comparación con A.2.13. De igual modo, en la configuración de referencia Ω_0 , la diferencia entre tensor de Green-Lagrange \mathbf{E} y su parte plástica \mathbf{E}_p resulta,

$$\mathbf{E} - \mathbf{E}_p = \varphi_e^e(\mathbf{e}_e) \quad (\text{A.2.21})$$

lo que demuestra que $\mathbf{E} - \mathbf{E}_p$ es un tensor deformación del material inducida por el tensor elástico euleriano \mathbf{e}_e a través de una transformación de *pull-back*. Se denotará $\mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}_p$, aunque reconociendo que \mathbf{E}_e no es intrínsecamente un tensor elástico, ya que tanto \mathbf{F}_e y \mathbf{F}_p están geoméricamente acoplados en su definición.

La descripción de los tensores de velocidad de deformación requiere la generalización del concepto de derivada de Lie, definiendo la *Derivada plástica de Lie*, que permite derivar objetivamente los tensores $\hat{\mathbf{z}}$ definidos en la configuración intermedia $\hat{\Omega}_t$

$$\mathcal{L}_v^p(\hat{\mathbf{z}}) = \varphi^p \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi^p(\hat{\mathbf{z}}) \right) \right] \quad (\text{A.2.22})$$

Por otro lado, sustituyendo la descomposición multiplicativa en A.2.1 en la expresión de gradiente de velocidad \mathbf{l} , después de varios reordenamientos obtenemos,

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F} = \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} + \varphi_*^e \left(\dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \right) \quad (\text{A.2.23})$$

y de acuerdo con esta expresión se define el gradiente elástico de velocidad y el gradiente plástico de velocidad, este último definido en la configuración intermedia, mediante las expresiones:

$$\mathbf{l}_e = \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} \quad (\text{A.2.24})$$

$$\hat{\mathbf{l}}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \quad (\text{A.2.25})$$

Retomando una vez más la aproximación dada por la ecuación A.2.18, permite expresar el segundo término del lado derecho de la ecuación A.2.23 sólo en términos de \mathbf{F}_p , y, por lo tanto, puede identificarse como el gradiente plástico de velocidad \mathbf{l}_p . Esta definición implica la descomposición aditiva del gradiente de velocidad \mathbf{l} y a su vez, al tensor de velocidad de deformación \mathbf{d} :

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_e + \mathbf{l}_p \quad (\text{A.2.26})$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_p \quad (\text{A.2.27})$$

Además, se puede fácilmente verificar que las partes elásticas y plásticas del tensor \mathbf{d} son la derivada de Lie del tensor de deformación elástico y plástico de Almansi, es decir:

$$\mathbf{d}_e = \mathcal{L}_v(\mathbf{e}_e) \text{ y } \mathbf{d}_p = \mathcal{L}_v(\mathbf{e}_p) \quad (\text{A.2.28})$$

Por tanto, la velocidad de deformación de los tensores definidos en la configuración de referencia se obtiene simplemente derivando respecto del tiempo, ya que esta operación es objetiva en dicha configuración:

$$\dot{\mathbf{E}}_e = \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial t} \quad (\text{A.2.29})$$

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial t} \quad (\text{A.2.30})$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_e + \dot{\mathbf{E}}_p \quad (\text{A.2.31})$$

La descomposición aditiva de los tensores de deformación y de sus tasas se verifica en la configuración de referencia y deformada. En concreto, expresión $\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_p$, generalmente empleada en modelos hipoeelásticos(Engelman y Hallquist⁵, 1991; Goicolea, 1990), se toma como hipótesis de partida en distintos

⁵Engelman, B. y Hallquist, J. NIKE2D. A nonlinear, implicit, two-dimensional finite element code for solid mechanics. User Manual. Lawrence Livermore National Laboratory, 1991.

trabajos (Mc Mecking y Rice⁶, 1975 ; Nagtegaal y de Jong⁷, 1981). Por otro lado, aunque se puede obtener la descomposición aditiva de los tensores de deformación y sus respectivas tasas en las tres configuraciones sin mediar con la hipótesis A.2.18 como se presenta en [64], Lee y coautores solo aceptan la descomposición aditiva de \mathbf{d} si las deformaciones elásticas son pequeñas, discrepancia radica esencialmente en la definición de sus términos y cuyo concepto se explota el trabajo de J. Hernández [292].

A.3. Medidas de la tensión

Partiendo de la tensión verdadera o *tensión de Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}$, que reside en la configuración actualizada Ω_t , se expresa a continuación la *tensión de Kirchhoff* $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$, que también reside en la configuración actualizada, pero que su magnitud no está influenciada por los cambios de volumen que experimenta el sólido al cambiar de configuración. A partir de la tensión de Kirchhoff se puede obtener la tensión equivalente en la configuración de referencia Ω_0 , denominada *segundo tensor de Piola-Kirchhoff* $\mathbf{S} = \varphi^*(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}$. Note también que $\mathbf{S} = J\varphi^*(\boldsymbol{\sigma})$ donde el operador $J\varphi^*$ se le conoce como *transformación de Piola*. Este tensor representa un estado tensional sobre un sólido ideal no deformado y en ciertos cálculos es útil su definición para evitar la actualización permanente de la geometría, consiguiendo un proceso con total equivalencia al que se desarrolló en la configuración actualizada. Note que bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones estas medidas de tensión coinciden $\mathbf{S} \equiv \boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{\sigma}$.

A.4. Función de energía libre

En el apartado A.2, se ha introducido la descomposición aditiva del tensor de deformación espacial en partes elásticas y plásticas. Es natural pensar que si en este punto pudiera aplicarse una descomposición similar con la energía libre. En la literatura relacionada con plasticidad en grandes deformaciones abundan referencias bibliográficas que validan el uso de esta hipótesis [242, 352]. La definición de la función de energía libre ψ parte entonces de asumir la *elasticidad desacoplada*, en la que la misma se descompone aditivamente en una parte elástica (recuperable) ψ^e y otra parte plástica (irreversible) ψ^p :

$$\psi = \psi_e + \psi_p \quad (\text{A.4.1})$$

donde la parte elástica se identifica con la energía asociada a distorsiones de la red cristalina y la parte plástica asociada a los movimientos de dislocación. La objetividad de la componente elástica se impone estableciendo la dependencia del funcional:

$$\psi_e = \psi_e(\mathbf{e}_e, \mathbf{q}^h) \quad (\text{A.4.2})$$

el cual depende de tensor espacial de deformaciones elásticas \mathbf{e}_e y las variables de endurecimiento \mathbf{q}^h . La componente plástica está determinado por el valor actual del conjunto de variables internas de endurecimiento \mathbf{q}^h y ablandamiento \mathbf{q}^s

⁶Mc Mecking, R. y Rice, J. Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. International Journal of Solids and Structures, tomo 11:p 'gs. 601–616, 1975.

⁷Nagtegaal, J. y de Jong, J. Some computational aspects of elastic- plastic large strain analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, tomo 17, 1981.

$$\psi_p = \psi_p(\mathbf{q}^h, \mathbf{q}^s) \quad (\text{A.4.3})$$

En la definición de los modelos constitutivos es habitual utilizar la disipación en la forma de Clausius-Planck, donde en procesos termo-mecánicos se puede desacoplar el problema térmico del mecánico al imponer la teoría racional de Coleman y Noll [242], pero además en función de la energía libre. La potencia medida por unidad de volumen está dada por $\mathcal{P} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}$ y la disipación (asumiendo procesos isotérmicos) \mathcal{D} es la diferencia entre la potencia y la variación temporal energía interna, $\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \dot{\psi}$, siendo $\boldsymbol{\tau}$ del tensor de tensiones de Kirchhoff. Al asumir la aditividad del tensor de tasa de deformación $\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_p$, es posible reexpresar la forma espacial de la disipación como

$$\mathcal{D} = \left(\boldsymbol{\tau} - \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{e}_e} \right) : \mathbf{d}_e + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}_p - \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{q}^h} \dot{\mathbf{q}}^h - \frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{q}^h} \dot{\mathbf{q}}^h - \frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{q}^s} \dot{\mathbf{q}}^s \quad (\text{A.4.4})$$

La segunda ley de la termodinámica limita el sentido de la transformación energética, tal que la energía que se transforma sólo puede hacerlo de una forma en otra, garantizando siempre que $\mathcal{D} \geq 0$, condición que ha de cumplirse en todos los movimientos posibles del sólido, y por lo tanto, el término \mathbf{d}_e desaparece, lo que implica que el tensor de tensiones de Kirchhoff es la derivada de la energía libre con respecto al tensor de deformación elástica.

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{e}_e} \quad (\text{A.4.5})$$

Por consiguiente, la desigualdad $\mathcal{D} \geq 0$ queda finalmente expresada

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}_p - \left(\frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{q}^h} + \frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{q}^h} \right) \dot{\mathbf{q}}^h - \frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{q}^s} \dot{\mathbf{q}}^s \geq 0 \quad (\text{A.4.6})$$

Los aspectos más cruciales del modelo aún no se han abordado. Por una parte, se necesita una expresión para ψ_e para determinar la respuesta elástica, el cual se abordará en la sección siguiente, y por otra parte, se requieren las ecuaciones de evolución para el conjunto de variables internas $\mathbf{q} = \{\mathbf{q}^h, \mathbf{q}^s\}$ y para \mathbf{d}_p . En el capítulo 4 se particulariza este modelo para el tratamiento numérico de los materiales cuasi-frágiles, entrando en detalle en cada uno de los aspectos generales del mismo.

A.4.1. Respuesta Elástica

Motivado por la hipótesis de pequeñas deformaciones elásticas, la estructura de la función de energía libre elástica se toma de la teoría infinitesimal clásica:

$$\psi_e(\mathbf{e}_e, \mathbf{q}^h) = \frac{1}{2} \left(3\kappa \cdot \text{tr}^2(\mathbf{e}_e) + 2\mu \cdot \text{dev}(\mathbf{e}_e) : \text{dev}(\mathbf{e}_e) \right) \quad (\text{A.4.7})$$

donde la $\text{tr}(\mathbf{e}_e)$ denota la traza del tensor espacial de deformación elástico \mathbf{e}_e , $\text{dev}(\mathbf{e}_e) = \mathbf{e}_e - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{e}_e) \mathbf{I}$ el tensor desviador de \mathbf{e}_e , κ y μ es el módulo de Bulks y módulo de corte respectivamente. Observe que ψ_e

depende en \mathbf{e}_e sólo a través de los invariantes tensoriales $tr(\mathbf{e}_e)$ y $||dev(\mathbf{e}_e)||$, lo que implica una respuesta elasto-isótropa; aunque la adopción de una suposición isotrópica del material es un tema un tanto polémico cuando ocurren procesos de fractura.

Para fines posteriores, es conveniente expresar A.4.7 como la contracción de las cantidades tensoriales:

$$\psi_e(\mathbf{e}_e, \mathbf{q}^h) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_e : \mathbf{c}_e : \mathbf{e}_e \quad (\text{A.4.8})$$

donde \mathbf{c}_e es el tensor espacial elástico de cuarto orden definido como:

$$\mathbf{c}_e = \kappa \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \left(\mathbb{I}_S - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \quad (\text{A.4.9})$$

donde $\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} = \delta_{ij} \delta_{kl}$ y $\mathbf{I} = \delta_{ij} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{e}}_j$, e $\mathbb{I}_S = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{e}}_j \otimes \vec{\mathbf{e}}_k \otimes \vec{\mathbf{e}}_l$ es el tensor identidad de segundo orden y el tensor simétrico de cuarto orden. De acuerdo con la expresión A.4.5, el tensor de tensiones de Kirchhoff en un tiempo t esta dado entonces por:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}_e} = \mathbf{c}_e : \mathbf{e}_e \quad (\text{A.4.10})$$

A.4.2. Respuesta Plástica

Si los atributos físicos en $\mathbf{X} \in \Omega_0$ experimentan un proceso de deformación dado por $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$, implica el conocimiento de los valores actuales del conjunto de variables de estado $\mathbf{F}, \mathbf{F}_e, \mathbf{q}^h, \mathbf{q}^s$. El gradiente de deformación \mathbf{F} , la variable primaria, puede obtenerse por diferenciación en cualquier tiempo $t \in [t_0, t_i]$. Si no ocurre mecanismos irreversibles, es decir, si durante el proceso de carga no tiene lugar deformaciones plásticas, en consecuencia, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e$.

Por el contrario, si se producen procesos de disipación, ocurren modificaciones en los atributos físicos; y para obtener el estado tensional final del sólido, se ha de “rastrear” la trayectoria de deformación a partir de la configuración de referencia. Es precisamente aquí donde radica la importancia de las variables internas. Las mismas pueden ser consideradas como objetos matemáticos introducidos para evitar una dependencia explícita del estado tensional y otras propiedades en la historia de la deformación. Por lo tanto, se necesitan ecuaciones adicionales para relacionar los valores actuales de las variables internas \mathbf{q} con con la historia de las deformaciones plásticas. Sobre la base matemática de que cualquier curva está completamente descrita por su ecuación diferencial (con adecuadas condiciones iniciales), estas relaciones se dan en forma de *tasa* (rate). Otro conjunto de ecuaciones diferenciales es proporcionada por la *regla de flujo*, el cual define el tensor de tasa de deformación plástica \mathbf{d}_p como una función de la tensión y otras variables de estado. Un elemento esencial en la definición de estas ecuaciones de evolución es la *función de fluencia*, que, junto con las condiciones de *carga/descarga*, regula el inicio y la continuación de la deformación plástica[292].

En resumen, la obtención local de la respuesta plástica en el dominio de interés $[t_0, t_f]$ implica la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden complementadas por condiciones iniciales adecuadas, con el tiempo t como la variable independiente, las componentes de \mathbf{F}_e (o \mathbf{F}_p) y \mathbf{q} como variables dependientes, y el gradiente de deformación $\mathbf{F}(t)$ como el término fuente. El carácter altamente no lineal de esta ecuación diferencial ordinaria (ODE) hace imposible conseguir una solución de forma cerrada por lo que se tiene que recurrir a procedimientos numéricos para su resolución.

A.5. Variables internas

El origen de las variables internas \mathbf{q} puede en principio encontrarse en la necesidad de describir la cinética de la evolución fisicoquímica de los procesos mecánicos. Estas variables internas \mathbf{q} proveen una potente forma de caracterizar el comportamiento mecánico de los medios continuos, pues junto a la variable libre del problema, tensión o deformación, permiten definir precisamente el estado termodinámico del sólido[288].

Las variables internas son de naturaleza escalar, vectorial o tensorial, representan un conjunto de complejos fenómenos físicos indivisibles a nivel macroscópico y describen un comportamiento microscópico promedio de uno o más efectos físicos. La formulación de un modelo constitutivo requiere la detección y medición de forma apropiada de la variable interna. De esta forma se establece que las variables internas son en esencia medibles, pero no controlables, pues sólo puede establecerse su ley de evolución en el tiempo que dependerá de la variable libre y del resto de variables internas $\dot{\mathbf{q}} = f_q(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})$.

A.5.1. Ley de endurecimiento o ablandamiento

Las leyes endurecimiento o ablandamiento son relaciones que se establecen con las respectivas *variables de estado* o variables internas de endurecimiento o ablandamiento respectivamente, el cual definen el tamaño, la forma y la ubicación de la función de fluencia Φ . Cada transformación de las superficies que definen el dominio elástico se asocia con un significado físico en particular. Note que el número de estas relaciones está condicionado por la disponibilidad de datos experimentales que existan [288, 292].

La evolución de las variables internas se expresa en términos del tensor gradiente plástico de velocidad $\mathbf{l}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1}$ en la forma:

$$\mathcal{L}_v^p(\mathbf{q}) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \mathbf{l}_p \quad (\text{A.5.1})$$

donde \mathbf{h} es el tensor de módulos instantáneos de endurecimiento o ablandamiento. En caso de que \mathbf{q} sea un escalar, la ecuación A.5.1 queda expresada

$$\dot{q} = h(\boldsymbol{\tau}, q) l_p \quad (\text{A.5.2})$$

Descomponiendo el tensor de velocidad de deformación plástica en su parte simétrica y anti-simétrica

$$\mathbf{l}_p = \mathbf{d}_p + \mathbf{w}_p \quad (\text{A.5.3})$$

se obtienen los tensores de velocidad de deformación plástica y el *spin* plástico \mathbf{w}_p . Por lo general, al asumir estados de deformación que no se han desarrollado texturas que hacen perder la isotropía, el término \mathbf{w}_p puede ser despreciado. Esta hipótesis presenta el inconveniente de dejar indefinida la configuración intermedia $\hat{\Omega}_t$ a falta de una rotación. Sin embargo, en modelos isótropos, que son independientes de las rotaciones, es razonable asumir tal hipótesis. La ley de endurecimiento A.5.3 puede expresarse como:

$$\mathcal{L}_v^p(\mathbf{q}) = h(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \mathbf{d}_p \text{ siendo } \mathbf{q} \text{ un tensor.} \quad (\text{A.5.4})$$

$$\dot{q} = h(\boldsymbol{\tau}, q) d_p \text{ para } q \text{ escalar.} \quad (\text{A.5.5})$$

A.6. Criterio de fluencia y potencial plástico

El *criterio de fluencia* es una función escalar de argumentos tensoriales que delimita el dominio elástico \mathbb{E} , estableciendo el límite a partir del cual se inicia el comportamiento no-lineal[288]. Se define mediante la función $\Phi : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{int}} \rightarrow \mathbb{R}$. En la configuración actual Ω_t del espacio de tensiones admisibles $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{int}}$ debe pertenecer al conjunto \mathbb{E} definido como:

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\tau}} = \{(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{int}} \mid \Phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \leq 0\} \quad (\text{A.6.1})$$

El interior *int* de \mathbb{E} se denomina *dominio elástico*:

$$\text{int}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{\tau}}) = \{(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{int}} \mid \Phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) < 0\} \quad (\text{A.6.2})$$

y en la frontera se denomina *superficie de fluencia*:

$$\partial \mathbb{E}_{\boldsymbol{\tau}} = \{(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^{n_{int}} \mid \Phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = 0\} \quad (\text{A.6.3})$$

Cualquier estado tensional fuera del dominio elástico es inadmisibles, por lo tanto el proceso de resolución elasto-plástico consiste en forzar a que el estado tensional se sitúe sobre la superficie de fluencia $\partial \Phi = 0$. Para comportamientos multiaxiales, la función de fluencia definida en A.6.1 se comporta como un traductor de estados multiaxiales a uniaxiales. Un vez obtenida la tensión uniaxial equivalente al estado multiaxial, se compara con un escalar que representa el umbral obtenido en laboratorio para un problema uniaxial.

Aunque estudios experimentales llevados a cabo en metales muestran la poca influencia de la presión hidrostática sobre las deformaciones plásticas, dependiendo fundamentalmente de las tensiones desviadoras, en materiales quasi-frágiles se hace necesario tener en cuenta que las fuerzas de rozamiento entre partículas aumentan con la presión entre sus caras, reflejando la importancia de la tensión esférica o hidrostática (el primer invariante del tensor de tensiones I_1). Para este caso, la función de discontinuidad se escribe:

$$\Phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = \Phi(I_1, J_2, J_3, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (\text{A.6.4})$$

La representación general de las funciones de fluencia o discontinuidad se realiza mediante una superficie en el espacio de tensiones, donde las direcciones principales de este espacio configuran los ejes de referencia. A este espacio se lo denomina espacio de tensiones de High-Westergaard.

La función de potencial plástico $\Psi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = cte$, determinada a partir de estudios experimentales, es la que define la *dirección* del incremento temporal de deformación plástica $\dot{\epsilon}_p$. Es una función descrita en base a argumentos tensoriales al igual que la función de fluencia. Un caso particular de flujo plástico se produce cuando se adopta la superficie de fluencia plástica como superficie de potencial plástico $\Psi = \Phi$, caso conocido como flujo asociado, en caso contrario se dice no asociado.

A.7. Regla de flujo

Para continuar con el análisis, es necesario establecer ecuaciones de evolución de las deformaciones plásticas. Como es usual en la teoría de plasticidad, se asume que el tensor de tasa de deformación plástica \mathbf{d}_p está alineado con el gradiente de una cierta función potencial plástico Ψ . Más precisamente, cada función de fluencia Φ se asocia a una función potencial plástico. Por consiguiente, para cualquier estado tensional τ ubicado sobre la superficie elástica \mathbb{E}_τ , el tensor de tasa de deformación plástica se escribe

$$\mathbf{d}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m}(\tau, \mathbf{q}) = \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi(\tau, \mathbf{q})}{\partial \tau} \quad (\text{A.7.1})$$

siendo \mathbf{m} el vector de *flujo plástico*, $\dot{\lambda}$ un escalar no negativo usualmente llamado *parámetro de consistencia plástica*. Sin embargo, cuando el estado tensional se sitúa sobre la intersección de dos superficies de fluencia $\partial \mathbb{E}^\alpha \cap \partial \mathbb{E}^\beta$ y $\partial \mathbb{E} = \{\partial \mathbb{E}^\alpha, \partial \mathbb{E}^\beta\}$, el gradiente no está definido y no es único, por lo que la ecuación A.7.1 conviene reemplazarla por:

$$\mathbf{d}_p = \sum_{\gamma \in \{\alpha, \beta\}} \dot{\lambda}^\gamma \mathbf{m}^\gamma(\tau, \mathbf{q}) = \sum_{\gamma \in \{\alpha, \beta\}} \dot{\lambda}^\gamma \frac{\partial \Psi^\gamma(\tau, \mathbf{q})}{\partial \tau}, \text{ para } \tau \in \partial \mathbb{E}_\tau^{\alpha, \beta} \quad (\text{A.7.2})$$

La ecuación A.7.2 se le conoce como *Regla de Koiter*, empleada ampliamente en plasticidad con superficies múltiples donde varias superficies delimitan el dominio elástico. Criterio clásicos como Rankine, Tresca o Morh Coulomb son ejemplos de superficies múltiples.

A.8. Condición de carga y descarga. Condición de consistencia

Para un estado tensional cualquiera τ y unas variables internas \mathbf{q} , de acuerdo con los valores que tome la función Φ definida en A.6.1 y siguiendo el concepto de superficies múltiples en A.7.2 se pueden presentar dos situaciones:

1. $\Phi^\gamma(\tau, \mathbf{q}) < 0 \ \forall \gamma \in \partial \mathbb{E}_\tau$, con lo que τ está dentro del dominio elástico y el material se comporta elásticamente.
2. $\Phi^\gamma(\tau, \mathbf{q}) = 0 \ \forall \gamma \in \partial \mathbb{E}_\tau$, y τ está sobre la superficie de fluencia, pudiendo variar las deformaciones plásticas y las variables internas.

Por definición, la situación $\Phi^\gamma(\tau, \mathbf{q}) > 0$ no es posible. Considerando estas dos situaciones y de acuerdo con A.7.2, se pueden establecer de forma general los siguientes estados de carga:

$$\Phi^\gamma(\tau, \mathbf{q}) < 0 \Rightarrow \dot{\lambda}^\gamma = 0 \quad (\text{A.8.1})$$

$$\Phi^\gamma(\tau, \mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \dot{\lambda}^\gamma \geq 0 \quad (\text{A.8.2})$$

El problema que se plantea es determinar en que situaciones de A.8.2 se tiene $\dot{\lambda}^\gamma > 0$ (carga plástica) o $\dot{\lambda}^\gamma = 0$ (descarga elástica). Esta situación queda expresada de forma compacta con las condiciones de Kuhn-Tucker, que se expresan

$$\dot{\lambda}^Y \geq 0 ; \Phi^Y(\tau, \mathbf{q}) \leq 0; \text{ y } \dot{\lambda}^Y \Phi^Y(\tau, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{A.8.3})$$

junto con la condición de consistencia plástica:

$$\Phi^Y(\tau, \mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \dot{\lambda}^Y \dot{\Phi}^Y(\tau, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{A.8.4})$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker y la condición de consistencia plástica, que en su conjunto se denominan condiciones de carga-descarga, se pueden resumir de la siguiente manera [64]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^Y < 0 \iff \dot{\lambda}^Y = 0 \text{ carga elástica} \\ \Phi^Y = 0 \left\{ \begin{array}{l} \dot{\Phi}^Y < 0 \iff \dot{\lambda}^Y = 0 \text{ descarga elástica} \\ \dot{\Phi}^Y = 0 \text{ y } \dot{\lambda}^Y = 0 \text{ carga neutra} \\ \dot{\Phi}^Y = 0 \text{ y } \dot{\lambda}^Y > 0 \text{ carga plástica} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Comentarios sobre el operador de proyección

B.1. Operador de proyección ortogonal

Es interesante hacer un breve comentario sobre el significado práctico del operador de proyección ortogonal. Un proyector \mathcal{P} es un operador lineal que tiene una variable definida en un espacio dado y da la mejor representación de dicha variable en un espacio objetivo. Como requisito, un operador de proyección debe cumplir con la propiedad $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{y})) = \mathcal{P}(\mathbf{y})$, por lo que se dice que la proyección de un valor proyectado es él mismo. Una proyección no ortogonal de una variable \mathbf{y} en el espacio FE no es más que su valor discretizado en el espacio de FE, es decir, $\mathbf{y}_h = \mathcal{P}(\mathbf{y})$. Si tenemos en cuenta la definición intuitiva de proyección y tomamos como la *mejor* aproximación la realizada por mínimos cuadrados, podemos ver fácilmente que el valor proyectado de \mathbf{y}_h se puede obtener como:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot (\mathbf{y}_h - \mathbf{y}(\mathbf{x})) d\Omega = \mathbf{0} \quad (\text{B.1.1})$$

que da lugar a un problema discreto del tipo

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{y}_h d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (\text{B.1.2})$$

reconociendo el lado izquierdo como una matriz de *pseudo-masa* $\check{\mathbf{M}}$, por lo que dicha operación se puede entender como

$$\check{\mathbf{M}} \mathbf{y}_h = \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (\text{B.1.3})$$

Si se aplica la técnica diagonalización en $\check{\mathbf{M}}$, cada término diagonal de dicha matriz representa el área o volumen nodal del nodo correspondiente a la malla de elementos finitos. Bajo tal supuesto, el operador de proyección se puede aproximar como un *suavizado ponderado* o *smoothing* de la variable original.

Por definición, la proyección ortogonal de un variable es la parte de la variable que es ortogonal al espacio de FE, es decir, es la parte que no se puede representar en dicho espacio. Puesto que el operador de proyección es lineal, esto se hace como:

$$\mathcal{P}^{\perp}(\mathbf{y}) := \mathbf{y} - \mathcal{P}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{y}_h \quad (\text{B.1.4})$$

con esta definición se verifica inmediatamente que

$$\mathcal{P}^\perp \mathcal{P}(\mathbf{y}_h) = \mathcal{P}(\mathbf{y}_h) - \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{y}_h)) = \mathbf{y}_h - \mathbf{y}_h = \mathbf{0} \quad (\text{B.1.5})$$

demostrando así la ortogonalidad.

Curvas de ablandamiento de la cohesión

C.1. Curvas de ablandamiento

Las curvas de ablandamiento para la evolución de la cohesión en el modelo de daño plástico empleadas en este trabajo fueron propuestas por S. Oller[287]. Las mismas se expresan en función de la variable de daño plástico, que surgen al expresar las curvas de ablandamiento $\sigma - \epsilon$ en forma de $\sigma - \kappa$:

- Caso I. Curva de ablandamiento exponencial en $\sigma - \epsilon$ (caso lineal en κ_p).

$$c = (1 - \kappa_p)c_0 \quad (\text{C.1.1})$$

- Curva II. Curva de ablandamiento lineal en $\sigma - \epsilon$ (caso irracional en κ_p)

$$c = \sqrt{(1 - \kappa_p)}c_0 \quad (\text{C.1.2})$$

donde c_0 es la cohesión inicial. Otra curva de ablandamiento aplicada en este trabajo fue una del tipo exponencial, pero expresada en función de la deformaciones plásticas efectivas:

$$c = c_0 e^{2H_s \bar{\epsilon}_p / c_0} \quad (\text{C.1.3})$$

donde H_s es el parámetro que mide la fragilidad del material y está dado en función de la longitud del elemento finito h_e y la energía de fractura \mathcal{G}_f , es decir:

$$H_s = \frac{c_0^2 h_e}{2\mathcal{G}_f} \quad (\text{C.1.4})$$



Parámetros de estabilización

D.1. Determinación de los parámetros de estabilización mediante un análisis de Fourier

Considérese la ecuación mixta de equilibrio dinámico en pequeñas deformaciones:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (\text{D.1.1})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \nabla^s \mathbf{u} = 0 \quad (\text{D.1.2})$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de tensiones, \mathbf{u} es el campo de los desplazamientos, $\ddot{\mathbf{u}}$ es el campo de las aceleraciones y $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformaciones. Las variables principales de este problema mixto son $\mathbf{U} := [\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}]$ y la denominaremos variables continuas del problema. Asuma que estas variables pueden considerarse como la contribución de una componente discreta resuelta numéricamente por elementos finitos y otra componente no resulta, es decir $\mathbf{U} = \mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}$, con $\mathbf{U}_h := [\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_h]$ y $\tilde{\mathbf{U}} := [\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}]$. Introduciendo las componentes discretas en las ecuaciones D.1.1 y D.1.2 se tiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \ddot{\tilde{\mathbf{u}}} = \mathbf{r}_{u,h} \quad (\text{D.1.3})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{r}_{\varepsilon,h} \quad (\text{D.1.4})$$

donde $\mathbf{R}_h := [\mathbf{r}_{u,h}, \mathbf{r}_{\varepsilon,h}]$ son los residuos del problema discreto. Interesa encontrar los valores aproximados de las sub-escalas $\tilde{\mathbf{U}}$ tal que se obtenga el efecto estabilizador deseado y no sus valores exactos de punto a punto, mediante una expresión del tipo:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathcal{T} \cdot \Pi(\mathbf{R}_h) = \mathcal{T} \cdot \mathcal{R}_h \quad (\text{D.1.5})$$

donde \mathcal{T} es la matriz diagonal a determinar cuyos términos son los parámetros de estabilización y Π un operador de proyección. Considérese que la transformada de Fourier de una función genérica sobre el dominio de un elemento finito Ω_e se expresa como:

$$\hat{g}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}(g(\mathbf{x})) = \int_{\Omega_e} e^{-i \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}}{h}} g(\mathbf{x}) d\Omega_e \quad (\text{D.1.6})$$

siendo $i = \sqrt{-1}$, h el diámetro del elemento finito Ω_e y $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$ denominada el número de onda adimensional. Dado que las sub-escalas no pueden aproximarse mediante la discretización por elementos finitos,

la transformada de Fourier de las mismas estarán representadas por las componentes altas de este número. La derivada de una transformada de Fourier dominada por las componentes altas de \mathbf{k} puede aproximarse como [98]:

$$\frac{\partial \hat{g}(\mathbf{k})}{\partial x_j} \approx i \frac{k_j}{h} \hat{g}(\mathbf{k}) \quad (\text{D.1.7})$$

Por otra parte, obsérvese que la ecuación presenta una derivada temporal. Se hace necesario entonces realizar una discretización temporal. Dado que interesa desarrollar una metodología compatible con un esquema explícito de integración, la sub-escala de los desplazamientos será tratada explícitamente y la sub-escala de las deformaciones implícitamente. Por tanto, realizando la transformada de Fourier en las ecuaciones D.1.3 y D.1.4 obtenemos:

$$i \frac{\mu_0 \mathbf{k}}{h} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1}(\mathbf{k}) - \frac{\rho}{\Delta t^2} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(\mathbf{k}) = \frac{\rho}{\Delta t^2} (-2\tilde{\mathbf{u}}^n(\mathbf{k}) + \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}(\mathbf{k})) + \mathbf{r}_u^n(\mathbf{k}) \quad (\text{D.1.8})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1}(\mathbf{k}) - i \frac{\mathbf{k}}{h} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{r}_\varepsilon^{n+1}(\mathbf{k}) \quad (\text{D.1.9})$$

Multiplicando D.1.9 por $-i \frac{\mu_0 \mathbf{k}}{h}$ y sumándolo con D.1.8 se obtiene:

$$-\left(\frac{\rho}{\Delta t^2} + \frac{\|\mathbf{k}\|^2 \mu_0}{h^2} \right) \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(\mathbf{k}) = \frac{\rho}{\Delta t^2} (-2\tilde{\mathbf{u}}^n(\mathbf{k}) + \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}(\mathbf{k})) + \mathbf{r}_u^n(\mathbf{k}) - i \frac{\mu_0 \mathbf{k}}{h} \mathbf{r}_\varepsilon^{n+1}(\mathbf{k}) \quad (\text{D.1.10})$$

Mirando que el último término afecta a $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(\mathbf{k})$ sólo en la dirección de \mathbf{k} , se despreciará en lo que sigue la contribución de dicho término aparte de buscar simplificar la metodología lo más posible. En consecuencia la ecuación D.1 se reescribe como:

$$\left(\frac{\rho}{\Delta t^2} + \frac{\|\mathbf{k}\|^2 \mu_0}{h^2} \right) \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(\mathbf{k}) = \tau_u^{-1} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(\mathbf{k}) = \frac{\rho}{\Delta t^2} (2\tilde{\mathbf{u}}^n(\mathbf{k}) - \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}(\mathbf{k})) - \mathbf{r}_u^n(\mathbf{k}) \quad (\text{D.1.11})$$

Por otra parte, desde un punto de vista analítico, interesa tener una matriz de estabilización \mathcal{T} simétrica y definida positiva. En consecuencia, $\mathbf{r}_\varepsilon^{n+1}(\mathbf{k})$ no debe aparecer en la expresión de $\tilde{\mathbf{u}}$ y $\mathbf{r}_u^n(\mathbf{k})$ no debe parecer en la expresión de $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$. La aproximación sugerida para $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ es:

$$\mathbf{k} \frac{L_0}{h} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1}(\mathbf{k}) = \tau_\varepsilon^{-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1}(\mathbf{k}) = \mathbf{r}_\varepsilon^{n+1}(\mathbf{k}) \quad (\text{D.1.12})$$

siendo L_0 la longitud de dominio computacional. Observando la ecuación D.1.11, D.1.13 con D.1.5, matriz de estabilización \mathcal{T} está dada por:

$$\mathcal{T} := \text{Diag}(\tau_u, \tau_\varepsilon) \quad (\text{D.1.13})$$

Esto nos permite concluir que si tomamos τ_u y τ_ε como

$$\tau_u = \left(\frac{\rho}{\Delta t^2} + \frac{\mu_0}{c_u h^2} \right)^{-1} \quad (\text{D.1.14})$$

$$\tau_\varepsilon = c_\varepsilon \frac{h}{L_0} \quad (\text{D.1.15})$$

existe un valor de c_u y c_ε independiente de h en la cual la ecuación D.1.5 es válida, en el sentido de que $\tilde{\mathbf{U}}$ y $\mathcal{T} \cdot \Pi(\mathcal{R})$ tienen de manera aproximada la misma norma \mathcal{L}^2 dentro del elemento finito Ω_e .



A modal reanalysis algorithm based in AMLS method for local non-topological modification

Este apéndice corresponde al trabajo realizado por el autor de esta tesis en la universidad de Pekín, China, sobre el desarrollo e implementación de una metodología de re-análisis modal, bajo la supervisión del Prof. Chen Pu y el Prof. M. W. Yuan. Dado la diferencia, tanto de contenido como los propósitos de esta tesis, se adjunta el correspondiente trabajo realizado, no como un capítulo de la tesis en sí misma, pero sí como un apéndice adicional dedicado a corroborar el trabajo realizado por el autor durante su estancia en China. Para tal fin, este apéndice ha sido redactado en inglés ya que es el idioma común entre los involucrados en este estudio.

E.1. Introduction

Analysis is the main part of structural design process and optimization problem. Generally speaking, the design and optimization problem involves many times repeated analysis in order to achieve an optimal configuration of the structure, in terms of dimension and economical cost, guaranteeing the safety requirement. For example, imagine a mixed steel-concrete high building. According to design building codes and structuralists experiences, in the first analysis it is selected a trial cross-section of beam and columns. However, during the analysis, gradual changes of the structure are realized where some members (columns, beams and shear walls) are deleted, added or changed their geometrical and material properties.

Solution of the eigen-value problem requires considerably computational effort than a static analysis. Since exact solution can be prohibitively expensive, approximate solution techniques have been developed for large scale systems[217]. Nonetheless, the key problem is that repeated analysis process is computationally expensive and time consuming for large and huge structure. Because of the large number of analyses required, it is very important to develop an efficient reanalysis techniques, especially for structures analysed by finite element method. Reanalysis appears to be first applied in static analysis case. The earliest application of reanalysis appears to be the stress analysis of fuselage panels with a cut-outs[89]. In that study, a continuous fuselage was analysed first and the effect of the cut-out was modelled with corrective self-equilibrating stress system applied to the continuous structure at the panel where the cut-out would be located. According to Aurora's definition[9], static reanalysis is the process for finding the response under static load of a structure after modifications using the original response of the structure such that the computational time of reanalysis

is less than the complete analysis time. The aim is to evaluate the structural response (displacements, stresses and forces) for successive modifications accurately, without solving the complete set of modified analysis equations repeatedly. Reanalysis involves also in the solution of various non-linear and dynamic analysis problems[403]. In non-linear analysis, a set of updated linear equations must be solved repeatedly many times. However, for linear and non-linear dynamic case, the improvement of the dynamical behaviour of structure often need a very long computational time particularly if tuning of some modal characteristics is wanted. That is why modal reanalysis techniques have been developed during the past 10-15 years where for calculating the vibrations frequencies it is also necessary to solve repeatedly a set of update equations. Modal reanalysis is the focus of this chapter.

In practical, structural modification reanalysis can be applied to a wide range of engineering problems such as construction sequence analysis and bridges[81]. It can also be applied to the analysis of seepage[233], and bio-mechanics[54]. In general, reanalysis techniques may be classified into two categories: exact and approximate methods. The exact methods generate the exact solution of the modified structure equations and are generally efficient for small modifications. Exact methods have concentrated on low-rank modifications to structures because they concerns about computational efficiency and sometimes have been limited to localized modifications. In fact, exact structural reanalysis methods were developed in the framework of structural analysis before finite element method became the norm in computational structural analysis. However, in the context of modern structural analysis, it is possible to show that these methods are variations of two general matrix-update formulas well known as Sherman–Morrison-Woodbury(SMW) formulas[5]. Since the SMW formulas have existed for over 50 years, these formulas have been used as an efficient tools in exact structural reanalysis involving low-rank modifications. SMW formulas open the development of three important reanalysis methods: *The Virtual Distortion Method*[225], *The Second Theorem of structural Variation* and *The Combined Approximation (CA)*[218, 220]. The first two methods use the strains or forces responses in the modified element of the structure. On the other hand, CA involves the binomial series expansion of the structure response with a reduced basis. In [5] it shows that for one range changes and multiple rank-one changes, the three above method are equivalent. Other methods such as *Initial Deformation Concept*[8], *Parallel Element Techniques*[359], *Modified Inverse Matrix*[37], and so on, belong to exact reanalysis method. In the Initial Deformation Concept, Argyris and Kelsey[8] proposed the initial strain approach in conjunction with the force method of analysis wherein an initial strain corresponding to the flexibility change in the modified element was imposed in the original structure and the modified element forces were computed. Sobieszczanski[359] investigated the parallel element method that involves flexibility matrices wherein an element is connected in parallel to the modified element while the latter maintains its original properties. The parallel element represents the modification and can be connected to the nodes where no element exists in the original structure, making it possible to add the new members to the structure. Recently, a new novel method for exact static reanalysis based on the updated triangular factorization (LDL^T) in sparse matrix solution and the binary tree characteristics of the global stiffness matrix was proposed by Chen Pu et al. [338].

Moreover, approximate reanalysis techniques generates an estimate of the response of the modified structure using the data obtained during the full analysis of the original structure or special information needed to set up the approximate analysis. For approximate methods, the accuracy of the solution and the convergence speed are two important factors which are rarely met at the same time[180]. In this category are found such methods as iteration techniques[43], Taylor series expansion techniques[306], reduced base vectors[138] and so on. Approximate reanalysis methods are more efficient than exact methods and are usually suitable for moderate changes in the structure. In most approximations the quality of the results

and the efficiency of the calculations are conflicting factors that should be considered[220]. That is, better approximations are often achieved at the expense of more computational effort.

According to Barthelemy *et al.* [18] and U. Kirsch[217], approximate reanalysis methods can be divided into the following classes

1. **Global (multi-point) approximations**, such as reduced basis[209] and response surface method[360]. These approximations are obtained by analysing the structure at a number of design points, and they are valid for the whole design space. However, global approximations may require much computational effort, particularly in problems with large number of design variables.
2. **Local (single-point) approximations**, such as the first-order Taylor series expansion or the binomial series expansion. Local approximations are based on information calculated at a single point. These methods are more efficient but they are effective only in cases of small changes in the design variables. To improve the quality of the results, various means have been proposed (see reference [370]).
3. **Combined approximations (CA)** which attempt to give global qualities to local approximations. One approach is to scale the initial stiffness matrix such that the changes in the design variables are reduced. The advantage is, similar to local approximations, the solution is based on results of a single exact analysis. The concept of scaling can be extended to include not only the initial design but also the approximate displacements, thereby allowing improved results. It has been shown that high quality approximations can be achieved by combined approximations for geometrical and topological optimization, as well as evaluation of constraint derivatives[216].

In the same line, the reanalysis can be classified according to the topological modification[220]:

1. Deletion and addition of members where the number of degree of freedoms (DOFs) is unchanged. In such case, the number of analysis equations is also unchanged and only numerical values of the coefficients of the equations are modified. This case is well known as non-topological modification.
2. Deletion and addition of member where the number of DOFs is decreased. If only members are deleted, the values of the corresponding design variable become zero and can be eliminated from the set of variable.
3. Deletion and addition of member where the number of DOFs increased. In this case, it is necessary to augment the analysis model such that the new DOFs are included in the modification model.

The resulting structure according to the topological modification may be result in stable structure, conditionally unstable structure or unstable structures. Thus, an appropriate topological modification should be make carefully.

Such that an static reanalysis, in modal reanalysis, it is modified the structure and resolve the eigenvalue problem repeatedly in order to achieve an optimal design. The modal-reanalysis study the changes of the eigenvalues of the system subjected to some changes. The iterative vibration analysis may be expensive for large and complex structures. Thus, it is necessary to seek a faster computational method for reanalysis. However, the modal reanalysis for topological modifications of structures has not been widely investigated. Some eigenvalue reanalysis methods are proposed in the literature based in the traditional reanalysis method. Most of them belongs to the approximate methods for eigenvalue reanalysis. The well known five method for eigenvalue reanalysis can be listed as follows:

1. Matrix perturbation[86]. Perturbation theory studies the dynamic behaviour changes of a system subjected to small changes in its design variables. The matrix perturbation method is an useful tools for fast eigenvalue reanalysis. This kind of method belongs to the first order perturbation method and can be used to obtain approximation eigenvalues if the changes of the structure is small. For large changes in the design parameters, the accuracy of the approximate may deteriorate[85]. In [82] present a new eigensolution reanalysis method for modified structures based on the usual first-order perturbation scheme and the Rayleigh quotients.
2. Improved matrix perturbation method [44, 348]. The poor approximation of the of the first order perturbation method motived the development of techniques that improves the accuracy of the eigenvalue predictions. To this end, Bickford[44] and Chen[348] suggested some modifications to the original first order approximation formulas in order to increase the accuracy of matrix perturbation. A new efficient method of eigenvalue reanalysis has been developed based on the perturbation method can be found in [190].
3. The Padè approximation method[92, 399]. Padè approximation, which was formulated by Padè in 1892, is a non-linear approximation (in the form of a rational function) for a given function (in the form of a power series) having various interesting properties and applications. Its fast convergence which takes place in many cases makes it possible to use it as a tool for guessing a function if we know only limited number of coefficients of its power expansion. At present, the use of Padè approximation for the solution of mathematical problems in science and technology fields has great potential. Meanwhile, Padè approximation has proved to be very useful in numerical analysis too: the solution of non-linear equation, acceleration of convergence, numerical integration by using non-linear equation and the solution of ordinary and partial differential equations[399]. The Padè approximate is used to restructure a better basis vector, which is used to compute the approximate eigenvalue using the Rayleigh quotient. This method is formed by mixing the Padè approximation and Rayleigh quotient. The first Padè approximation was presented by Cochelin *et al.* [92].
4. The extended Kirsch combined method[216, 219]. Kirsch combined method belongs to the well known hybrid methods. This method have been successfully used as static displacements reanalysis and is was extended for using in eigen-values reanalysis. For solving the approximate eigen-value of the modified structure, this method employs a second-order perturbation terms of eigenvectors as basis vectors. The numerical results show that both the Pade' approximate method, the extended Kirsch combined method can give good approximate eigen-solutions for the large modifications of the structural parameters.

In our study, a new modal reanalysis based in the AMLS method is proposed. AMLS method is suitable approximate method for calculating hundreds and thousands eigen-pairs for huge sparse and dense matrices. Also this method can be applied for calculating an approximation of eigen-pairs when the structure is subjected to some modification. Only those modified sub-structures are recomputed again and those have no modification remains its original properties. The final structure response will be updated according to this modification following the same standard AMLS procedure.

E.2. AMLS Method

E.2.1. Overview

The purpose of this section is summarize the AMLS method for computing eigenvalues and eigenvector in a generalized eigenvalue problem. This method was introduced by Bennighof *et al.* [38, 39, 40, 41, 42], which is an efficient condensation method for computing hundreds and thousands eigen-pairs¹ responses for large and complex structures. The AMLS is one of the most efficient invented numerical methods for solving large eigen-problems and frequency response problems for finite element discretization. AMLS is essentially an automated multi-level version of the classic component mode synthesis CMS method[345] introduced by Hurts (1965) and Craig and Bampton(1968). It can be considered that AMLS method is a Rayleigh-Ritz method that efficiently computes an approximation to the modal subspace-reduced order modeling. In principle, the AMLS was designed for linear symmetric eigen-values problems and has been successfully applied to many engineering problems in recent years including vibro-acoustic analysis in automotive industry[226], ship vibration[235], electromagnetic problems[321] and vibrations of fluid-solid structures[364]. Actually, the computer code developed by Bennighof *et al.* was commercialized as an add-hoc module for NASTRAN and ABAQUS software. Now-days AMLS is employed widely in commercial codes specially in the field of vibration and acoustics of vehicles.

From the mathematical point of view, AMLS method is a projection method where large problem under consideration is projected to a subspace \mathcal{V} spanned by the eigen-modes of a clamped structures on several levels where their eigen-frequencies do not exceed a predetermined cut-off frequency. When higher cut-off frequency is set, more accurate results is obtained. Given the substructures and the ω_{cut} , AMLS build the subspace \mathcal{V} and the projected problem. Translating this concept to finite element method, the finite element model is transformed in a finite number of levelled substructures, such as the response of the total finite element model is represented in terms of sub-structuring modes. This is accomplished by partitioning the model automatically into substructures on a number of levels, basically based on the sparsity pattern of the global stiffness matrix. AMLS assumes that the interior DOFs of the sub-structure depends quasi-statically on the interface DOFs (concept introduced by Irons (1965) and Guyan (1965)) where the inertial forces of the sub-structures are neglected. However, although is required to solve several eigen-systems, this procedure are economical because the sub-level problem are very small, and the eigenvalues are typically well separated, resulting in rapid convergence[39]. Decision must to be made on how the select cut-off frequency ω_{cut} from each sub-structure. Some research select a finite number of eigen-vectors from each substructures[145]. The selection should be made in such way that the dimension of the sub-space spanned the eigen-vector in the sub-structures is small but keeping sufficient amount of spectral information such as the eigen-pairs of the original matrices is retained. The process of choosing appropriate frequency cut-off or eigenvectors from each sub-structure is referred to as mode selection [145] and it selection is completely heuristic. In vibration analysis this choice is motivated by the fact high frequency of the structure do not have a remarkable influence in the wanted eigen-frequencies of the entire sub-structure.

Compared to Krylov subspace type approaches[125], AMLS method reduces the computational resources in terms of computing time and hardware requirements to determine a large number of eigenvalues and eigenvectors. However, AMLS only provides an approximate solutions which are less accurate that one obtained with the Krylov Method. Hence, AMLS is one shot projection method without any iterative improvement.

¹ The eigen-pairs is the set of eigen-values λ_j with its correspond eigen-vector ϕ_j forming the pair $\{\lambda_j, \phi_j\}$

In fact, as Bekas and Saad[29] pointed out that AMLS is first order approximation of the corresponding eigenvalue problem. Nonetheless, the numerical approximations given by AMLS method are often in its limit but sufficient accuracy. In the sense of structural dynamic, they are not satisfactory, because the precision of extracted eigen-vector approximations are not enough for requirements in strain and stress computations[164]. This error's source when AMLS is applied arises from, first, by the finite element discretization (the error in approximating the global eigen-solution associated with the finite element approximation), and second, truncation of the sub-domain eigen-solutions. However, the efficiency of AMLS algorithm arises from the fact that it involves solutions of this small sub-problems and leads to significant dimensional reduction of the final problem. This dimensional reduction cause insignificant loss of accuracy comparable to the discretization error of the FEM itself. In any case, one of the advantages that could be exploited in AMLS is the parallel computation. Many numerical tests indicate that AMLS is capable to solve on a workstation eigen-problems of the size which requires supercomputers[321], making of this method a scalable approach for large problems.

On the other hand, due to the poor approximations on eigen-vector, AMLS requires an enhancement technique to improve the computed eigen-vector. However, this enhancement could be very expensive. In the references [164] and [401] propose an algorithm to improve this misbehaviour based in the Subspace Iteration Method (SIM) introduced by Bathe[19]. Basically, it consist in recalculate the eigen-pairs of the complete system with the approximate solutions computed by the AMLS method.

E.2.2. Multi-Level extension of AMLS Method

The purpose of the AMLS is to solve a large generalized eigenvalue problem for determining a finite approximations of eigen-pairs $\{\lambda_i, \phi_i\}$ given an interval such that it not exceeding a given frequency cut-off value ω_{cut} :

$$\mathbf{K}\Phi = \lambda\mathbf{M}\Phi \quad (\text{E.2.1})$$

Usually, equation (E.2.1) arises from finite element model where $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ are Hermitian, symmetric and positive definite matrices well known as the stiffness matrix and mass matrix. Usually, the reordering of \mathbf{K} is implemented implicitly performing a $\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}$ where the permutation matrix \mathbf{P} can be obtained by applying a matrix ordering algorithm such as the nested dissection algorithm[254]. Moreover, the description of AMLS-method does not make use any information regarding geometry or the physical structure on which the original it is defined, therefore In the following it is not distinguish between $\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}$ and \mathbf{K} and, consequently between $\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P}$ and \mathbf{M} . The eigen-pairs of the equation E.2.1 is written as:

$$\Lambda = \text{Diag}(\lambda_i) \forall i \in \{1, 2, 3...m\} \text{ and } \Phi = \{\phi_1, \phi_2... \phi_m\} \quad (\text{E.2.2})$$

where the matrix Λ and Φ are the appropriate matrices arrangements for eigen-pairs, Λ is usually called spectral matrix and Φ is the modal matrix. Observe that they correspond to the m -th found eigenvalues and eigenvectors. Although several algorithms exist for the direct solution of the generalized eigenvalue problem, the objective is to solve the equation (E.2.1) using AMLS method. Such as the component mode synthesis (CMS)[345], AMLS method partitioning the structure into small number of substructures based in the sparsity pattern of the system matrix \mathbf{K} , in which, these substructures are recursively partitioned into a number of finite levels yielding a tree topology of the substructure. For understanding this concept, figure E.1 depicts a generic body Ω , which is divided in four sub-bodies (the substructures \mathcal{S}) $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ and Ω_4 such that

$\Omega = \bigcup \Omega_i$. Note that the division process generates a new interfaces contours $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ which is shared with two or more substructures. Physically, these new interfaces represent the cutting plane of structure division. Taking into account that the generic model draw in figure E.1 is numerically discretized in finite elements, thus, the substructures are formed by those finite elements that spatially belong to the substructures. However, it is understood that they are essentially a stiffness sub-matrix $K_{ij} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ of the global assembled stiffness matrix K , i.e, $K_{ij} \in K$ and $n_s \ll n$. Idem for the mass substructures matrices. Hence, a required effort is necessary to carry out the partition processes. Usually, this division pattern is obtained applying an ad-hoc graph partitioner library such as CHACO[78], METIS[254] or SCOTCH[343] which provides the tools for performing these partitions. These libraries have been used to construct fill-reducing orderings of the sparse matrices for efficient factorization but have shown to be a beneficial basis of sub-structuring method identifying the “separator tree”, a hierarchical graph in which each node (or sub-structure) is mapped.

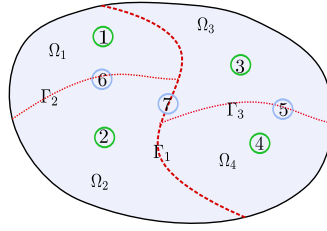


Figura E.1: Domain Ω partitioned into four sub-domains $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ and Ω_4 and interfaces Γ_1, Γ_2 and Γ_3 .

For a brief reviewing of the AMLS method, consider only a binary partition with two levels of substructures as is depicted in figure E.2. Of course, all derived formulas and notations can be generalized to non-binary partition with more levels of substructures. However, the basic concepts can be understood with this simple perfect equilibrated tree example. According to the figure E.1, the global stiffness matrix K and global mass matrix M , after reordering can be sketched respectively as:

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{16} & K_{17} \\ & K_{22} & 0 & 0 & 0 & K_{26} & K_{27} \\ & & K_{33} & 0 & K_{35} & 0 & K_{37} \\ & & & K_{44} & K_{45} & 0 & K_{47} \\ & & & & K_{55} & 0 & K_{57} \\ S & Y & M & & & K_{66} & K_{67} \\ & & & & & & K_{77} \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.3})$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{16} & M_{17} \\ & M_{22} & 0 & 0 & 0 & M_{26} & M_{27} \\ & & M_{33} & 0 & M_{35} & 0 & M_{37} \\ & & & M_{44} & M_{45} & 0 & M_{47} \\ & & & & M_{55} & 0 & M_{57} \\ S & Y & M & & & M_{66} & M_{67} \\ & & & & & & M_{77} \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.4})$$

where the sub-matrices blocks K_{ij} and M_{ij} represent the stiffness and mass blocks matrices of the substructure, respectively. It is stress the fact that sub-structuring does not necessarily means that it is obtained by domain

decomposition of the real structure, but is understood in a purely algebraic sense. On the other hand, note that the mass matrix follow exactly the stiffness matrix pattern and is known as the *consistent mass matrix*. However, in most engineering problems the mass matrix is usually transformed into a lumped mass matrix, i.e, the mass matrix is a diagonal matrix. From computational point of view, the lumped mass matrix is really convenient without sacrificing the accuracy of the structure response.

Observing carefully the structure pattern of those matrices, note that it defines implicitly a *partition tree* structure. The partition tree is an important glue for management of substructures[401]. According to the computer's terminology, a tree is a data structure that simulates a hierarchical tree structure, with a root value and sub-trees of children, represented as a set of linked nodes. In other words, the tree data structure is a non-linear structure that consists of a set of nodes and a set of branches. The corresponding data tree structure for the stiffness matrix pattern defined in equation (E.2.3) is depicted in figure E.2, where each circle levelled by a number $s \in \{1, 2, 3 \dots 7\}$ is a tree node that corresponds to the substructure (K_{ss}, M_{ss}) . The set of all tree nodes on level L is denote by $\mathcal{S}_{L=i} \forall i \in s$, which, for this particular case, $\mathcal{S}_{L=2} = \{1, 2, 3, 4, \}$, $\mathcal{S}_{L=1} = \{5, 6\}$ and $\mathcal{S}_{L=0} = \{7\}$. Each tree node s in the tree has zero or more *children trees*, which are below it in the tree and their set are denoted by $\mathcal{C}(s)$. A tree node s that has at least one child j is called the *child's parents* or *internal node*, which is denoted by $s = \mathcal{P}(j)$. In instance, $1 = \mathcal{P}(6)$ and $1 \in \mathcal{C}(7)$. Tree node 7 is the parent of the tree node 1's parents, so 7 is called *ancestor* of 1, denoted by $7 \in \mathcal{A}(1)$. $\mathcal{P}(s)$ is the ancestor of no tree node s , i.e, $\mathcal{P}(s) \in \mathcal{A}(s)$. Finally, the tree node that no have any ancestor and it is at top node in a tree is called *root node*, denoted by $s = \mathcal{R}$, while those nodes that not have any children are called *leaf nodes* $\mathcal{L}(s)$ of the tree. So, for the data structure down in E.2, the root node is $7 = \mathcal{R}$ and , and the set of leaf nodes are $\mathcal{L}(1, 2, 3, 4)$, which for this case belongs to $\mathcal{S}_{L=2}$.

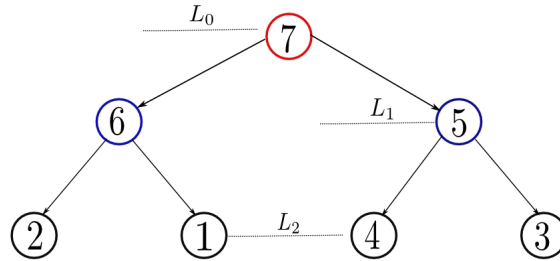


Figura E.2: Data tree structure for the stiffness matrix defined in equation (E.2.3) with three partition level L_0 , L_1 and L_2 .

Thus, according to the partition of the figure E.1, it is identify the substructures as appropriate subsets of DOFs associated with geometrical entities created in the subdivision process:

1. $\Omega_s \forall s \in \mathcal{S}_{L=N}$ and $N = 2$ define the substructures at level $L = 2$, in this case the bottom level, that is Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 and Ω_4 (the leaf nodes).
2. $\Gamma_s \forall s \in \mathcal{S}_{L=K}$ and $K = N - i \forall i \in 1, 2, 3 \dots l - 1$ define the substructures at level $L - i$ (the interior nodes), in this case the inter-medial levels. In instance, observe we have only Γ_5 and Γ_6 only.
3. Γ_{top} define the substructure partition at level $L = 0$, the top level Γ_7 and also the root node.

The previous ideas allows us to extend the substructure's concept to super substructure. Hence, a

super-substructure $\mathcal{B}(s)$ where $\mathcal{S} \in \mathcal{B}(s)$ will define as a set of nodes and consequently a set of smaller substructures that form a data tree completely independent each other. For example, it is observe in figure E.2 al level $S_{L=1}$ defines two more substructures $\mathcal{B}(6) = \{1, 2, 6\}$ and $\mathcal{B}(5) = \{3, 4, 5\}$, totally decoupled each other. The way to connect each other is through the roots node $s = 7$. In the next section, this concept it will recover again for applying in reanalysis method. A typical computation substructure for a generic large sparse matrix is depicted in figure E.3. Depending of the graph partitioner libraries, a different tree partition is obtained. Observe that in most cases binary tree partition is preferred on those algorithm.

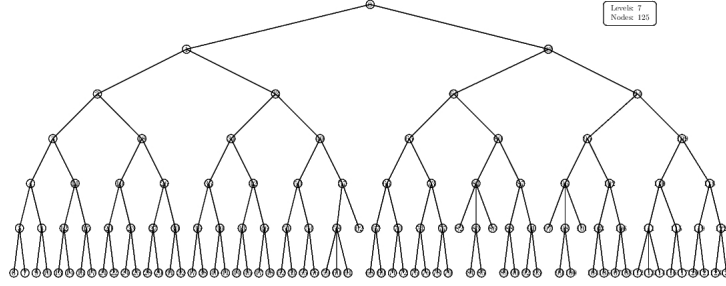


Figura E.3: Generic data tree structure for a large sparse matrix formed by 7 level and 125 nodes

One of the most important operations in a tree hierarchical structure is the process of moving through their tree nodes, operation well knows as *traverse tree*. There are several algorithms for moving through a data tree, which is a repeated and recursive procedure in these algorithms. This process involves systematically examining the nodes of a tree, so that each node is visited only once. Basically, three ways to traverse a tree is employed : *pre-order*, *in-order* and *post-order*. Our AMLS follows the sequence of pre-order transversal, i.e, visiting first the tree node s before its children $\mathcal{C}(s)$. In instance, the pre-order procedure in figure E.2 follows the sequential $\{7, 6, 2, 1, 5, 4, 3\}$, while the in-order traveling follows $\{2, 6, 1, 7, 4, 3, 5\}$ and finally, the post-order rules is $\{2, 1, 6, 4, 3, 5, 7\}$.

E.2.3. The block Gauss elimination procedure

After the partitioning process has finished, AMLS based on the stiffness matrix substructure pattern transforms the stiffness matrix \mathbf{K} to diagonal block $\tilde{\mathbf{K}}$ and the mass \mathbf{M} into a *modified mass matrix* $\tilde{\mathbf{M}}$ which preserves the original stiffness matrix structure by a Gauss elimination with more fill-in than the stiffness matrix. The diagonal block $\tilde{\mathbf{K}}_{ii}$ is called Schur complement and the pencil $\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{M}}$ is often known as the Craig-Bampton form in structural engineering. Recall again the eigen-equation (E.2.1), the Gauss elimination reads:

$$\tilde{\mathbf{K}}\Phi = \lambda\tilde{\mathbf{M}}\Phi \quad (\text{E.2.5})$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \text{Diag} \left(K_{11}, K_{22}, K_{33}, K_{44}, \tilde{\mathbf{K}}_{55}, \tilde{\mathbf{K}}_{66}, \tilde{\mathbf{K}}_{77} \right) \quad (\text{E.2.6})$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} \quad (\text{E.2.7})$$

where $\tilde{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is the Gauss elimination transformed matrix realized in \mathbf{K} and \mathbf{M} respectively, and $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a non singular block (upper) triangular matrix, is the congruence transformation matrix. According to the Gauss elimination procedure in equation (E.2.7), the $\tilde{\mathbf{M}}$ is written like:

$$\check{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \check{M}_{16} & \check{M}_{17} \\ & M_{22} & 0 & 0 & 0 & \check{M}_{26} & \check{M}_{27} \\ & & M_{33} & 0 & \check{M}_{35} & 0 & \check{M}_{37} \\ & & & M_{44} & \check{M}_{45} & 0 & \check{M}_{47} \\ & & & & \check{M}_{55} & 0 & \check{M}_{57} \\ S & Y & M & & & \check{M}_{66} & \check{M}_{67} \\ & & & & & & \check{M}_{77} \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.8})$$

Note that only the substructure corresponding to the leaf nodes remain unchangeable. We remark that the multiplication matrices in equations (E.2.6) and (E.2.7) is done in a block level, which gives us the advantage of handling those substructures that require a specific matrix operation. In our implementation, the block Gaussian elimination procedure is performed on substructures with the sequence of post-order transversal of the corresponding AMLS partition tree. The block Gaussian elimination produces, in instance, for the sub-structure $\mathcal{S} = 1$ a factor $U_{s=1}$ in the form of:

$$U_{s=1} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{16} & \Psi_{17} \\ & I_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & I_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & I_{44} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & I_{55} & 0 & 0 \\ & & & & & I_{66} & 0 \\ & & & & & & I_{77} \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.9})$$

where the $I_{ss} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ is the identify matrix and n_s is the corresponding size of the block. So, the complete factor U will be the product of a sequence of all $U_s \forall \mathcal{S}_L$:

$$U = \prod_{s=1}^n U_s = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11}^{-1}K_{16} & K_{11}^{-1}K_{17} \\ & I_{22} & 0 & 0 & 0 & K_{22}^{-1}K_{26} & K_{22}^{-1}K_{27} \\ & & I_{33} & 0 & K_{33}^{-1}K_{35} & 0 & K_{33}^{-1}K_{37} \\ & & & I_{44} & K_{44}^{-1}K_{45} & 0 & K_{44}^{-1}K_{47} \\ & & & & I_{55} & 0 & K_{55}^{-1}K_{57} \\ & & & & & I_{66} & K_{66}^{-1}K_{67} \\ Z & E & R & O & S & & I_{77} \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.10})$$

The non-diagonal blocks of U_s , that is, $\Psi_{sj} = K_{ss}^{-1}K_{sj}$ is well known as *constraint modes*[244] or *harmonic extensions* in[335]. This constraint modes corresponds to the interior boundaries conditions Γ_j in Ω in E.1, usually considered as a fixed boundaries condition which is held at a fixed position in space. Note that the congruence transformation done with U_s corresponds to changing the basis functions by replacing the FE interpolation functions associated with nodes s by their harmonic extensions. As a result, it is obtain a block diagonal form of the stiffness matrix, i.e. uncoupling of substructures's DOFs as it is reflected in equation (E.2.6). The eigen-vector associated with K_{ii} , M_{ii} is referred as *sub-structures modes* and those associated with \check{K}_{ii} , \check{M}_{ii} is referred as *coupling modes*.

Using a superscript d to denote the elimination on substructures $\{1, 2, 3 \dots d\}$ has been completed and letting

$$(\check{K}_{ij}^{[0]}, \check{M}_{ij}^{[0]}) = (K_{ij}, M_{ij}) \quad (\text{E.2.11})$$

then the sub-matrices of products $U^T K U$, $U^T M U$ and the expression of Ψ_{sj} , the AMLS perform the following[401]:

1. If s is a leaf, i.e, $s \in \mathcal{S}_{L=2}$, $\forall i, j \in \mathcal{A}(s)$ then

$$\Psi_{si} = -K_{ss}^{-1} K_{si} \quad (\text{E.2.12a})$$

$$\check{K}_{si}^{[d]} = 0 \quad (\text{E.2.12b})$$

$$\check{M}_{si}^{[d]} = M_{si} + M_{ss} \Psi_{si} \quad (\text{E.2.12c})$$

$$\check{K}_{ij}^{[d]} = \check{K}_{ij}^{[d-1]} + \Psi_{si}^T K_{sj} \quad (\text{E.2.12d})$$

$$\check{M}_{ij}^{[d]} = \check{M}_{ij}^{[d-1]} + \Psi_{si}^T M_{sj} + M_{si}^T \Psi_{sj} + \Psi_{si}^T M_{ss} \Psi_{sj} \quad (\text{E.2.12e})$$

2. If s is not a leaf, i.e, $s \in \mathcal{S}_{L=1}$, $\forall i, j \in \mathcal{A}(s)$ then

$$\Psi_{si} = (-K_{ss}^{[d-1]})^{-1} K_{si}^{[d-1]} \quad (\text{E.2.13a})$$

$$\check{K}_{si}^{[d]} = 0 \quad (\text{E.2.13b})$$

$$\check{M}_{si}^{[d]} = \check{M}_{si} + \check{M}_{ss}^{[d-1]} \Psi_{si} \quad (\text{E.2.13c})$$

$$\check{K}_{ij}^{[d]} = \check{K}_{ij}^{[d-1]} + \Psi_{si}^T \check{K}_{sj}^{[d-1]} \quad (\text{E.2.13d})$$

$$\check{M}_{ij}^{[d]} = \check{M}_{ij}^{[d-1]} + \Psi_{si}^T \check{M}_{sj}^{[d-1]} + (\check{M}_{si}^{[d-1]})^T \Psi_{sj} + \Psi_{si}^T \check{M}_{ss}^{[d-1]} \Psi_{sj} \quad (\text{E.2.13e})$$

See that, basically for performing the static condensation of DOFs of the bottom level (the leaf nodes) and internal nodes, the procedure consists in the change of basis, replacing the shape functions associated with nodes of the $L-1$, $L-2$ th-level substructures Ω_s by their harmonic extensions to the L th-level substructure Ω_i . The key is that the procedure can be recursively repeated for levels $L-2, L-1, 1$ until all DOFs are statically condensed to *dofs* of the top substructure level ($L = 0$). Obviously, the transformed $(\check{K}_{ss}, \check{M}_{ss})$ $s \in \mathcal{S}_{L=1,0}$ in equations (E.2.6) and (E.3.13) is explicit determined when the eliminations of substructures $(1, 2, \dots, d-1)$ have been carried out:

$$(\check{K}_{ss}, \check{M}_{ss}) = (\check{K}_{ss}^{[d-1]}, \check{M}_{ss}^{[d-1]}) \quad \forall s \in \mathcal{S}_{L=1,0} \quad (\text{E.2.14})$$

E.2.4. Substructures condensation and modal approximation

As a starting point, we take the stiffness matrix \check{K} and the mass matrix \check{M} obtained via the congruence transformation by equation (E.2.6). Thus, after performing static condensation of substructures (which can be viewed as recursive changes of bases), it can solve the eigen-problems defined now for blocks of the stiffness and mass matrices in the all substructures levels:

$$\check{K}_{ss} \Phi_s = \Lambda_s \check{M}_{ss} \Phi_s \quad \forall s \in \mathcal{S} \quad (\text{E.2.15})$$

or more specially for the example that we are using:

$$K_{ss} \Phi_s = \Lambda_s M_{ss} \Phi_s \quad \forall s \in \mathcal{S}_{L=2} \quad (\text{E.2.16})$$

$$\check{K}_{ss} \Phi_s = \Lambda_s \check{M}_{ss} \Phi_s \quad \forall s \in \mathcal{S}_{L=1,0} \quad (\text{E.2.17})$$

where $\Phi_s = \{\phi_{s1}, \phi_{s2}, \phi_{s3} \dots \phi_{sm}\}$ is a matrix whose columns contain all eigen-vectors and $\Lambda_s = \{\lambda_{s1}, \lambda_{s2} \dots \lambda_{sm}\}$ is a diagonal matrix filled with its corresponding eigenvalues of the substructure s . The eigenvectors associated with (K_{ss}, M_{ss}) will be referred to as the *sub-structure modes*, and those associated with $(\check{K}_{ss}, \check{M}_{ss})$ will be referred to as the *coupling modes*. Therefore, we can collect the eigenvalues and eigenvectors into a diagonal matrix Υ and Θ respectively as:

$$\Upsilon = \text{Diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5, \Lambda_6, \Lambda_7) \quad (\text{E.2.18})$$

$$\Theta = \text{Diag}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6, \Phi_7) \quad (\text{E.2.19})$$

In equation (E.2.18) it not required to found all eigen-pairs, due to the main goal of the AMLS is project the \check{K} and \check{M} onto a reduced subspace. Thus we can truncate the sets of eigenvectors extracting n_{m_s} eigen-solutions where $n_{m_s} \ll n_s$ of each substructure. Bennighof and Lehoucq in [42] and Kaplan in [244] suggest to choose truncation parameters n_{m_s} based on a prescribed *cut-off frequency* ω_{cut} . The idea behind this transformation is a possibility to truncate the eigen-spaces to the dimensions essentially smaller than the original sizes n_s of substructures s which leads to the approximation of the global eigen-problem whose dimension becomes reduced. The truncation is based on the intention of including eigenfunctions within the prescribed range given by the cut-off frequency ω_{cut} [321]. In other words, the number of eigen-pairs will be computed is less than a given cut-off frequency ω_{cut} (or cut-off eigenvalue λ_{cut}):

$$\lambda_{s,i} < \omega_{cut}^2 \equiv \lambda_{cut} \quad \forall i \in 1, \dots, n_{m_s} \quad (\text{E.2.20})$$

Observe now that $\Phi_s = (\phi_{s1}, \phi_{s2} \dots \phi_{sm}) \in \mathbb{R}^{n_s \times n_{m_s}}$, $\Lambda_s \in \mathbb{R}^{n_{m_s} \times n_{m_s}}$, $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n_m}$ and $\Upsilon \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$. Projecting the matrix pencil (\check{K}, \check{M}) onto the space spanned by Θ , i.e., $\text{span}\{\Theta\}$, we get:

$$\mathcal{K} = Z^T \check{K} Z \quad (\text{E.2.21})$$

$$\mathcal{M} = Z^T \check{M} Z \quad (\text{E.2.22})$$

where the final reduced matrices $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$ and $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$ in the reduced subspace take the form:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \Lambda_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \Lambda_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \Lambda_{44} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \Lambda_{55} & 0 & 0 \\ S & Y & M & & & \Lambda_{66} & 0 \\ & & & & & & \Lambda_{77} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{16} & m_{17} \\ & I_{22} & 0 & 0 & 0 & m_{26} & m_{27} \\ & & I_{33} & 0 & m_{35} & 0 & m_{37} \\ & & & I_{44} & m_{45} & 0 & m_{47} \\ & & & & I_{55} & 0 & m_{57} \\ S & Y & M & & & I_{66} & m_{67} \\ & & & & & & I_{77} \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.23})$$

in which $m_{js} = Z_j^T \check{M}_{js} Z_j$ and $m_{js} = m_{sj}^T$. Note too that the final dimension of the reduced matrices are $n_m = \sum n_{m_s}$ and $n_m \ll n$. Observe that, the static condensation leads to block diagonalization of the stiffness matrix while the mass matrix preserves its structure, thus, modal approximation results in diagonalization of the stiffness matrix.

From the computational point of view, it is convenient to interleave the operations of static condensation and solving eigen-problems on substructures of just eliminated DOFs instead of introducing eigen-modes after full completion of recursive static condensation. Both such versions of the algorithm are algebraically equivalent. In our implementation, we perform sequences of block Gauss-eliminations and solving eigen-problems for substructures of the current level at the same time, i.e, the block Gauss elimination procedure and this condensation operations are performed in an interleaving way: as soon as a sub-matrix (K_{ss}, M_{ss}) or $(\check{K}_{ss}, \check{M}_{ss})$ has been formed, the eigen solution of (Λ_s, Z_s) and the calculation of m_{ij} will be started immediately.

Moreover, an intermediate matrix \check{u}_{js} is used to obtain m_{sj} :

1. In case that s is a leaf node, thus

$$\check{u}_{si}^{[d]} = Z_s^T \left(M_{si}^{[d-1]} + M_{ss}^{[d-1]} \Psi_{si} \right) \quad \forall i \in \mathcal{A}(s) \quad (\text{E.2.24})$$

2. Otherwise, if s is not a leaf node compute

$$\check{u}_{si}^{[d]} = Z_s^T \left(\check{M}_{si}^{[d-1]} + \check{M}_{ss}^{[d-1]} \Psi_{si} \right) \quad \forall i \in \mathcal{A}(s) \quad (\text{E.2.25a})$$

$$m_{sj} = \check{u}_{js}^{[d-1]} Z_s \quad \forall j \in \mathcal{C}(s) \quad (\text{E.2.25b})$$

$$\check{u}_{ij}^{[d]} = \check{u}_{js}^{[d-1]} \Psi_{si} + \check{u}_{ji}^{s-1} \quad \forall j \in \mathcal{C}(s), \forall i \in \mathcal{A}(s) \quad (\text{E.2.25c})$$

Comparing (E.2.25a) and (E.2.25c) with (E.2.12c), we find that updating of \check{M}_{si} is in fact implicitly performed in the form $\check{u}_{si} = Z_s^T \check{M}_{si}$, instead of \check{M}_{si} . The reason for this is that \check{M}_{si} is only used to compute $m_{si} = Z_s^T \check{M}_{si} Z_i$ in the standard AMLS approach and apparently, since $n_{ms} \ll n_m$, the computational cost and storage of $\check{u}_{si} \in \mathbb{R}^{n_{ms} \times n_i}$ is less than $\check{M}_{si} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_i}$.

E.2.4.1. Final condensed eigen-problem

After the partitions, block Gauss eliminations and the condensation operations has been performed traveling through the substructures, finally arrive at the reduced eigenvalue problem:

$$\mathcal{K} \mathcal{X}_c = \Lambda_c \mathcal{M} \mathcal{X}_c \quad (\text{E.2.26})$$

where the \mathcal{K} and \mathcal{M} represent the spanned transformed stiffness and mass matrices, $\mathcal{X}_c \in \mathbb{R}^{n_m \times n_{ev}}$ is the matrix of eigen-vectors and n_{ev} is the number of eigen-vectors retained. Now, observe that the eigen-solution $\{\Lambda_c, \mathcal{X}_c\}$ approximates the eigen-solution of the finite element model $\{\Lambda, \Phi\}$. Thus, for recovering the AMLS approximation of eigen-vectors it is compute:

$$\Phi = U \mathcal{Z} \mathcal{X}_c \quad (\text{E.2.27})$$

As is mentioned before, the accuracy AMLS depend on the frequency cut-off ω_{cut} used in truncation the substructure eigen-vectors. Note also, after the transformation to the AMLS subspace, the stiffness matrix \mathcal{K} is a diagonal matrix, with substructure eigen-values on the diagonal. The mass matrix \mathcal{M} is quite populated with the block identity matrices on the diagonal and small dense block in the diagonal.

According to Kaplan[244], because \mathcal{K} is diagonal, Lanczos method would be a great advantage for solving equation (E.2.26) due to its excellent convergence properties. However, some of the properties of

this problem argue the use of Lanczos method. In fact, the use of Lanczos algorithms would be problematic because small block-sizes is used. In any case, selecting of eigen-solver will depend strongly to the analyst's experience.

A complete details of AMLS algorithm is presented in table ??

Algorithm E.1: *Algebraic Multi-Level Sub-Structuring AMLS-Method*

Result: Eigen-Pairs approximations Λ, Φ .

1. Reorder and partition of K and M .
 2. Apply the congruence transformation $\check{K} = U^T K U$ and $\check{M} = U^T M U$.
 3. Compute the subset of eigen-pairs for blocks matrices (K_{ss}, M_{ss}) and $(\check{K}_{ss}, \check{M}_{ss})$.
 4. Project the matrix pencil (\check{K}, \check{M}) onto the sub-space spanned by Θ .
 5. Resolve the reduced eigen value problem and compute the n_{ev} eigen-pairs.
-

E.3. Modal reanalysis with AMLS method

E.3.0.2. Problem statement. Modification and propagation

In finite element analysis, the natural vibration of original structures leads to a general algebraic eigen-problem given by equation (E.2.1). However, in some special cases, those structures as well their computational models need to be repeatedly and successively modified in order to archived an optimal design making this procedure an iterative process. This iterative analysis may be expensive and time consuming especially for large and complex structures. Thus, it is necessary to seek a faster computational method for reanalysis instead of solving the eigen-problem directly for modified structure again.

Consider as an example the truss structure sketch in E.4. At the moment, only local modification without any addition or reduction of DOFs is considered, i.e, suppose that in the initial stiffness and mass matrix it is performed a change where some member are deleted or added such that the number of DOFs remain unchanged. To define the modified structure, we introduce the variation matrices ΔK and ΔM , such as we can write

$$K^m = K + \Delta K \quad (E.3.1)$$

$$M^m = M + \Delta M \quad (E.3.2)$$

where all matrices are $n \times n$ and the superscript m means modified. Suppose too, we solved the eigen-equation (E.2.1) before we introduce the modifications. Our reanalysis problem consist to determine the modified eigen-pairs (λ_i^m, Φ_i^m) using the data information available, i.e, (λ_i, Φ_i) couples and matrices ΔK and ΔM . Observe that it is no need reassemble the whole stiffness matrix and mass matrix of the modified structure, it need only assemble the changes of stiffness matrix and mass matrix for the added/deleted new members in

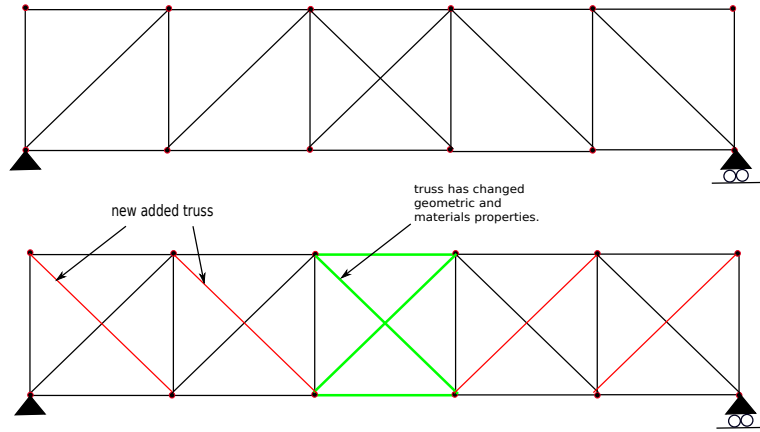


Figura E.4: Local modification in a truss bridge without increasing a decreasing the number of dofs.

the corresponding global DOFs. According to this modification, the equation (E.2.1) is rewriting now as:

$$\mathbf{K}^m \Phi^m = \lambda^m \mathbf{M}^m \Phi^m \quad (\text{E.3.3})$$

$$(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) \Phi^m = \lambda^m (\mathbf{M} + \Delta \mathbf{M}) \Phi^m \quad (\text{E.3.4})$$

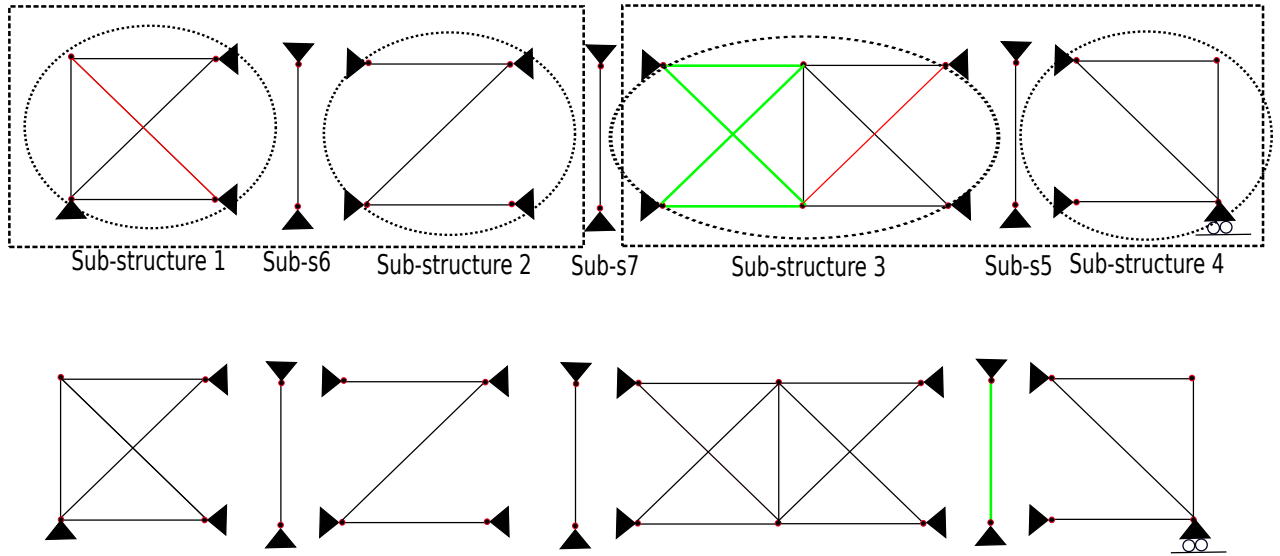


Figura E.5: Sub-structures local modification.

The exact results can be obtained solving again the eigen-problem. However, using the results from the initial analysis and the reanalysis methods, the approximate solutions can be obtained without resolving equation (E.3.4). The key question is how to calculate the new modified eigen-pairs without repeating all the processes done by AMLS analysis. Observing carefully the tree partition of figure E.2, suppose that the actual changes produced by $\Delta \mathbf{K}$ and $\Delta \mathbf{M}$ affect the substructure 1. Taking the ideas from [338], where they studied how the variation of entries of this stiffness matrix \mathbf{K} will affect the factor \mathbf{L} and \mathbf{D} produced by the modification matrix $\Delta \mathbf{K}$, we can proceed by performing a Cholesky factorization:

$$\mathbf{K}^m = (\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T \quad (\text{E.3.5})$$

where \mathbf{L}^T is triangular upper matrix factorization and \mathbf{D} is a diagonal matrix given by:

$$\mathbf{L}^T = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{L_{16}} & \boxed{L_{17}} \\ & I_{22} & 0 & 0 & 0 & L_{26} & L_{27} \\ & & I_{33} & 0 & L_{35} & 0 & L_{37} \\ & & & I_{44} & L_{45} & 0 & L_{47} \\ & & & & I_{55} & 0 & L_{57} \\ & & & & & I_{66} & \boxed{L_{67}} \\ & & & & & & I_{77} \end{pmatrix} \quad (\text{E.3.6})$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \boxed{D_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{55} & 0 & 0 \\ S & Y & M & & & \boxed{D_{66}} & 0 \\ & & & & & & \boxed{D_{77}} \end{pmatrix} \quad (\text{E.3.7})$$

This allow us to write the equation (E.3.4) as:

$$(\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T - \lambda^m \mathbf{M}^m) \Phi^m = 0 \quad (\text{E.3.8})$$

According to the Rule 1 in the reference [338] which is cited as follows: “In the \mathbf{LDL}^T factorization, the modification of a row in the stiffness matrix \mathbf{K}^m directly affects values of this row in the factorization results in \mathbf{L} and \mathbf{D} , an then affects rows corresponding columns where non-zero entries of this row are”. Consider that the modification affect the first row block. This modification affect the block column 6 and 7. Consequently, this effect will propagate in the row 6 and 7. The affected blocks can be seen in those boxed blocks term in equations E.3.6 and E.3.7. Observe that the change of one row is able to affect only part of the matrix, whereas the remain blocks remains unchanged. A natural consequence of the Rule 1 is a Rule 2[338] and is the key for understand our proposed modal reanalysis: “In the triangular factorization, the modification of some blocks in the stiffness matrix only affect factorization of corresponding sub-graph and each boundaries backtracking the root of partition tree, whereas the rest of factorization remain unchanged.”. In other words, the propagation will be affected a predetermined path in the tree sub-structure from the leaf node to the roots nodes.

Let define a congruence transformation applied in the matrix pencil $(\mathbf{K}^m, \mathbf{M}^m)$ using the Cholesky factorization:

$$\check{\mathbf{K}}^m = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K}^m \mathbf{L}^{-T} = \mathbf{D} \quad (\text{E.3.9})$$

$$\check{\mathbf{M}}^m = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{M}^m \mathbf{L}^{-T} \quad (\text{E.3.10})$$

$$(\text{E.3.11})$$

Thus, the eigen-problem in equation E.3.8 can be written as:

$$(\mathbf{D} - \lambda^m \mathbf{L}^{-1} \mathbf{M}^m \mathbf{L}^{-T}) \Phi^m = 0 \quad (\text{E.3.12})$$

As i can see, it is possible to know exactly those modified blocks in \mathbf{L} and \mathbf{D} and update them according to the modifications done by ΔK . However the complexity of this form is magnified by the fact that the congruence transformation $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{M}^m \mathbf{L}^{-T}$ involves more matrix operations than a block Gaussian elimination explain before. If fact, this is compute explicitly, the memory usage would become excessive because $\check{\mathbf{M}}^m$ is likely to contain a significant number of non-zeros fills in each off-diagonal matrix block. In our AMLS-reanalysis implementation we do not perform this matrices product and also we do not calculate the matrices factorization, but it will be used to show algebraically the modification and propagation when it is required to solve the modified eigen-value problem. For instance, if we consider again that the first row block is modified, the triple matrix product $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{M}^m \mathbf{L}^{-T}$ will show all modified blocks in the congruence mass matrix $\check{\mathbf{M}}^m$. In fact, it can be proved that the modified blocks in $\check{\mathbf{M}}^m$ will follow the Rule 2, i.e,

$$\check{\mathbf{M}}^m = \begin{pmatrix} \boxed{\check{M}_{11}^m} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\check{M}_{16}^m} & \boxed{\check{M}_{17}^m} \\ & \check{M}_{22}^m & 0 & 0 & 0 & \check{M}_{26}^m & \check{M}_{27}^m \\ & & \check{M}_{33}^m & 0 & \check{M}_{35}^m & 0 & \check{M}_{37}^m \\ & & & \check{M}_{44}^m & \check{M}_{45}^m & 0 & \check{M}_{47}^m \\ & & & & \check{M}_{55}^m & 0 & \check{M}_{57}^m \\ S & Y & M & & & \boxed{\check{M}_{66}^m} & \boxed{\check{M}_{67}^m} \\ & & & & & & \boxed{\check{M}_{77}^m} \end{pmatrix} \quad (\text{E.3.13})$$

Note that the modification only affect some blocks terms following a predetermined path from the modified node 1 backtracking to the root partition tree 6 and 7. Observe here that a implicit factorization of the constrain modes are done. It is only required to recompute the modified eigen-pairs on those modified blocks $(D_{ii} - \lambda_i \check{M}_{ii}^m) \phi_i = 0$ and then solving the reduce eigen-value problem constructing the spanned subspace $\mathbf{S} = \text{diag}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$ such that:

$$(\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} - \lambda^m \mathbf{S}^T \check{\mathbf{M}}^m \mathbf{S}) \Phi^m = 0 \quad (\text{E.3.14})$$

Let now explain the same concept using the Gaussian elimination. The procedure is analogous to the previous above explained but could be understood easier using a different point of view. Let call \mathcal{MS} the set of modified nodes of the substructures. Assume again that $\mathcal{MS} = \{1\}$. Observe that there is no connection between the substructure $\mathcal{S} = 1$ and the substructure $\mathcal{S} = 2$ and similarly no connection exist between the substructure $\mathcal{S} = 1$ and the super-substructure $\mathcal{B}(5)$. The only connection available with substructure $\mathcal{S} = 2$ is its parent and its ancestor, namely internal nodes $\{6, 7\}$. Thus, the modification in the node 1 does not affects the nodes $\{2, 3, 4, 5\}$ and consequently no affect any factorization or calculation made in those nodes. That's means, nodes $\{2, 3, 4, 5\}$ remain unchanged. That allow us to define our first corollary:

Corollary 1. Any modification in a leaf node do not affect the remains leaves nodes.

This corollary can be algebraically demonstrated as follows. Consider the hierarchical tree structure of figure E.2 and assume that subs-structure node 1 is modified. The factor $\mathbf{U}_{s=1}$ defined in equation (E.2.9)

which contains the constraints modes, is modified. Then, the product $U = \prod_{s=1}^n U_s$ will be affected only in the block terms corresponding to the matrix entrance (1, 6), (1, 7). Thus, the congruence transformation matrix given by $U^T M U$ and $U^T K U$ will affect only the matrix blocks entrance (1, 6), (1, 7), (6, 6), (6, 7), (7, 7). As the matrix K and M is symmetrical, the corresponding matrix blocks transpose is modify as well. Note that any remain leaves nodes {2, 3, 4} are affected by this transformation. Note that it is not necessary to recompute the eigen problem and constraint modes on those sub-structures again, i.e, it is not required to repeat the calculation process given by equations (E.2.12a)-(E.2.12e) All data can be stored and re-use for the next computations.

However, although internal nodes {6, 7} is not modified at all, they will change because exist a link with node 1. On the other hand, due to the recursive and updated matrices operation in equations (E.2.13a)-(E.2.13e), nodes {6, 7} change. This effect, in which one node itself no change in the modification but change because the matrices operations performed due to changes in theirs children nodes it is called *propagation*. For understand this concept, let consider a four level tree sub-structure partition shown in figure E.6. According to the corollary 1, if leaf node 3 is modified, then all remains leaves nodes {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14} do not change. As it can see, the propagation occurs according to the Rule 2[338], this allows to define our second corollary:

Corollary 2. Any modification on a leaf node only affect its parents and the ancestors nodes.

This corollary is a consequence of first one. Observe from figure E.2 that the entrance (6, 6) and (7, 7) in U is modified due to the change of constraints modes. Similarly, the entrance (1, 6), (1, 7), 6, 7 and its corresponding transpose are modified.

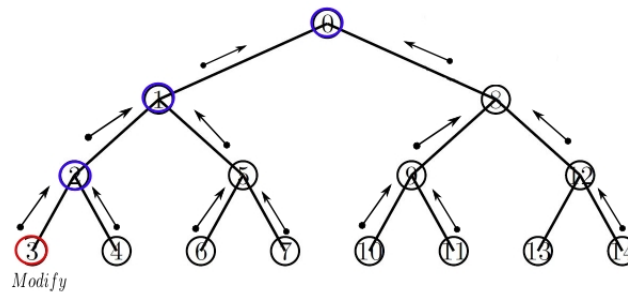


Figura E.6: Modification and propagation when node 3, in a 4 level tree partition, is modified.

On the other hand, suppose that an internal node is modified. It is allow us to understand the orientation an sense of the propagation:

Corollary 3. Any modification on one or more internal nodes affect only its parents and the ancestors nodes. Propagation path moves from the modified internal nodes backtracking to the rooter node and never forward, as it is sketched at figure E.6.

Note that, the reanalysis should be performed only on the modified nodes. Updating and reanalysis operation will be done also on the parents and ancestors nodes due to the propagation effects. Does not need any calculation over remains nodes; just traveling through them and take the corresponding previous data for updating their parents nodes affected by the propagation. Note also that, as the process is completely recursive; that is, one or more sub-graphs can be partitioned further, modification will only affect the corresponding

sub-graph and each boundaries backtracking to the root partition tree, whereas the rest of sub-structures remain unchanged.

Suppose that the internal node (6) in figure E.2 is modified. The factor $U_{s=6}$ is modified which contains the constraint mode Φ_{67} is modified. Then, the product $U = \prod_{s=6}^n U_s$ will be affected only in the matrix entrance (6, 7). Thus, the transformation matrix given by $U^T M U$ and $U^T K U$ will affect only the entrance (6, 1), (6, 2), (6, 6), (6, 7) and (7, 7). Note that this modification do not affect its leaf children nodes 1 and 2 corresponding to the entrance (1, 1) and (2, 2) and the remain leaf nodes 3 and 4. Note also that this modification do not affect the internal node 5.

This three corollary are the basis for our modal reanalysis with AMLS method.

E.3.1. Local reanalysis in the modified sub-structure

Consider a local modification due to ΔK and ΔM where DOFs is not increased/decreased. Observe that the change produced by the modification matrices affects a finite number of the global DOFs called modified DOFs (dof_{mod}) in the global assembled stiffness and mass matrices, and generally $dof_{mod} \ll dof$. The AMLS method involves the resolution of small (and moderate if is required) system of equation and eigen-equations in each substructure level. As was pointed before, no recalculation is required in the non-modified substructures. Thus, only calculation will be performed in those modified nodes and their parents and ancestor. That means, it is necessary to visit the modified substructures and compute again the new constraint modes and the new eigen-pairs and perform all matrix operations defined by (E.2.13a)-(E.2.13e) in those nodes which change due to the propagation. In contrast to the other reanalysis method mentioned before, the reanalysis performed by the AMLS method can be exact or not, and moreover, can be applied to for local low and high rank modification. It will depend of how the modified sub-structures are solved. If the eigen-value problem and the system equation in the modified sub-structures are exactly solved, then the reanalysis performed by the AMLS is exact. For example, the linear system equation with multiple right hand side (RHS) described by the constraints modes could be based on the idea [338], thus, it is possible to make the reanalysis at sub-structures level employing the LDL^T factorization and analyzing how the variation of the entries in the K_{ss} substructures affect the local factors L or D . Otherwise, if the eigen-value problem or the linear system equation are solved approximately, then the reanalysis is approximate. In the following, only an exact reanalysis can be considered.

The first procedure is to identify those internal and leaves nodes which are modified. Thus, as AMLS method is based on tree-node partition, it is necessary moving through all the tree nodes and check if some DOFs contains in the sub-structure is modified. Another equivalent procedure and computationally convenient is to link the DOFs with its corresponding tree-nodes. If the DOFs is modified, then, is modified its sub-structure.

Another important aspect here is that a local-modal reanalysis can be effectively realized in the leaf nodes. These sub-structures are small compared to the complete global assembled matrices. Thus, it is very attractive to make the reanalysis in small structures than big structures. This is for three reasons: first, all previous data computed in the sub-structures can be used for reanalysis; second, a little storage memory is needed; and third, modal reanalysis and solving the linear system of equation with multiple right hand side in leaves nodes is cheaper than perform a full eigen analysis or any matrix factorization. In instance, a Kirsch's combined approximation[218] can be used for solving the modal equations and $LDLT^t$ factorization[338] can be used for solving the system of equation with multiple right-hand side. However, like the leaves nodes and

internal nodes are small, a complete analysis can be done. Nonetheless, in moderate sub-structure size this consideration need to be take into account. These numerical techniques are useful for reducing computational time, which is the main goal of the reanalysis method.

E.3.2. Substructure size effect

The size of substructures is an important aspect in AMLS and, to a certain extent, arbitrary[244]. If larger substructures are desired, a substructure and children can considered to be a single substructure. When smaller substructures are desired, a substructure may be split into a parent or more children. However, it is need insuring that substructure are large enough to avoid wasteful overhead and small enough to make the computation efficient.

AMLS modal reanalysis is independent of sub-structure size. However, the accuracy of the method is strongly linked to cut-off frequency ω_{cut} and the sub-structure size. Thus, larger size of sub-structures tends to improve the accurate of the method due to there are less constraints modes applied to the sub-structures. Until now, no studies are reported about sub-structure size effect and how it can affects the accurate in the AMLS method.

First of all, small substructures (with size around 300 – 1000 DOFs) are computationally cheaper, faster and efficient than larger sub-structures size which require a sparse linear solver and sparse eigen solver. Medium substructures size (around 5000–10000 DOFs) is suggested for medium and big problems. Numerical testing shows that the use of these size with sparse linear and eigen solver can effectively increases the accuracy of the method without sacrificing too much its efficiency. Larger size sub-structures produces more accuracy results but is computationally time consuming because, in general, a clusters of eigen values can be found in the interval of $[0, \omega_{cut}]$ and the the matrix factorization (LU, LDL^t) for solving multiple RHS for the constraints modes can be memory consuming. On the other hand, low sub-structure size is stiffer than high substructure size.

The substructure size effect will be study according eigen-pairs obtained by the standard AMLS algorithm. If a proper cut-off frequency is selected, the relative error for all computed eigenvalues is expected to be in the range of 10^{-2} to 10^{-4} [401]. However, it is not happen with the corresponding eigen-vectors, which the error is quite large, normally between 10^{-1} to 10^2 . Observe that with this error is not enough accurate for stress and strain recovery in structural dynamic in which the error is required to be less than 10^{-3} . Following the idea suggested by Bathe[19], in this work it is employed both the standard eigen value error (*standard error*) and the *modal error*:

$$\epsilon_1 = \frac{\|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i\|}{\|\tilde{\lambda}_i\|} \quad (E.3.15)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\|K\phi_i - \lambda_i M\phi_i\|}{\|\lambda_i M\phi_i\|} \quad (E.3.16)$$

respectively, where the $\tilde{\lambda}$ is the reference eigen value and λ and is the eigen value obtained by the AMLS method.

Also, according to the substructure partition, it can be divided in equilibrated of non-equilibrated sub-structures. Figure E.7 depicts this concept and it is interested to investigate the effect of substructures size when a non-equilibrated and equilibrated tree partition is used.

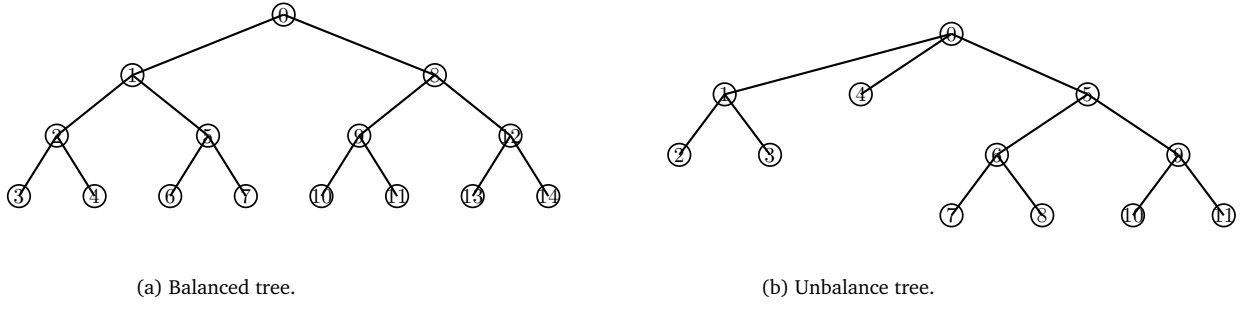


Figura E.7: Balance and unbalance tree substructure.

E.4. Numerical Experiments

In order to evaluate the previous ideas, they will be illustrated in a number of engineering benchmarking problems with different size. METIS -Serial Graph Partitioning and Fill-reducing Matrix Ordering library-[254] is used for partitioning graph to performed the sub-structures. Non-Commercial Intel Math Kernel Library Version-14.0 optimized LAPACK is used to achieve high performance computations for solving the dense linear system equations and dense eigen system. BLZPACK-Block Lanczos Package-[249] and Intel Pardiso Solver [304] are used for solving the sparse eigen system and sparse linear system in the leaves nodes sub-structures. Final projected problem is solved using both Trilinos-Anasazi-Block Krylov Schur eigen solver combined with Amesos-Super-LU linear solver and dense LAPACK solver. [13]. All numerical example are tested with updated version of AMLS-Solver on Ubuntu 14.04 LTS 64-bit with processor Intel Core i7 – 4710MQ CPU @2.50GHz \times 8-16 gigabytes of RAM memory We compiled the code using Intel(R) C++ Intel(R) 64 Compiler XE for applications running on Intel(R) 64, Version 14.0.3.174 with -O2 optimization flag. All examples was running using one processor. Only the execution time and eigen-error are discussed. The proposed algorithm involve no approximation of the eigen-values, eigen-vector and modal constraints and the solution is as accurate as full AMLS-analysis.

E.4.1. Numerical evaluation of size effect

This section aims to numerically evaluate the size effect of the sub-structures in the AMLS-method and how it is affect in the accuracy of the AMLS method. As we mentioned before, the accuracy of the approximate eigen-pairs depend in the selection of ω_{cut} . If we increase the frequency cut-off, then, more eigen-pairs are computed in the sub-structures and consequently, the accuracy of the approximation can be improved. However, it is possible to increase the accurate of eigen-pairs changing the sub-structure size and remaining constant the frequency cut-off. The effect of how the accuracy of the AMLS change modifying the sub-structure size is called *size effect*.

To this end, it is selected the examples shown in the table E.1 with its corresponding short description. These examples were taken from Sparse Matrix Collection [276]. Examples have different sizes (small, moderate and large size). Different cut-off frequency ω_{cut} for each problem is used. All problem are analyzed with an average DOFs size partition of 500 – 1000 – 5000 – 10000. A five hundred eigen-values are calculated. Reference eigen-values were computed using the mentioned eigen-solver libraries. It is important to recognize that AMLS usually produces approximate solutions that are less accurate than those computed by

Problem	Description	size	Non-zeros in K	Non-zeros in M	ω_{cut}
Wtaoc01	Blade of 50KW wind turbine	23,368	2,220,068	814,694	1.0×10^8
Wtnh01	Blade of 1.5MW wind turbine	117,990	11,243,248	5,590,256	5.0×10^7
Bs6	Structure of connected beams	517,161	20,727,171	6,909,057	5.0×10^{10}

Cuadro E.1: Test problem for substructures size effect.

Average Partition	Wtaoc01 ($\omega_{cut} = 10^8$)	Wtnh01 ($\omega_{cut} = 5 \times 10^7$)	Bs6 ($\omega_{cut} = 5 \times 10^{10}$)
500	$S = 1059$ $NZ = 123176$	$S = 7585$ $NZ = 6491009$	$S = 4107$ $NZ = 1062889$
1000	$S = 1016$ $NZ = 115117$	$S = 7221$ $NZ = 6071757$	$S = 3039$ $NZ = 765175$
5000	$S = 884$ $NZ = 81476$	$S = 6552$ $NZ = 5158918$	$S = 2822$ $NZ = 696826$
10000	$S = 828$ $NZ = 56072$	$S = 6246$ $NZ = 4492888$	$S = 2694$ $NZ = 634358$

Cuadro E.2: Final projected matrix size. S the size of final projected matrix and NZ is the non-zeros in the final mass projected matrix.

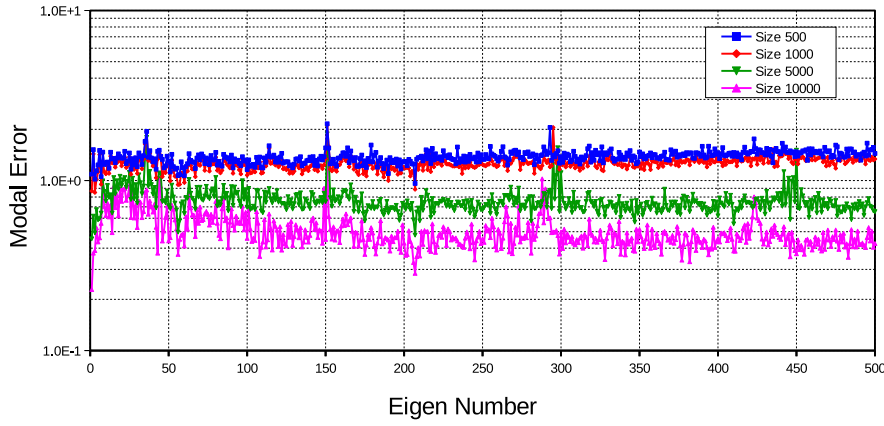
other eigen-solvers. Although the lack of accuracy may be a cause for concern in structural applications, it can be tolerated in some applications such as frequency response analysis. There are a number of ways to improve the accuracy of the AMLS algorithm, see for example the reference[29]. However, these schemes are not immediately applicable to the multi-level case, and they tend to increase the runtime of the computation significantly. Chen Pu et al[401] suggested to perform a sub-space iterations to improve the accuracy of the AMLS and can be applicable to general multi-level cases to enhance the eigen-pairs where the initial load pattern P are the eigen-vectors obtained by the AMLS. As these vectors are close to the *exact* ones, a few iterations is required and convergence is always guaranteed.

Table E.2 shows the final projected matrix size S obtained by the AMLS. Also it is presented the non-zeros terms NZ of the final projected mass matrix. Observe that, comparing to the original matrices size, the projected matrices are smaller, however, as pointed Kaplan[244], the final projected mass matrix is populated. Note that, keeping constant the cut-off frequency ω_{cut} , the final projected matrices size decrease with increasing size of the substructure.

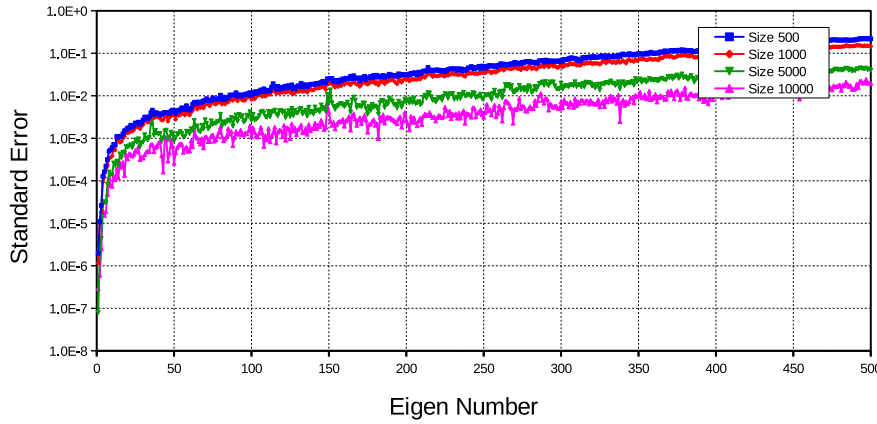
Figures E.8, E.9 and E.10 show the modal and standard error for the first five hundred eigen-values obtained by the AMLS for different substructure size partitions. In the computation of standard error, Y-axis is the relative error of each eigenvalue compared with that computed using Block Lanczos Method. Apparently, modal error is almost constant for all 500 eigen-pairs computed. However, standard error increase

Average Partition	Wtaoc01 ($\omega_{cut} = 10^8$)	Wtnh01 ($\omega_{cut} = 5 \times 10^7$)	Bs6 ($\omega_{cut} = 5 \times 10^{10}$)
500	$Levels = 7$ $Nodes = 118$	$Levels = 9$ $Nodes = 522$	$Levels = 11$ $Nodes = 2229$
1000	$Levels = 6$ $Nodes = 64$	$Levels = 8$ $Nodes = 262$	$Levels = 10$ $Nodes = 1117$
5000	$Levels = 3$ $Nodes = 15$	$Levels = 6$ $Nodes = 65$	$Levels = 8$ $Nodes = 271$
10000	$Levels = 2$ $Nodes = 7$	$Levels = 5$ $Nodes = 33$	$Levels = 7$ $Nodes = 113$

Cuadro E.3: Number of nodes and levels sub-structures.



(a) Modal error in example *Wtaoc01*.

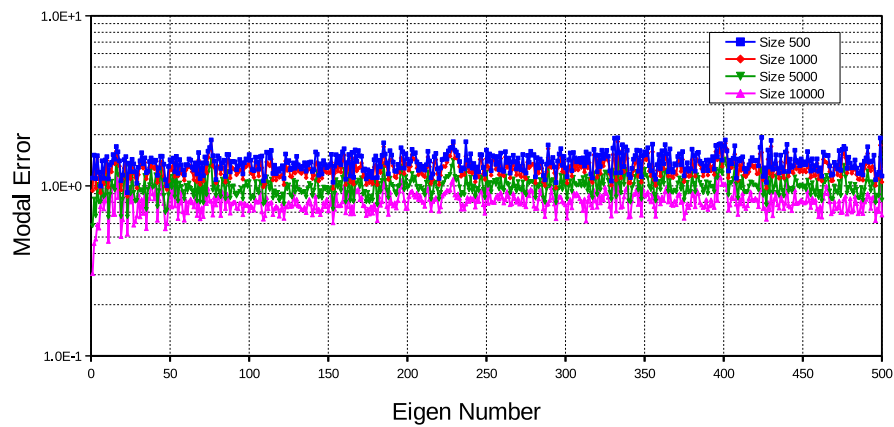


(b) Standard error in example *Wtaoc01*.

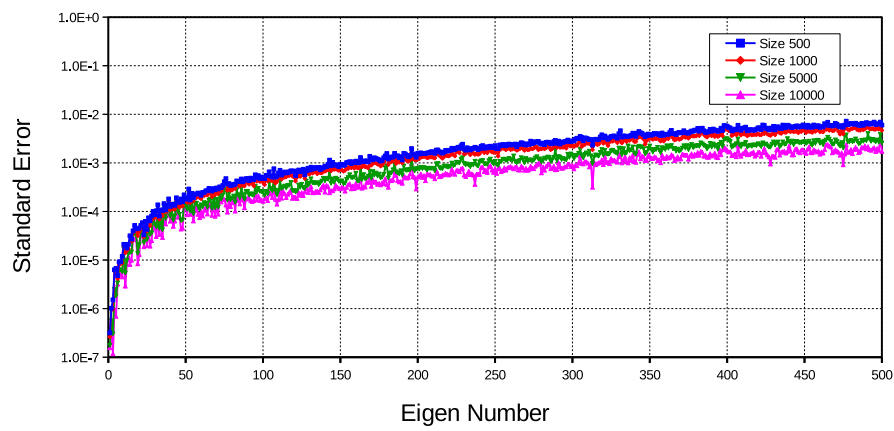
Figura E.8: Modal error and standard error for example *Wtaoc01*.

at high frequencies of the system. Note also that eigen-values calculated by AMLS is reasonably approximate to the reference one, but eigen-vector is not so accurate as they are show in the modal error figures. In small size sub-structures (500 DOFs), the maximum relative error obtained are 0.22, 0.0072 and 0.06 for the *Wtaoc01*, *Wtnh01* and *Bs6* examples, respectively, decreasing when sub-structure size increase. In instance, for an average size of 10000 DOFs, maximum relative error is 0.024, 0.003 and 0.0099. Here is the key point of the numerical size effect. All charts show that both error, modal error and standard error, decrease when the size of sub-structure increase. That means, keeping the same cut-off frequency for all sub-structures, slightly moderate accurate results is obtained when large sub-structure size is used in the AMLS method.

The figure E.11 shows the sub-structure partitions patterns performed by METIS on the *Wtnh01* example. Table E.3 presents the number of level and nodes obtained in the tree partitions. It can be displayed that, as is obvious, increasing the sub-structure size, decreasing the number of level and sub-structure partition. Two important concern need to be take into account. First, although large sub-structures can obtain slightly accurate results than small sub-structures, it is required sparse linear and eigen solver. Larger sub-structures tends to use a considerable computational effort, but it is reduced the the number of nodes on the tree partitions. Second, in contrast to large structure, calculation in small sub-structures are cheaper and faster. However, more recursive partition and operation need to be performed. Table E.4 and table E.5 show the

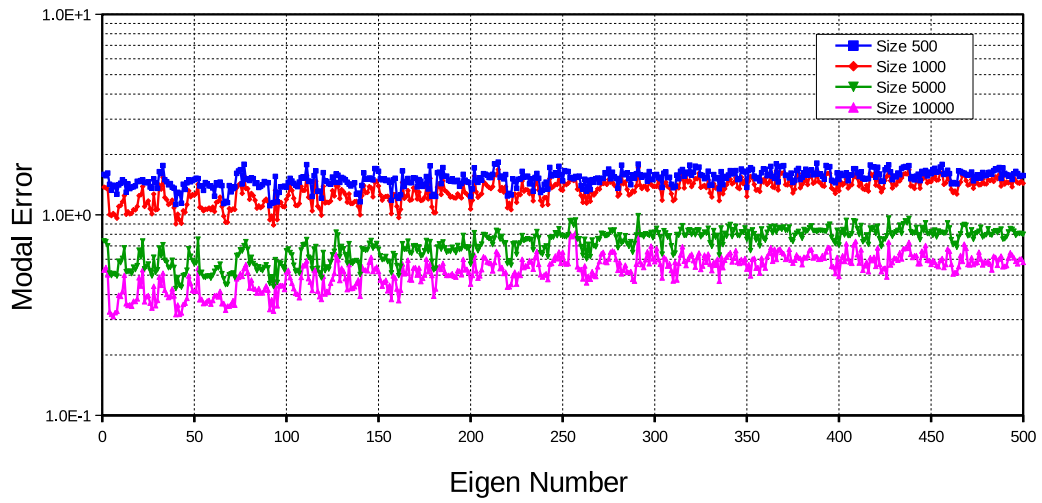


(a) Modal error in example *Wtnh01*.

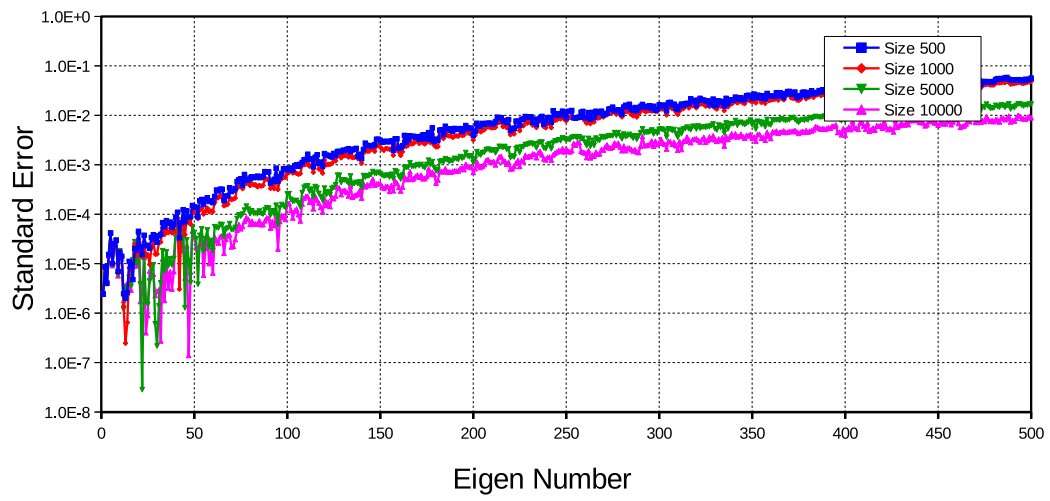


(b) Standard error in example *Wtnh01*.

Figura E.9: Modal error and standard error for in example *Wtnh01*.



(a) Modal error in example *Bs6*.



(b) Standard error in example *Bs6*.

Figura E.10: Modal error and standard error for in example *Bs6*.

Average Partition	Wtaoc01 ($\omega_{cut} = 10^8$)	Wtnh01($\omega_{cut} = 5 \times 10^7$)	Bs6 ($\omega_{cut} = 5 \times 10^{10}$)
500	2.67s	184.81s	192.73s
1000	3.25s	183.41s	206.07s
5000	6.07s	216.12s	216.32s
10000	9.43s	268.76s	248.40s

Cuadro E.4: Average time reported to complete the eigen-analysis with AMLS method. Final projected system solved by Trilinos-Anasazi Super-LU.

Average Partition	Wtaoc01 ($\omega_{cut} = 10^8$)	Wtnh01($\omega_{cut} = 5 \times 10^7$)	Bs6 ($\omega_{cut} = 5 \times 10^{10}$)
500	2.61s	80.54s	93.34s
1000	3.12s	76.64s	105.90s
5000	6.00s	107.22s	120.25s
10000	10.46s	148.35s	155.69s

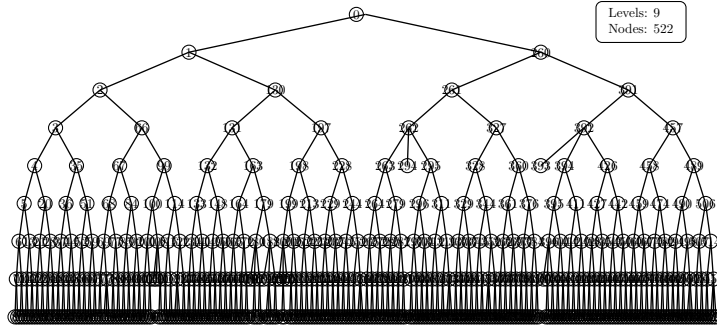
Cuadro E.5: Average time reported to complete the eigen-analysis with AMLS method. Final projected system solved by LAPACK dense eigen-solver.

time consumed reported by the AMLS method for all examples varying the sub-structure size using different eigen solver for the final projected problem. According to the reported data from table E.4, increase the sub-structure size increase the computational effort. Such an increase is caused not by the increased dimension of the projected problem. Table E.2 shows that increasing the sub-structure size but remaining constant the cut-frequency, the final projected problem decreased. One reason is the final projected mass matrix is quite populated increasing the matrix-vector operations performed by the eigen solver. It is interested to point that, from Table E.4 and E.5, sub-structure size less than 5000, it is often more efficient to use a dense eigen-solver to compute the eigen-pairs for the final projected eigen-system. Table E.8 shows the time consumed by the eigen-solver libraries used in this work. It is clear that more favorable time is obtained by the AMLS method. Note also that for the problem Bs6, Tilinos-Anasazi fails because the factorization performed by Super-LU Solver required more RAM memory than the available memory.

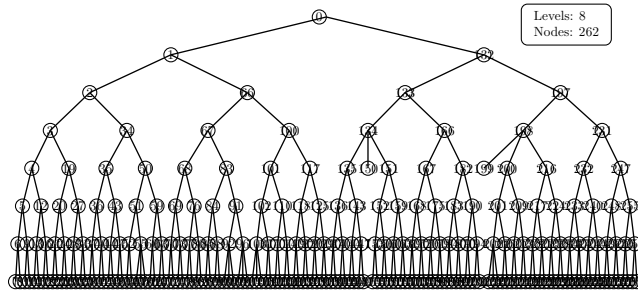
On the other hand, some partitioner graph library tend to generated equilibrated o quasi-equilibrated substructure size, as for example CHACO-Software for Partitioning Graphs-[78]. Figure E.12a and E.12b corresponds to the Bs6 example divided in 10000 average DOFs substructures size for balance and unbalance tree sub-structure, respectively. It is interested now to investigate the effect of substructures size when a non-equilibrated and equilibrated tree partition is used. Figures E.13a and E.13b depict the modal and standard error obtained when a balanced and unbalanced tree partitions are used. According to the results, it can be

Eigen-Solver	Wtaoc01	Wtnh01	Bs6
BLZPACK-Pardiso Solver	25.67s	169.95s	967.89s
Trilinos-Amesos-Anasazi-Super-LU	292.49s	1619.41s	out-of core

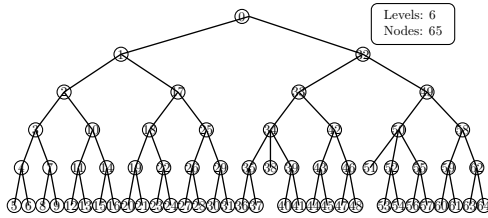
Cuadro E.6: Average time reported for solving the complete system using different eigen-solve.



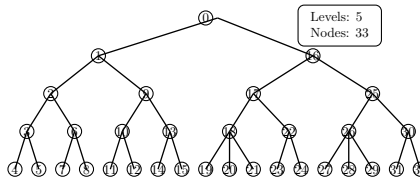
(a) Tree partition sub-structures in *Wtnh01* with average sub-structure size DOFs of 500.



(b) Tree partition sub-structures in *Wtnh01* with average sub-structure size DOFs of 1000.

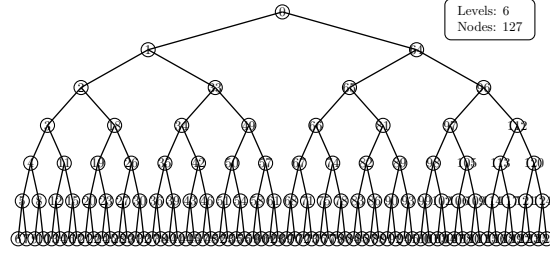


(c) Tree partition sub-structures in *Wtnh01* with average sub-structure size DOFs of 5000.

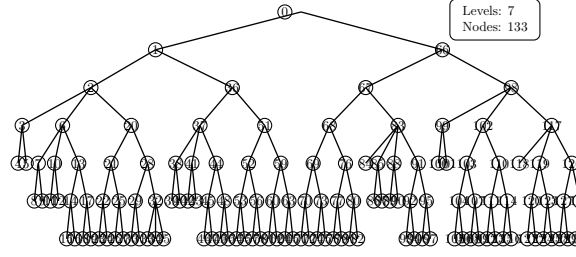


(d) Tree partition sub-structures in *Wtnh01* with average sub-structure size DOFs of 10000.

Figure E.11: Tree partition sub-structures in *Wtnh01* example.



(a) Balanced tree performed by CHACO[78] in *Bs6* example with average size of 10000 DOFs.



(b) Unbalanced tree performed by METIS[254] in *Bs6* example with average size of 10000 DOFs.

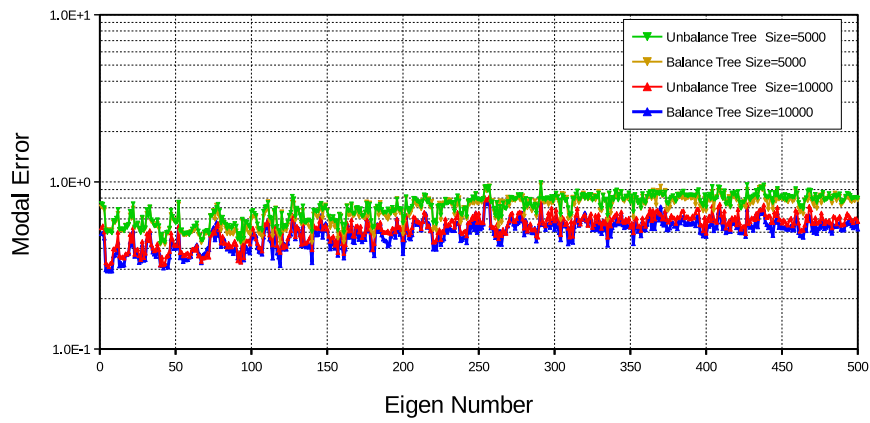
Figure E.12: Tree partition *bs6* example with average size of 10000 DOFs.

seen that both balance and unbalance tree partition produced virtually the same results. It is can conclude that for balance and unbalanced tree partitions with similar average DOFs size substructures and constant frequency cut-off ω_{cut} have approximately the same error. That means, the accuracy of the AMLS method is independent of how the substructures with similar size are partitioned.

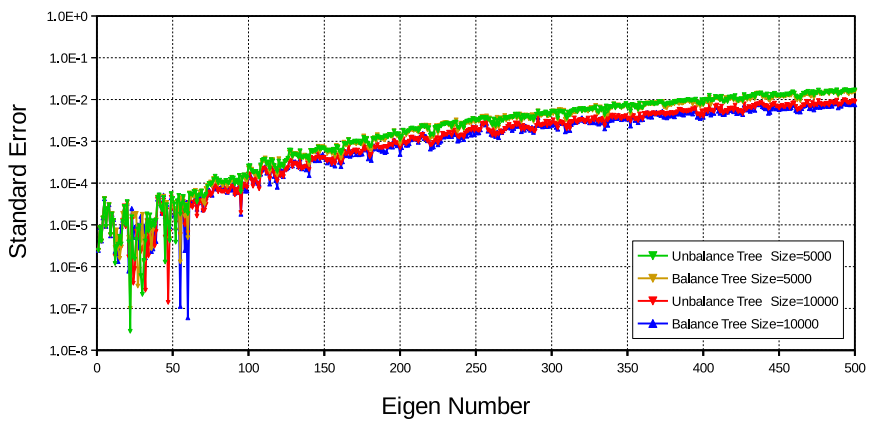
Finally, consider again the *Wtnh01* example. AMLS consider each substructures like a clamped structures, a way to retain all *constraint modes* is to compute all-eigen pairs on internal nodes. In other words, for these numerical experiments, the bottom substructures (the leaves nodes) is computed with the prescribed cut-off frequency ω_{cut} , while internal substructures a complete eigen-system is computed. Consequently, final projected system is greater but reduced comparing to the original matrices. Figure E.14 show the error obtained employing this strategy on 5000 and 10000 DOFs sub-structure size. Comparing to the previous analysis where a $\omega_{cut} = 5 \times 10^7$ frequency was used in all sub-structures, this strategy reduce the global error for the same sub-structure DOFs size. Consequently, to retain all constraints modes produce more accurate results at the expense of more computational effort due to the increase of the final projected matrices.

E.4.2. Reanalysis with AMLS-Method

Consider now an example consisting in 70338 DOFs ensambled by the contribution of 24615 finite elements is split in average DOFs size of 2500, 5000 and 10000 sub-structures. The total non-zeros terms in the stiffness matrix is 1907924. The cut-off frequency ω_{cut} is take as 5000. This example is a structural high building consisting in 106 groups of elements. The aim of this example is to performed the modal-reanalysis calculating the first one hundred modified eigen-values, measure the time of the complete reanalysis and compare the relative error obtained. For simplicity, modification are performed changing the stiffness of

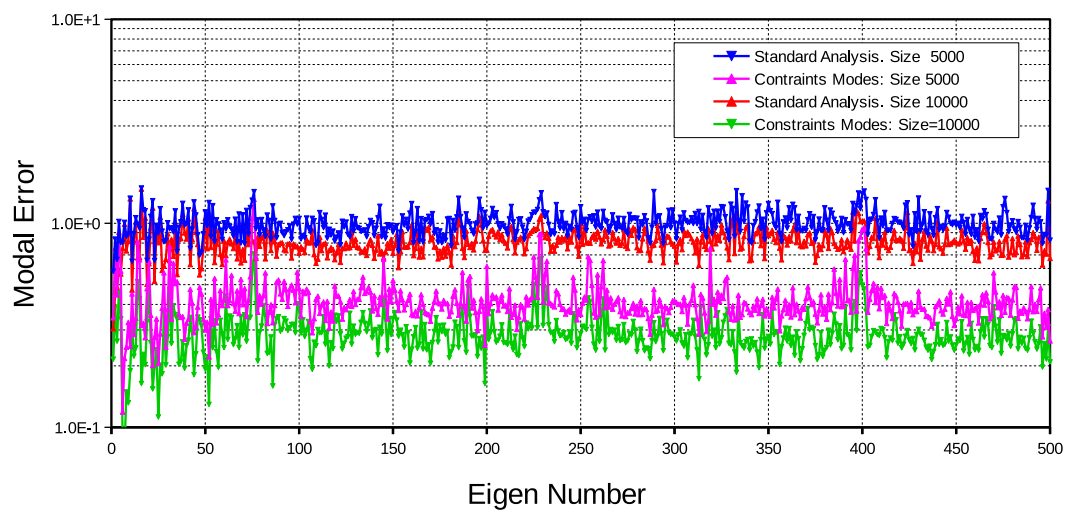


(a) Modal error.

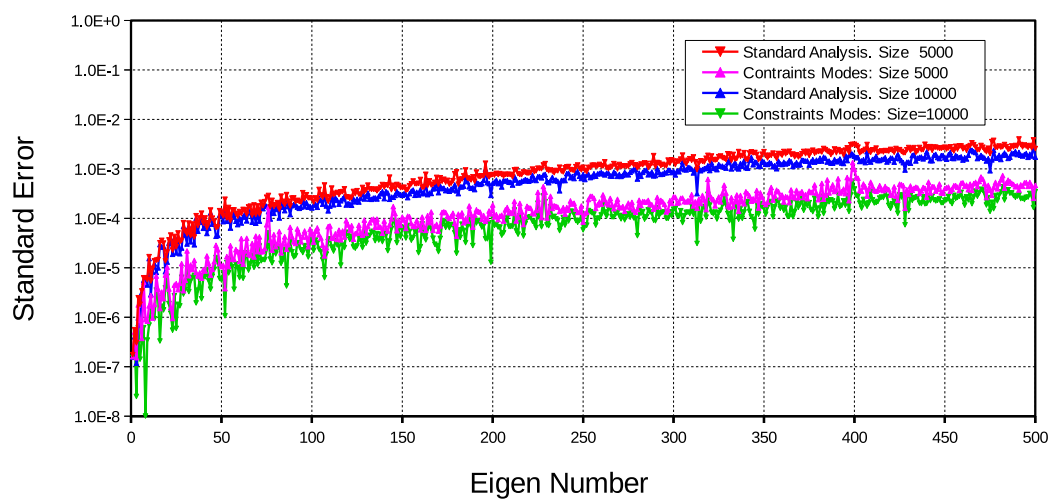


(b) Standard error.

Figura E.13: Modal and standard error in the unbalance and balance tree.

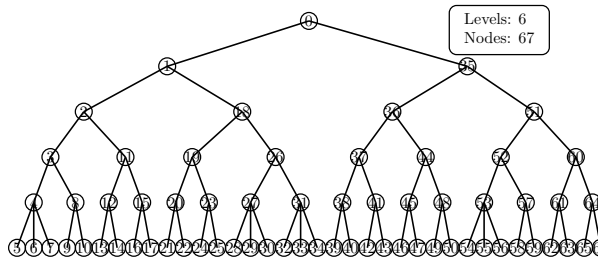


(a) Modal error.

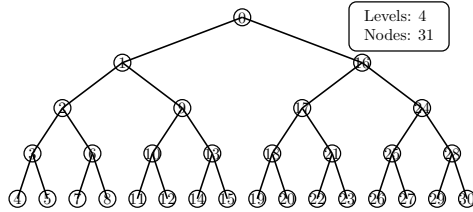


(b) Standard error.

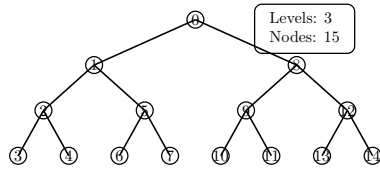
Figura E.14: Error in the unbalance and balance tree.



(a) Sub-structure of 2500 DOFs.



(b) Sub-structure of 5000 DOFs.



(c) Sub-structure of 10000 DOFs.

Figura E.15: Error in the unbalance and balance tree.

the elements. Two numerical experiments are carried out. First, changing the stiffness of elements (without decreasing number of total DOFs) where one leaf sub-structure, two leafs sub-sub-structures and a half of total leafs sub-structures are modified. The next experimental test, is modifying a complete group of elements where a considerable number of DOFs is modified. This example is selected to show the efficiency of the proposed AMLS modal-reanalysis method for local non-topological low and high-rank structural modification. Figure E.15 show the structure tree partition of the example for the three different average DOFs size mentioned.

E.4.2.1. Reanalysis with AMLS-Method modifying a predetermined sub-structure

As a first case, a predetermined leaf sub-structure is modified changing the value of the stiffness matrix of some finite elements. The modified elements are choose arbitrary on the selected modified sub-structure. It not interested to perform an optimal design, but measure the time consumed when the reanalysis is performed for the three different sub-structure size. Tables E.8, E.9 y E.10 compare the time reported for analysis and reanalysis. The abbreviates M. E, M. DOFs, M. I. N and M. L. N mean the number of modified elements, the number of modified DOFs, the number of modified internal nodes and the number of modified leaf nodes respectively. The numerical results indicate that proposed modal reanalysis for the local modification, which only affect a small number of DOFs, is favorable. It is note that, for large sub-structures the complete modal-analysis is more time consuming than small sub-structure. However, the modal-reanalysis reported less time

Solver	Time full analysis
Trilinos-Anasazi-Amesos	157.10s
BLZPACK	29.96s
AMLS-S2500	26.47s
AMLS-S5000	38.78s
AMLS-S10000	64.29s

Cuadro E.7: Full modal-analysis time calculation for different eigen-solvers.

Average Partition	M .E	M. DOFs	M. I. N.	M. L. N.	Average Time-Analysis	Average Time-Reanalysis
2500	9	162	5	1	26.47s	13.8s(52.13 %)
5000	9	162	4	1	38.78s	10.77s(27.77 %)
10000	9	162	3	1	64.29s	12.17s(18.93 %)

Cuadro E.8: Reported re-analysis time when one leaf sub-structures is modified. M. E(number of modified elements); M. DOFs (number of modified DOFs; M. I. N (Modified internal nodes) and M. L. N (Modified leaf nodes)).

consuming. This phenomenon is caused by the characteristic of the binary sub-structure partition tree where some roots sub-structures (parents and ancestors nodes) are modified by the propagation. Its is clear that when exist more sub-structures level, more roots nodes will be modified by the propagation. Other source of time consuming is traveling through the nodes. As the DOFs are modified, it is necessary traveling to all sub-structures, check if it is modified and then make the required operations. Also, it is to notify that the number of operation of the proposed algorithm is less than full recalculation. For example, in Table E.10 where approximately a half of the leaf sub-structures are modified, the number of operation performed by the reanalysis will be a slightly more half operation than full recalculation, which demonstrates that this method is more efficient than full recalculation.

On the other hand, it is shown that the reanalysis time and the number of operations depends not in the number of modified DOFs but it depends on the distributions of the modified DOFs in the binary sub-structure tree partition. For example, if a set of modified elements involves many leaves nodes, the number of computational operations would be larger even though the number of DOFs is smaller. However, if this set of modified elements is just on the path from one leaf to the root, then, the number of computational operations would be smaller even the number of DOFs is larger.

Average Partition	M .E	M. DOFs	M. I. N.	M. L. N.	Average Time-Analysis	Average Time-Reanalysis
2500	15	216	9	2	26.47s	13.18s(49.79 %)
5000	15	216	7	2	38.78s	11.85s(30.55 %)
10000	15	216	5	2	64.29s	21.08s(32.78 %)

Cuadro E.9: Reported re-analysis time when two leaf sub-structures is modified.

Average Partition	M .E	M. DOFs	M. I. N.	M. L. N.	Average Time-Analysis	Average Time-Reanalysis
2500	103	933	31	16	26.47s	19.99s(75.51 %)
5000	64	888	15	8	38.78s	26.96s(69.52 %)
10000	24	369	7	4	64.29s	34.08s(53.00 %)

Cuadro E.10: Reported re-analysis time when half leaves sub-structures is modified.

Reported Time						
Group	Mod. Elem	Mod. DOFs	AMLS-Size	Time Analysis	Time Reanalysis	Time consuming (%)
1	2228	9162	2500	26.47s	18.65s	70.44
			5000	38.78s	12.46s	32.12
			10000	64.29s	15.39s	23.92
2	36	54	2500	26.47s	15.49s	58.51
			5000	38.78s	12.60s	32.49
			10000	64.29s	16.19s	25.18
3	2075	12900	2500	26.47s	15.68s	59.23
			5000	38.78s	14.95s	38.55
			10000	64.29s	15.41s	23.96
4	270	1368	2500	26.47s	15.41s	58.21
			5000	38.78s	14.30s	36.87
			10000	64.29s	15.13s	23.53
20	270	1368	2500	26.47s	14.37s	54.28
			5000	38.78s	16.75s	43.19
			10000	64.29s	20.39s	31.71

Cuadro E.11: Reported reanalysis time modifying groups of elements.

E.4.2.2. Reanalysis with AMLS-Method modifying a predetermined group of elements

In contrast to the previous test, in this example, all modification are performed changing the stiffness matrix of all elements in a group. To better understand this latter concept, a group is a set of elements that have a common entity. For example, in a high-rise building, it can establish groups of elements for given floor or a group of elements that have the same material, among other criteria. Additionally, previous example we do not show the recomputed eigen-value from reanalysis because the modified DOFs only change slightly the eigen-values of the original problem. Here, a considerable number DOFs is modified perturbing the original non-modified eigen values.

Table E.11 shows the results of time reanalysis for modification on 5 different groups using an average sub-structure size of 2500, 5000 and 10000. It is also shown the number of modified elements and DOFs change in the modification. For smaller sub-substructure size the algorithm perform the reanalysis efficiently, but take approximately 70% of the total analysis. However, and can be considered another consequence of size-effect, the reanalysis is more efficient in medium sub-structure size, because the modified groups of elements and DOFs are localized. This numerical test shows that if the modification are local, no matter sub-

Eigen-Value	O. M	M. M	A-S2500	A-S5000	A-S10000	S.E-S2500	S.E-S5000	S.E-S10000
1	0.72596	0.73075	0.73077	0.73077	0.73076	0.00301	0.00205	0.00109
10	4.07870	4.08430	4.08548	4.08526	4.08487	0.02889	0.02350	0.01396
20	16.66100	16.68600	16.70650	16.69940	16.69580	0.12286	0.08031	0.05873
30	26.02900	26.05400	26.09210	26.08510	26.07670	0.14623	0.11937	0.08713
40	31.76900	31.79100	31.84730	31.82910	31.81370	0.17709	0.11985	0.07140
50	36.84300	36.84600	36.95520	36.92520	36.89690	0.29637	0.21495	0.13814
60	40.23500	40.23900	40.36490	40.32770	40.26980	0.31288	0.22043	0.07654
70	43.26500	43.27400	43.41390	43.37400	43.34790	0.32329	0.23109	0.17077
80	46.32200	46.34000	46.46910	46.44480	46.42300	0.27859	0.22615	0.17911
90	49.43900	49.44400	49.62140	49.57940	49.53230	0.35879	0.27385	0.17859
100	52.06600	52.07700	52.25900	52.20370	52.16740	0.34948	0.24329	0.17359

Cuadro E.12: *Reported standard error eigen-values when the group Id 1 is modified.*

structure size, the computational effort ratio of this algorithm and full recalculation is usually below 20 % up to 70 %. It is conclude that our proposed modal reanalysis algorithm can be used for local low and high-rank modification.

It is interested to point out that the reanalysis performed is *exact* inside the approximation given by the AMLS. Tables E.12, E.13,E.14,E.15,E.16 report and compare the value of 10 eigen-values obtained without modification, with modification using BLZPACK eigen-solver and modification using AMLS for the three different size. The abbreviates in these tables used mean: O.M is the eigen values of the non-modified eigen problem; M. M is the eigen-value of the modified eigen problem using Block Lanczos method; and A–S is the eigen-values computed by AMLS in sub-structure with average size S of . Similarly, $S - E$ is the standard relative eigen value error computed by equation (E.3.15). Unlike other modal-reanalysis algorithm, our proposed method is as accurate as the AMLS is. However, as we commented before, a different approximate reanalysis strategies can be performed on the modified leafs nodes, increasing the efficiency but reducing the accuracy. It is observe also that the relative error is less 0.35 % increasing in the higher structural modes. In other modal reanalysis method it is obtained less accuracy, mainly in approximate eigen method.

E.5. Conclusion

In this work, a new modal reanalysis algorithm based on AMLS method is proposed for local, non-topological, low and high rank modification. Instead to use some perturbation technique[86, 44, 348] or use the popular Kirsch Combined method[216, 219], the proposed reanalysis procedure used the AMLS method to perform the reanalysis exploiting the concept of sub-structure and how the modification affects a particular path on the hierarchical partition tree, which traces back from the modified nodes to the root parents node. Our proposed algorithm can be extended to multilevel sub-structuring and only the modified sub-structures and affected sub-structures for the propagation need to be recalculated, using both exact or approximate method.

This algorithm can be significantly improve the efficiency comparing to with the full recalculation.

Eigen-Value	O. M	M. M	A-S2500	A-S5000	A-S10000	S.E-S2500	S.E-S5000	S.E-S10000
1	0.72596	0.72609	0.72611	0.72611	0.72610	0.00317	0.00220	0.00124
10	4.07870	4.07890	4.08007	4.07985	4.07946	0.02868	0.02329	0.01373
20	16.66100	16.66300	16.68360	16.67650	16.67290	0.12363	0.08102	0.05941
30	26.02900	26.03000	26.06850	26.06170	26.05330	0.14791	0.12178	0.08951
40	31.76900	31.76900	31.82610	31.80750	31.79210	0.17973	0.12119	0.07271
50	36.84300	36.84400	36.95380	36.92380	36.89560	0.29801	0.21659	0.14005
60	40.23500	40.23600	40.36190	40.32490	40.26720	0.31290	0.22095	0.07754
70	43.26500	43.26700	43.40730	43.36760	43.34140	0.32427	0.23251	0.17196
80	46.32200	46.32700	46.45720	46.43260	46.41050	0.28105	0.22794	0.18024
90	49.43900	49.44000	49.61780	49.57560	49.52840	0.35963	0.27427	0.17880
100	52.06600	52.06700	52.24930	52.19430	52.15770	0.35013	0.24449	0.1742

Cuadro E.13: Reported standard error eigen-values when the group Id 2 is modified.

Eigen-Value	O. M	M. M	A-S2500	A-S5000	A-S10000	S.E-S2500	S.E-S5000	S.E-S10000
1	0.72596	0.73804	0.73806	0.73805	0.73805	0.00285	0.00190	0.00095
10	4.07870	4.10270	4.10392	4.10370	4.10330	0.02974	0.02437	0.01462
20	16.66100	16.76300	16.78420	16.77700	16.77340	0.12647	0.08352	0.06204
30	26.02900	26.12900	26.16800	26.16060	26.15220	0.14926	0.12094	0.08879
40	31.76900	31.84100	31.89700	31.87970	31.86450	0.17587	0.12154	0.07380
50	36.84300	36.86500	36.97480	36.94480	36.91650	0.29784	0.21647	0.13970
60	40.23500	40.25700	40.38310	40.34660	40.29420	0.31324	0.22257	0.09241
70	43.26500	43.32800	43.46930	43.42930	43.40230	0.32612	0.23380	0.17148
80	46.32200	46.40500	46.52850	46.50530	46.48450	0.26614	0.21614	0.17132
90	49.43900	49.47200	49.65310	49.60980	49.55950	0.36607	0.27854	0.17687
100	52.06600	52.12500	52.30670	52.25080	52.21530	0.34859	0.24134	0.17324

Cuadro E.14: Reported standard error eigen-values when the group Id 3 is modified.

Eigen-Value	O. M	M. M	A-S2500	A-S5000	A-S10000	S.E-S2500	S.E-S5000	S.E-S10000
1	0.72596	0.74849	0.74851	0.74850	0.74850	0.00267	0.00160	0.00067
10	4.07870	4.15970	4.16095	4.16072	4.16031	0.03005	0.02452	0.01466
20	16.66100	16.96800	16.99000	16.98250	16.97880	0.12966	0.08545	0.06365
30	26.02900	26.31500	26.35530	26.34700	26.33850	0.15314	0.12160	0.08930
40	31.76900	31.95800	32.01390	31.99890	31.98360	0.17492	0.12798	0.08011
50	36.84300	37.16800	37.27700	37.24710	37.21790	0.29326	0.21282	0.13426
60	40.23500	40.46500	40.59130	40.55940	40.51800	0.31212	0.23329	0.13098
70	43.26500	43.63000	43.77990	43.73820	43.70720	0.34357	0.24799	0.17694
80	46.32200	46.84600	46.99750	46.96700	46.92210	0.32340	0.25829	0.16245
90	49.43900	49.61800	49.81810	49.76950	49.70590	0.40328	0.30533	0.17715
100	52.06600	52.43700	52.64230	52.58610	52.54710	0.39152	0.28434	0.20997

Cuadro E.15: Reported standard error eigen-values when the group Id 4 is modified.

Eigen-Value	O. M	M. M	A-S2500	A-S5000	A-S10000	S.E-S2500	S.E-S5000	S.E-S10000
1	0.72596	0.77173	0.77175	0.77174	0.77173	0.00233	0.00130	0.00039
10	4.07870	5.31960	5.32202	5.32143	5.32096	0.04549	0.03440	0.02557
20	16.66100	18.29000	18.31060	18.30560	18.30300	0.11263	0.08529	0.07108
30	26.02900	29.04300	29.10670	29.09600	29.08300	0.21933	0.18249	0.13773
40	31.76900	34.88000	34.95810	34.93900	34.91590	0.22391	0.16915	0.10292
50	36.84300	39.49800	39.61270	39.58190	39.55500	0.29039	0.21242	0.14431
60	40.23500	42.77000	42.88420	42.84410	42.82240	0.26701	0.17325	0.12252
70	43.26500	46.33200	46.46710	46.43730	46.41400	0.29159	0.22727	0.17698
80	46.32200	49.08200	49.25970	49.23540	49.18830	0.36205	0.31254	0.21658
90	49.43900	52.64900	52.81710	52.76300	52.72270	0.31928	0.21653	0.13998
100	52.06600	56.21800	56.41710	56.35110	56.30730	0.35416	0.23676	0.15885

Cuadro E.16: Reported standard error eigen-values when the group Id 20 is modified.

Some of the advantages are:

1. Larger sub-structure size increase moderately the accurate of the AMLS method. For medium sub-structure size, the efficiency of AMLS method can be improved using a sparse linear solver and sparse eigen solver.
2. If the modified sub-structures are recalculated using exact method, the reanalysis does not affect the precision of the final results given the AMLS method. The eigen-values computed are accurate as the precision of AMLS-method is.
3. The amplitude of modification is not limited to small modification change, as being required by approximate method.
4. It is only required to identify the corresponding modified and affected sub-structures and perform the recalculation. Also stored the data of the non-modified sub-structures. In the worst case, the computational cost is no more than the fresh AMLS-solution.
5. It is more suitable for large-scale eigen value problem with high local-rank modification.

En la ecuación 4.4.2 contiene un error de signo. Debiera escribirse como:

$$\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cos \phi = c - \left(\frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \sin \phi \right) \tan \phi \quad (6.0.1)$$

Parte I

Referencias

Bibliografía

- [1] Carpinteri A. Size effect in fracture toughness testing: a dimensional analysis approach. *Proc. of Intl. Conference on Analytical and Experimental F.M., Roma*, 1980.
- [2] Nagi E. A. and K.J. Bathe. Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm. *Computers & Structures*, 79(16):1473–1486, 2001.
- [3] T. Akazawa. New test method for evaluating internal stress due to compression of concrete. the splitting tension test. *J. Japan Soc Civil Eng*, 29:777 – 787, 1943.
- [4] T. Akenine-Moller. Fast 3d triangle-box overlap testing. *Journal of Graphics Tools*, 6:29–33, 2001.
- [5] M. A. Akgün, J. H. Garcelon, and R. T. Haftka. Fast exact linear and non-linear structural reanalysis and the Sherman–Morrison–Woodbury formulas. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(7):1587–1606, 2001.
- [6] M. H Aliabadi. Boundary element formulations in fracture mechanics. *Applied Mechanics Reviews*, 50:83–96, 1997.
- [7] P. M. A. Areias and T. Belytschko. Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(5):760–788, 2005.
- [8] J. H. Argyris. The matrix analysis of structures with cutouts and modifications. volume 6 of *Proceedings of 9th Int. Congress of Applied Mechanics*, pages 131–140. University of Brussels, 1956.
- [9] J.S. Arora. Survey of structural reanalysis techniques. *J.Struct. Div*, 106:783–802, 1976.
- [10] Eberhard B. An adaptive finite-element strategy for the three-dimensional time-dependent Navier-Stokes equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 36(1):3–28, 1991.
- [11] Ronaldo I. B. A finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous fields based on standard galerkin approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(11–12):1529 – 1549, 2000.

- [12] I. Babuska and W. C. Rheinboldt. A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(10):1597–1615, 1978.
- [13] C. G. Baker, U. L. Hetmaniuk, R. B. Lehoucq, and H. K. Thornquist. Anasazi software for the numerical solution of large-scale eigenvalue problems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 36(3):13:1–13:23, July 2009.
- [14] S. Balakrishnan, A. Elwi, and D. Murray. Effect of modeling on nlfe analysis of concrete structures. *Journal of Structural Engineering*, 114(7):1467–1487, 1988.
- [15] S. Balakrishnan and D. Murray. Concrete constitutive model for nlee analysis of structures. *Journal of Structural Engineering*, 114(7):1449–1466, 1988.
- [16] Randolph E. Bank and Andrew H. S. A. Weiser. Some Refinement Algorithms And Data Structures For Regular Local Mesh Refinement. 1983.
- [17] G.I. Barenblatt. On equilibrium cracks formed during brittle fracture. *Journal of Applied Mechanics*, 23(3):622–636, 1959.
- [18] J.-F.M. Barthelemy and R.T. Haftka. Approximation concepts for optimum structural design — a review. *Structural optimization*, 5(3):129–144, 1993.
- [19] K. Bathe and L. Wilsont. Solution methods for eigenvalue problems in structural dynamics. *Int. J. Numer. Methods Eng*, pages 6–213, 1973.
- [20] K. J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [21] Z. Bazant, T. Belytschko, and T. Chang. Continuum theory for strain softening. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(12):1666–1692, 1984.
- [22] Z. P Bazant. Eds. C.S Desai and R.H Gallagher, J.Wiley, London. Engng Mat. *Heron*, 34:45–59, 1984.
- [23] Z. P. Bazant., F. B. Lin, and G. Pii audier-Cabot. Yield limit degradation: nonlocal contindum model with local strain.(edited by e. onate. r. owen and e. hinton).barcelona. *.Proc. In/. Corzf: on Compututionul Plu.c-ticitj*, 1987.
- [24] Z. P. Bazant and Belytschko Ted. . *Wave Propagation in a Strain-Softening Bar: Exact Solution*, 3(3):381–389, 1985.
- [25] Zdenek P. Bazant. Fracture in concrete and reinforced concrete. *Mechanics of geomaterials*, pages 259–303, 1985.
- [26] Zdenek P. Bazant. Mechanics of distributed cracking. *Appl. Mech. Rev*, 39(5):675–705, May 1986.
- [27] Zdenek P. Bazant and Sang-Sik K. Plastic-fracturig theory concrete. *Journal Of the Engineering Mechanics Division*, 105(3):407–428, Aug 1979.
- [28] Zdenek P. Bazant and B.H. Oh. Crack band theory for fracture of concrete. *Matériaux et Construction*, 16(3):155–177, 1983.
- [29] C. Bekas and Y. Saad. Computation of smallest eigenvalues using spectral schur complements. *SIAM J. Sci. Comput.*, 27(2):458–481, August 2005.

- [30] T. Belytschko and T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5):601–620, 1999.
- [31] T. Belytschko, J. Fish, and B. E. Engelmann. A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70(1):59 – 89, 1988.
- [32] T. Belytschko, W.K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons, 2000.
- [33] T. Belytschko, S. Loehnert, and J. H. Song. Multiscale aggregating discontinuities: A method for circumventing loss of material stability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(6):869–894, 2008.
- [34] T. Belytschko and M. O. Neal. Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and lagrangian methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(3):547–572, 1991.
- [35] T. Belytschko and M. Tabbara. H-adaptive finite element methods for dynamic problems, with emphasis on localization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(24):4245–4265, 1993.
- [36] Ted Belytschko, Hao Chen, Jingxiao Xu, and Goangseup Zi. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(12):1873–1905, 2003.
- [37] J. M. Bennett. Triangular factors of modified matrices. *Numerische Mathematik*, 7(3):217–221, 1965.
- [38] J. Bennighof. Vibroacoustic frequency sweep analysis using automated multi-level substructuring. In *Proceedings of the AIAA 40th SDM Conference, St. Louis, Missouri*, 1999.
- [39] J. Bennighof and M. Kaplan. Frequency sweep analysis using multi-level substructuring, global modes and iteration. In *Proceedings of the AIAA 39th SDM Conference, Long Beach, Ca.*, 1998.
- [40] J. Bennighof, M. Kaplan, and M. Muller. Extending the frequency response capabilities of automated multilevel substructuring. In *Proceedings of the AIAA 41th SDM Conference.*, 2000.
- [41] J. Bennighof and C. Kim. An adaptative multi-level substructuring method for efficient modeling of complex structures. In *Proceedings of the AIAA 33th SDM Conference, Texas.*, pages 1631–1639, 1992.
- [42] J. Bennighof and R. Lehoucq. An automated multilevel substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(6):2084–2106, 2004.
- [43] G. Best. A method of structural weight minimization suitable for high speed digital computers. *AIAA*, 1:478–479, 1963.
- [44] W. B. Bickford. An improved perturbation technique for eigenvalues of continuous systems. *Communications in Applied Numerical Methods*, 7(2):103–110, 1991.
- [45] D. Bigoni and T. Hueckel. Uniqueness and localization—i. associative and non-associative elastoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 28(2):197 – 213, 1991.
- [46] J. Bonet. *NonLinear Continuum Mechanics For Finite Elements Analysis*. Press Syndicate U.C., 1 edition, 1997.

- [47] J. Bonet and J. Peraire. An alternating digital tree (adt) algorithm for 3d geometric searching and intersection problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(1):1–17, 1991.
- [48] R. de Borst. Simulation of strain localization: A reappraisal of the cosserat continuum. *Engineering Computations*, 8:317–332, 1991.
- [49] R. de Borst. Some recent issues in computational failure mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(1-2):63–95, 2001.
- [50] R. de Borst, J. J. C. Remmers, A. Needleman, and M. A. Abellan. Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(7-8):583–607, 2004.
- [51] P.O. Bouchard, F. Bay, Y. Chastel, and I. Tovenca. Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189(3):723 – 742, 2000.
- [52] W.A.M. Brekelmans and J.H.P. Vree. Reduction of mesh sensitivity in continuum damage mechanics. *Acta Mechanica*, 110(1-4):49–56, 1995.
- [53] P . G . Bonnier C . E . Heaney, R . B . J . Brinkgreve and M . A . Hicks. Adaptive mesh refinement for strain-softening materials in geomechanics. *Installation Effects in Geotechnical Engineering*, pages 8–14, 2013.
- [54] Hadrien C., Hoeryong J., Jérémie A., Christian D., Doo Y. L., and Stéphane C. Gpu-based real-time soft tissue deformation with cutting and haptic feedback. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 103(2–3):159 – 168, 2010. Special Issue on Biomechanical Modelling of Soft Tissue Motion.
- [55] S. Mariani C. Comi and U. Perego. From localized damage to discrete cohesive crack propagation in nonlocal continua. *Fifth World Congress on Computational Mechanics, WCCM V, H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer y J. Eberhardsteiner (Eds.), Vienna, Austria,, 2002.*
- [56] G.T. Camacho and M. Ortiz. Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20–22):2899 – 2938, 1996.
- [57] S. Hartmann R. Weyler J. Oliver J.C. Cante and J.A. Hernández. A 3d frictionless contact domain method for large deformation problems. *CMES*, 55(16):211–269, 2010.
- [58] J. M. Carbonell. PhD thesis, UPC Barcelona, 2012.
- [59] Carneiro. A new method to determine the tensile strength of concrete. in: Paper presented at the proceedings of the 5th meeting of the brazilian association for technical rules. *Associação Brasileira de Normas Técnicas—ABNT, 3d. section*, 1943.
- [60] N. J. Carpenter, R. L. Taylor, and M. G. Katona. Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(1):103–128, 1991.
- [61] A. Carpinteri. Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties. *Mechanics of Materials*, 18(2):89 – 101, 1994. Special Issue on Microstructure and Strain Localization in Geomaterials.

- [62] B. J. Carter, E. Z. Lajtai, and A. Petukhov. Primary and remote fracture around underground cavities. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 15(1):21–40, 1991.
- [63] B. J. Carter, E. Z. Lajtai, and Y. Yuan. Tensile fracture from circular cavities loaded in compression. *International Journal of Fracture*, 57(3):221–236, 1992.
- [64] F. G. Castillo. Metodos de elementos finitos mixtos con deformaciones supuestas en elastoplasticidad. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid, 1999.
- [65] R. ; Cervenka V.; Eligehausen and Pukl R. Computer models of concrete structures. *IABSE Colloquium, Stuttgart*, pages 311 – 320, 1991.
- [66] M. Cervera. An orthotropic mesh corrected crack model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(17–18):1603 – 1619, 2008.
- [67] M. Cervera. A smeared-embedded mesh-corrected damage model for tensile cracking. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76(12):1930–1954, 2008.
- [68] M. Cervera and M. Chiumenti. Mesh objective tensile cracking via a local continuum damage model and a crack tracking technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 196:304–320, 2006.
- [69] M. Cervera and M. Chiumenti. Size effect and localization in {J2} plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 46(17):3301 – 3312, 2009.
- [70] M. Cervera, M. Chiumenti, and C. Agelet de Saracibar. Softening, localization and stabilization: capture of discontinuous solutions in j2 plasticity. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(5):373–393, 2004.
- [71] M. Cervera, M. Chiumenti, L. Benedetti, and R. Codina. Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics. part iii: Compressible and incompressible plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 285(0):752 – 775, 2015.
- [72] M. Cervera, M. Chiumenti, and D. Di Capua. Benchmarking on bifurcation and localization in {J2} plasticity for plane stress and plane strain conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 241–244(0):206 – 224, 2012.
- [73] M. Cervera, M. Chiumenti, and R. Codina. Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics: Part ii: Strain localization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(37–40):2571 – 2589, 2010.
- [74] M. Cervera, M. Chiumenti, and R. Codina. Mesh objective modeling of cracks using continuous linear strain and displacement interpolations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87(10):962–987, 2011.
- [75] M. Cervera, M. Chiumenti, and C. Agelet de Saracibar. Shear band localization via local {J2} continuum damage mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(9–11):849 – 880, 2004.
- [76] M. Cervera, L. Pelà, R. Clemente, and P. Roca. A crack-tracking technique for localized damage in quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(13):2431 – 2450, 2010.

- [77] M. Cervera and J.-Y. Wu. On the conformity of strong, regularized, embedded and smeared discontinuity approaches for the modeling of localized failure in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 71:19 – 38, 2015.
- [78] CHACO. Software for partitioning graphs. <http://www.sandia.gov/bahendr/chaco.html>. 1993.
- [79] R. Chambon, S. Crochepeyre, and J. Desrues. Localization criteria for non-linear constitutive equations of geomaterials. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 5(1):61–82, 2000.
- [80] K. C. Chellamuthu and N. Ida. Algorithms and data structures for 2D and 3D adaptive finite element mesh refinement. *Finite Elements in Analysis and Design*, 17(3):205–229, 1994.
- [81] P. Chen, H. Li, S. Sun, and M. Yuan. A fast construction sequential analysis strategy for tall buildings. *Struct Eng Mech*, 6(23):675–690, 2006.
- [82] S. Chen, D. Song, and A. Ma. Eigensolution reanalysis of modified structures using perturbations and rayleigh quotients. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 10(2):111–119, 1994.
- [83] S. Chen and Z. J. Yang. A universal method for structural static reanalysis of topological modifications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(5):673–686, 2004.
- [84] S. H. Chen, X. M. Wu, and Z. J. Yang. Eigensolution reanalysis of modified structures using epsilon-algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(13):2115–2130, 2006.
- [85] S.H. Chen, X.W. Yang, and H.D. Lian. Comparison of several eigenvalue reanalysis methods for modified structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 20(4):253–259, 2000.
- [86] Y. C. Chen. On strong ellipticity and the legendre-hadamard condition. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 113(2):165–175, 1991.
- [87] M. Chiumenti, M. Cervera, and R. Codina. A mixed three-field {FE} formulation for stress accurate analysis including the incompressible limit. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283(0):1095 – 1116, 2015.
- [88] M. Chiumenti, Q. Valverde, C. Agelet de Saracibar, and M. Cervera. A stabilized formulation for incompressible elasticity using linear displacement and pressure interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(46):5253 – 5264, 2002.
- [89] P. Cicala. Effect of local of cut-outs in semimonocoque structures. *Journal of Aeronautical Sciences*, 3(15):171, 194.
- [90] R. Clemente, M. Cervera Ruiz, and P. Roca Fabregat. El modelo de daño localizado aplicado al análisis de estructuras de obra de fábrica. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, 24(1):67–91, 2008.
- [91] R.W. Clough. The stress distribution of norfolk dam. *Materials Research, Department of Civil Engineering Series 100, 19, University of California, Berkeley, California, USA*, 100(19), 1962.
- [92] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. Asymptotic–numerical methods and pade approximants for non-linear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(7):1187–1213, 1994.

- [93] R. Codina. A finite element model for incompressible flow problems. PhD thesis, UPC Barcelona, 1992.
- [94] R. Codina. Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite elements methods. *Comput. Meth Appl Mech Eng*, 190:1579–1599, 2000.
- [95] R. Codina. Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(39–40):4295 – 4321, 2002.
- [96] R. Codina and J. Blasco. A finite element method for the stokes problem allowing equal velocity-pressure interpolations. *Comput. Meth Appl Mech Eng*, 143:373–391, 1997.
- [97] R. Codina, J. Principe, and J. Baiges. Subscales on the element boundaries in the variational two-scale finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(5–8):838 – 852, 2009.
- [98] R. Codina, J. Principe, O. Guasch, and S. Badia. Time dependent subscales in the stabilized finite element approximation of incompressible flow problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(21–24):2413 – 2430, 2007.
- [99] M.G. Cottrell, J. Yu, Z.J., and Wei D.R.J. Owen. The numerical modelling of ceramics subject to impact using adaptive discrete element techniques. *Engineering Computations*, 20(1):757–766, 2003.
- [100] H. L. De Cougny and M. S. Shephard. Parallel refinement and coarsening of tetrahedral meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(7):1101–1125, 1999.
- [101] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 1. JOHN WILY & SONS, 1 edition, 1991.
- [102] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 2. JOHN WILY & SONS, 1 edition, 1991.
- [103] P Dadvand, R. Rossi, M. Gil, X. Martorell, J. Cotela, E. Juanpere, S.R. Idelsohn, and E. Oñate. Migration of a generic multi-physics framework to hpc environments. *Computers & Fluids*, 80(0):301 – 309, 2013.
- [104] P Dadvand, R. Rossi, and E. Oñate. An object-oriented environment for developing finite element codes for multi-disciplinary applications. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(3):253–297, 2010.
- [105] D. Darwin and D. A. Pecknold. Analysis of rc shear panels under cyclic loading. *Journal of the Structural Division*, 102(2):335 – 369, 1976.
- [106] R. De Borst. Some recent developments in computational modelling of concrete fracture. *International Journal of Fracture*, 86(1-2):5–36, 1997.
- [107] R. De Borst and H. B Mühlhaus. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(3):521–539, 1992.
- [108] R. de Borst and P. Nauta. Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. *Engineering Computations*, pages 35–46, 1985.

- [109] Neto E. A. de Souza, Pires F. M. Andrade, and Owen D. R. J. F-bar-based linear triangles and tetrahedra for finite strain analysis of nearly incompressible solids. part i: formulation and benchmarking. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(3):353–383, 2005.
- [110] J.H.P. de Vree, W.A.M. Brekelmans, and M.A.J. van Gils. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers & Structures*, 55(4):581 – 588, 1995.
- [111] J. J. Jiménez Delgado. Detección de colisiones mediante recubrimientos simpliciales. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Septiembre 2006.
- [112] L. Demkowicz, Ph. Devloo, and J.T. Oden. On an h-type mesh-refinement strategy based on minimization of interpolation errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 53(1):67 – 89, 1985.
- [113] M.A. Dokainish and K. Subbaraj. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—i. explicit methods. *Computers & Structures*, 32(6):1371 – 1386, 1989.
- [114] J. Donea and A. Huerta. *Finite Element Methods for Flow Problems*. Wiley, 1 edition, June 2003.
- [115] G. Donida, R. Bernetti, and R. Bruschi. The penalty function method for problems of contact. *Computers & Structures*, 36(4):777 – 782, 1990.
- [116] J. Dubé, G. Pijaudier-Cabot, and C. Borderie. Rate dependent damage model for concrete in dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, 122(10):939–947, 1996.
- [117] D.S. Dugdale. Yielding of steel seats containing slits. *J. Mech. Phys Solida*, 9:100–104, 1960.
- [118] E. N. Dvorkin, A. M. Cuitiño, and G. Gioia. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30(3):541–564, 1990.
- [119] E.J. Dzik and E.Z. Lajtai. Primary fracture propagation from circular cavities loaded in compression. *International Journal of Fracture*, 79(1):49–64, 1996.
- [120] P. Díez, M. Arroyo, and A. Huerta. Adaptivity based on error estimation for viscoplastic softening materials. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 5(2):87–112, 2000.
- [121] Petersson P. E. A model for calculation of crack growth in concrete-like materials. *Numerical Methods in Fracture Mechanics*, pages 707–719, 1980.
- [122] Petersson P. E. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. *Report TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Sweden*, 1981.
- [123] W.F. Bawden E. Hoek, P.K. Kaiser. *Support of Underground Excavations in Hard Rock*. CRC Press, 2000.
- [124] T. Ekevid and Nils-Erik Wiberg. A comparison of parallel implementation of explicit dg and central difference method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 18(8):585–597, 2002.
- [125] C. Elman and D. O’Leary. Krylov subspace methods for the eigenproblem. In Misha E. Kilmer and Dianne P. O’Leary, editors, *G.W. Stewart, Contemporary Mathematicians*, pages 111–119. Birkhäuser Boston, 2010.

- [126] D.J. Evans. On preconditioned iterative methods for solving $(a-b)x=0$. *Computing*, 32(2):139–152, 1984.
- [127] R.T. Ewy and N.G.W. Cook. Deformation and fracture around cylindrical openings in rock—ii. initiation, growth and interaction of fractures. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 27(5):409 – 427, 1990.
- [128] Walsh P F. Fracture of plain concrete. *Indian Concrete Journal*, 46: 11, 1972.
- [129] Walsh P F. Crack initiation in plain concrete. *Mag. Concrete Res*, 28:37–41, 1976.
- [130] Wang F, Cheng J., and Yao Z. A contact searching algorithm for contact-impact problems. *Acta Mechanica Sinica*, 16:374–382, 2000. 10.1007/BF02487690.
- [131] F. Brezzi, M. Fortin, D. Marini. Mixed finite element methods. *Springer*, 1991.
- [132] D. Cendón Franco Y V. Sánchez Gálvez F. Gálvez Díaz Rubio. Modelización numérica de la fractura en ensayos brasileños de materiales cerámicos a alta velocidad de deformación. *Anales de Mecánica de la Fractura*, 20:59–64, 2003.
- [133] Y. T. Feng and D. R. J. Owen. An augmented spatial digital tree algorithm for contact detection in computational mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(2):159–176, 2002.
- [134] J. Fineberg, E. Sharon, and G. Cohen. Crack front waves in dynamic fracture*. *International Journal of Fracture*, 121(1-2):55–69, 2003.
- [135] M. FLEMING, Y. A. CHU, B. MORAN, and T. BELYTSCHKO. Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(8):1483–1504, 1997.
- [136] F. Flores. Una estrategia para el análisis pseudo-estático de problemas con ablandamiento usando un integrador explícito. *Mecánica Computacional*, XXX:875–890, 2011.
- [137] S.J. Foster, B. Budiono, and R.I. Gilbert. Rotating crack finite element model for reinforced concrete structures. *Computers & Structures*, 58(1):43–50, 1996.
- [138] R.L. Fox and H. Miura. An approximate analysis technique for design calculations. *AIAA*, 9:171–179, 1971.
- [139] J. A. Franklin. Triaxial strength of rock materials. *Rock mechanics*, 3(2):86–98, 1971.
- [140] G. Frantziskonis, C. Desai, and S. Somasundaram. Constitutive model for nonassociative behavior. *Journal of Engineering Mechanics*, 112(9):932–946, 1986.
- [141] Hondros G. The evaluation of poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete. *Aust J Appl Sci*, 10(3):243–268, 1959.
- [142] U. Nackenhorst G. Zavarise, P. Wriggers. *A Guide for Engineers to Computational Contact Mechanics*. The TCN Series on Simulation Based Engineering and Sciences, 2006.

- [143] M. Galic, P. Marovic, and Zeljana N. Modified mohr-coulomb – rankine material model for concrete. *Engineering Computations*, 28:853 – 887, 2011.
- [144] F. Ganovelli, F. Ponchio, and C. Rocchini. Fast tetrahedron-tetrahedron overlap algorithm. *ACM Journal of Graphics Tools*, 7:2003, 2003.
- [145] W. Gao, X. S. Li, C. Yang, and Z. Bai. An implementation and evaluation of the amls method for sparse eigenvalue problems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 34(4):20:1–20:28, July 2008.
- [146] T. C. Gasser and G. A. Holzapfel. Modeling 3d crack propagation in unreinforced concrete using {PU-FEM}. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(25–26):2859 – 2896, 2005.
- [147] N.C. Gay. Fracture growth around openings in large blocks of rock subjected to uniaxial and biaxial compression. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 13(8):231 – 243, 1976.
- [148] GiD. The personal pre and post processor. 2009.
- [149] A.J. Gil, Chun H. L., J. Bonet, and M. Aguirre. Stabilised petrov–galerkin formulation for linear tetrahedral elements in compressible, nearly incompressible and truly incompressible fast dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 276(0):659 – 690, 2014.
- [150] R.V. Goldstein and R.L. Salganik. Brittle fracture of solids with arbitrary cracks. *International Journal of Fracture*, 10(4):507–523, 1974.
- [151] T. Gratsch and K. J. Bathe. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Computers & Structures*, 83(4-5):235–265, 2005.
- [152] A. A. Griffith. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 221, 1921.
- [153] R. Grosso, C. Lurig, and T. Ertl. The multilevel finite element method for adaptive mesh optimization and visualization of volume data. In *Visualization '97., Proceedings*, pages 387–394, 1997.
- [154] Ajaya K. Gupta and Habibollah Akbar. Cracking in reinforced concrete analysis. *Journal of Structural Engineering*, (8):1735–1746, 1984.
- [155] Guzina, Bojan B., Rizzi, Egidio, William, Kaspar Pak, and Ronald Y.S. Failure prediction of smeared crack formulations. *J. Engng. Mech.*, (1):150–161, 1995.
- [156] Q. M. Valverde Guzmán. Elementos estabilizados de bajo orden en mecánica de sólidos. PhD thesis, UPC Barcelona, 2002.
- [157] J. C. Gálvez, D. A. Cendón, and J. Planas. Influence of shear parameters on mixed-mode fracture of concrete. *International Journal of Fracture*, 118:163–189, 2002.
- [158] J. C. Gálvez, D. A. Cendón, J. Planas, and M. Elices. Fractura en modo mixto de probetas de hormigón con doble entalla bajo sollicitación de compresión: Simulación numérica. *Mecánica de la Fractura*, 18:219–225, 2001.
- [159] J. C. Gálvez, M. Elices, G.V Guinea, and J. Planas. Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading. *International Journal of Frature*, 94:267–284, 1998.

- [160] J.C. Gálvez, J. Cervenka, D.A. Cendón, and V. Saouma. A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete. *Cement and Concrete Research*, 32(10):1567 – 1585, 2002.
- [161] Hertel R.; Kronmuller H. Adaptive Finite Element Mesh Refinement Techniques in Three-Dimensional Micromagnetic Modeling. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(6):3922–3930, Nov 1998.
- [162] Lee E. H. Elastic-plastic deformation at finite strains. *ASME. J. Appl. Mech*, 36(1):1 – 6, 1969.
- [163] Nilson A. H. Nonlinear analysis of reinforced concrete by finite element method. *ACI JOURNAL, Proceedings*, 65(9):757,766, 1968.
- [164] J. Yin H. Voss and P. Chen. Enhancing eigenvector approximations of huge gyroscopic eigenproblems from amls with subspace iteration. 1(1):1–8, 2012.
- [165] F. R. Hall and D. R. Hayhurst. Modelling of grain size effects in creep crack growth using a non-local continuum damage approach. *Proc R Soc A*, 433:405–421, 1991.
- [166] J.O. Hallquist, D.J. Benson, and Lawrence. *DYNA3D User's Manual: (Nonlinear Dynamic Analysis of Structures in Three Dimensions)*. University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, 1986.
- [167] A. D. Hanganu, E. Oñate, and A. H. Barbat. A finite element methodology for local/global damage evaluation in civil engineering structures. *Computers and Structures*, 80:1667–1687, 2002.
- [168] A. Hansbo and P. Hansbo. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(33–35):3523 – 3540, 2004.
- [169] J. Har and Robert E. Fulton. A parallel finite element procedure for contact-impact problems. *Engineering with Computers*, 19:67–84, 2003. 10.1007/s00366-003-0252-4.
- [170] J. J. He, J. S. Jiang, and B. Xu. Modal reanalysis methods for structural large topological modifications with added degrees of freedom and non-classical damping. *Finite Elem. Anal. Des.*, 44(1-2):75–85, December 2007.
- [171] J.J. He, J.S. Jiang, and B. Xu. Modal reanalysis methods for structural large topological modifications with added degrees of freedom and non-classical damping. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44(1–2):75 – 85, 2007.
- [172] M. W. Heinstein, S. W. Attaway, J. W. Swegle, and F. J. Mello. A general-purpose contact detection algorithm for nonlinear structural analysis codes. *NASA STI/Recon Technical Report N*, 94:19039, May 1993.
- [173] M. W. Heinstein, F. J. Mello, S. W. Attaway, and T. A. Laursen. Contact—impact modeling in explicit transient dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187(3–4):621 – 640, 2000.
- [174] A. Díaz Morcillo; L. Nuño; J. V. Balbastre; D. Sánchez Hernández;. Adaptive mesh refinement in electromagnetic problems. Oct 2000.

- [175] A. Hillerborg, M. Mod  er, and P. E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6):773 – 781, 1976.
- [176] Petersson P.E Hillerborg A., Modeer M. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of f.m. and finite elements. *Cement and concrete research*, 1976.
- [177] I. Hirai, T. Yoshimura, and K. Takamura. On a direct eigenvalue analysis for locally modified structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 6(3):441–442, 1973.
- [178] Westergaard H.M. Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 6, 1939.
- [179] N. Jansson; J. Hoffman and J. Jansson. Parallel Adaptive FEM CFD. *Technical Report KTH-CTL-4008, Computational Technology Laboratory*, 2010.
- [180] C. Huang, S. H. Chen, and Z. Liu. Structural modal reanalysis for topological modifications of finite element systems. *Engineering Structures*, 22(4):304–310, 2000.
- [181] C. Huang and G. Verchery. An exact structural static reanalysis method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13(2):103–112, 1997.
- [182] T. J. R. Hughes. Equivalence of finite elements for nearly incompressible elasticity. *J. Appl. Mech*, 44, 1977.
- [183] T. J. R. Hughes. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(9):1413–1418, 1980.
- [184] T. J. R. Hughes, G. Scovazzi, and L. P. Franca. *Multiscale and Stabilized Methods*. John Wiley & Sons, Ltd, 2004.
- [185] T. J.R. Hughes. Multiscale phenomena: Green’s functions, the dirichlet-to-neumann formulation, sub-grid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1–4):387 – 401, 1995.
- [186] T. J.R. Hughes, G. R. Feij  o, L. Mazzei, and J. B. Quincy. The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166(1–2):3 – 24, 1998. Advances in Stabilized Methods in Computational Mechanics.
- [187] T. J.R. Hughes, R. L. Taylor, J. L. Sackman, A. Curnier, and W. Kanoknukulchai. A finite element method for a class of contact-impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 8(3):249 – 276, 1976.
- [188] G. M. Hulbert and J. Chung. Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137(2):175–188, 1996.
- [189] Reinhardt H.W, Cornelissen H.A.W, and D.A Hordijk. Tensile test and failure analysis of concrete. *J. Struct. Eng (ASCE)*, 112(11), 1986.
- [190] T. Inamura. Eigenvalue reanalysis by improved perturbation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(1):167–181, 1988.

- [191] A. R. Ingraffea and W. H. Gerstle. *Non-Linear Fracture Models for Discrete Crack Propagation*, volume 94 of *NATO ASI Series*. Springer Netherlands, 1985.
- [192] A.R. Ingraffea and V. Saouma. *Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete*, volume 4 of *Engineering Application of Fracture Mechanics*. Springer Netherlands, 1984.
- [193] M. M. Iordache and K. Willam. Localized failure analysis in elastoplastic cosserat continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151(3–4):559 – 586, 1998. Containing papers presented at the Symposium on Advances in Computational Mechanics.
- [194] G.R. Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of cracking traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24:361–364, 1957.
- [195] Mark T. J. and P. E. Plassmann. Adaptive refinement of unstructured finite-element meshes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25(1-2):41–60, 1997. Adaptive Meshing, Part 1.
- [196] Marsden J. and Hughes T. *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice Hall, Enlewood Cliffs, 1983.
- [197] Milan J. and T. Belytschko. Fifth world congress on computational mechanics. *Computational Resolution of Strong Discontinuities*, 2002.
- [198] Milan J. and P. Grassl. Evaluation of directional mesh bias in concrete fracture simulations using continuum damage models. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(8):1921 – 1943, 2008.
- [199] Rots J.G. Computational modeling of concrete fracture. Dissertation. Delf University of Technology, 1988.
- [200] J. P. Latham Jiansheng X., A. Munjiza and R. Guises. On the validation of dem and fem/dem models in 2d and 3d. *Engineering Computations*, 26(4):673 – 687, 2009.
- [201] M. Jirásek. Nonlocal models for damage and fracture: Comparison of approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 35(31–32):4133 – 4145, 1998.
- [202] M. Jirásek. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(1–3):307 – 330, 2000.
- [203] M. Jirásek. Objective modeling of strain localization. *Revue Française de Génie Civil*, 6(6):1119–1132, 2002.
- [204] M. Jirásek and T. Zimmermann. Embedded crack model: I. basic formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(6):1269–1290, 2001.
- [205] M. Jirásek and T. Zimmermann. Embedded crack model. part ii: combination with smeared cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(6):1291–1305, 2001.
- [206] Raizer A. ; Meunier G.; Coulomb J.L. An approach for automatic adaptive mesh refinement in finite element computation of magnetic fields. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25(4):2965–2967, Jul 1989.
- [207] G. R. Johnson and R. A. Stryk. Eroding interface and improved tetrahedral element algorithms for high-velocity impact computations in three dimensions. *International Journal of Impact Engineering*, 5(1–4):411 – 421, 1987. Hypervelocity Impact Proceedings of the 1986 Symposium.

- [208] P. Jäger, P. Steinmann, and E. Kuhl. On local tracking algorithms for the simulation of three-dimensional discontinuities. *Computational Mechanics*, 42(3):395–406, 2008.
- [209] Noor A. K. Recent advances and applications of reduction methods. *Appl. Mech. Rev.*, 5(47):125–146, 1994.
- [210] F. Kaplan. *Crack Propagation and the Fracture of Concrete*. South African Council for Scientific and Industrial Research, 1961.
- [211] M. Kashiwagi. A numerical method for eigensolution of locally modified systems based on the inverse power method. *Finite Elem. Anal. Des.*, 45(2):113–120, January 2009.
- [212] D.; Kesler, C.; Naus and Lott J. Fracture mechanics.its applicability to concrete. IV:113–124, 1972.
- [213] N. Kikuchi and J.T. Oden. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. SIAM studies in applied mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [214] H. G. Kim and S. Im. Adaptive mesh refinement procedure for shear localization problems. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 20(12):2189–2196, 2006.
- [215] B. S. Kirk, J. W. Peterson, R. H. Stogner, and G. F. Carey. libMesh: A C++ Library for Parallel Adaptive Mesh Refinement/Coarsening Simulations. *Engineering with Computers*, 22(3–4):237–254, 2006.
- [216] U. Kirsch. Implementation of combined approximations in structural optimization. *Computers & Structures*, 78(1–3):449 – 457, 2000.
- [217] U. Kirsch. *Reanalysis of Structures: A Unified Approach for Linear, Nonlinear, Static and Dynamic Systems*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2008.
- [218] U. Kirsch. Reanalysis and sensitivity reanalysis by combined approximations. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 40(1-6):1–15, 2010.
- [219] U. Kirsch and M. Bogomolni. Procedures for approximate eigenproblem reanalysis of structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(12):1969–1986, 2004.
- [220] U. Kirsch and P.Y. Papalambros. Structural reanalysis for topological modifications – a unified approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(5):333–344, 2001.
- [221] U. Kirsch and M. F. Rubinstein. Structural reanalysis by iteration. *Computers & Structures*, 2(4):497 – 510, 1972.
- [222] P. A. Klerck. The finite element modelling of discrete fracture in quasi-brittle materials. Ph.D. Thesis. University of Wales Swansea, Jun 2000.
- [223] P.A. Klerck, E. J. Sellers, and D.R.J. Owen. Discrete fracture in quasi-brittle materials under compressive and tensile stress states. *Comut. Methods Appl. Mech. Engrg*, 193:3035–3056, 2004.
- [224] I. Kossaczky. A recursive approach to local mesh refinement in two and three dimensions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 55(3):275–288, 1994.

- [225] P. Kołakowski, M. Wikło, and J. Holnicki-Szulc. The virtual distortion method—a versatile reanalysis tool for structures and systems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 36(3):217–234, 2008.
- [226] A. Kropp and D. Heiserer. Efficient broadband vibro-acoustic analysis of passenger car bodies using an fe-based component mode synthesis approach. *Journal of Computational Acoustics*, 11(02):139–157, 2003.
- [227] Anwei L. and Barry J. Quality Local Refinement of Tetrahedral Meshes Based on Bisection. 16(6):1269–1291, 1995.
- [228] Bibiana M. L., S. Oller, and R. F. Danesi. Modelo de daño y plasticidad acoplados. *Mecánica Computacional*, 14:170–179, 1994.
- [229] V. Saouma L. Jendele, J. Cervenka and R. Pukl. On the choice between discrete or smeared approach in practical structural fe analyses of concrete structures. *University of Colorado at Boulder, U.S.A.*
- [230] P. V. Lade. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 13(11):1019 – 1035, 1977.
- [231] Emery Z. Lajtai, Bruce J. Carter, and E.J. Scott Duncan. Mapping the state of fracture around cavities. *Engineering Geology*, 31(3–4):277 – 289, 1991.
- [232] E.Z. Lajtai and V.N. Lajtai. The collapse of cavities. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 12(4):81 – 86, 1975.
- [233] L. Lam and D.G. Fredlund. Saturated-unsaturated transient finite element seepage model for geotechnical engineering. *Advances in Water Resources*, 7(3):132 – 136, 1984.
- [234] T.A. Laursen. *Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Engineering Online Library. Springer, 2003.
- [235] D.N Le. Extending deterministic vibration analysis of the ships into the medium frequency range. PhD thesis, Institute of Numerical Simulation, Hamburg University of Technology, 2009.
- [236] Y. Leroy and M. Ortiz. Finite element analysis of transient strain localization phenomena in frictional solids. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 14(2):93–124, 1990.
- [237] P. Level, Y. Gallo, T. Tison, and Y. Ravalard. On an extension of classical modal reanalysis algorithms: the improvement of initial models. *Journal of Sound and Vibration*, 186(4):551–560, 1995.
- [238] D. Li and L. N. Y. Wong. The brazilian disc test for rock mechanics applications: Review and new insights. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 46(2):269–287, 2013.
- [239] Z. Li and B. Wu. A preconditioned conjugate gradient approach to structural reanalysis for general layout modifications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70(5):505–522, 2007.
- [240] Y.-Y. Lian, K.-H. Hsu, Y.-L. Shao, Y.-M. Lee, Y.-W. Jeng, and J.-S. Wu. Parallel adaptive mesh-refining scheme on a three-dimensional unstructured tetrahedral mesh and its applications. *Computer Physics Communications*, 175(11-12):721–737, 2006.

- [241] C.M. Lopez and I. Carol. Fracture analysis of concrete microstructure using interface elements. *Anales de Mecanica la Fractura*, 12:197–202, 1995.
- [242] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. McMillan, New-York, 1990.
- [243] B. Luccioni and S. Oller. Modelo de daño direccionado para materiales anisotropos. *Mecánica Computacional*, 21:739–754, Oct 2002.
- [244] Kaplan M. Implementation of automated multilevel substructuring for frequency response analysis of structures. Ph.D thesis, University of Texas at Austin, 2001.
- [245] M. Chiumenti M. Cervera and R. Codina. Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics: Part i: Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(37–40):2559–2570, 2010.
- [246] T. A. Laursen M. W. Heinsteins, Frank J. Mello a. Augmented lagrangian algorithms for enforcement of contact constraints in explicit dynamic and matrix-free quasistatic applications. *Contact Mechanics, Ferrara Italy*, July 1995.
- [247] O.K. Mahabadi, B.E. Cottrell, and G. Grasselli. An example of realistic modelling of rock dynamics problems: Fem/dem simulation of dynamic brazilian test on barre granite. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 43(6):707–716, 2010.
- [248] D. S. Malkus and T. J.R. Hughes. Mixed finite element methods — reduced and selective integration techniques: A unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15(1):63 – 81, 1978.
- [249] O. A. Marques. Blzpack. block lanczos package. <http://crd-legacy.lbl.gov/osni/>. 1997.
- [250] X. Martinez, S. Oller, F. Rastellini, and A. H. Barbat. A numerical procedure simulating rc structures reinforced with frp using serial parallel mixing theory. *Computers and Structures*, 86:1604–1618, Jan 2008.
- [251] R.M. McMeeking and J.R. Rice. Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 11(5):601 – 616, 1975.
- [252] Melenk J.M. and Babuska I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1–4):289–314, dec 1996.
- [253] G. Meschke and P. Dumstorff. Energy-based modeling of cohesive and cohesionless cracks via x-fem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(21–24):2338 – 2357, 2007.
- [254] METIS. Serial graph partitioning and fill-reducing matrix ordering. <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis>. 1998.
- [255] C.; Meyer and K.-J. Bathe. Nonlinear analysis of r/c structures in practice. *J. Struct. Div., ASCE*, 108(ST7):1605 – 1622, 1982.
- [256] N. Moes, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4(1):131–150, 1999.

- [257] S. Mohammadi. *Discontinuum Mechanics Using Finite and Discrete Elements*. WIT Press, 1 edition, 2003.
- [258] J. Mosler and G. Meschke. Embedded crack vs. smeared crack models: a comparison of elementwise discontinuous crack path approaches with emphasis on mesh bias. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(30–32):3351 – 3375, 2004. Computational Failure Mechanics.
- [259] A. Munjiza. *The Combined Finite-Discrete Element Method*. John Wiley & Sons, 2004.
- [260] A. Munjiza and K. R. F. Andrews. Nbs contact detection algorithm for bodies of similar size. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(1):131–149, 1998.
- [261] A. Munjiza and K. R. F. Andrews. Penalty function method for combined finite discrete element systems comprising large number of separate bodies. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(11):1377–1396, 2000.
- [262] A. Munjiza, Earl E. Knight, and Esteban Rougier. *Computational Mechanics of Discontinua*. John Wiley & Sons, 2011.
- [263] A. Munjiza, E. Rougier, and N. W. M. John. Mr linear contact detection algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(1):46–71, 2006.
- [264] J.P. Munjiza, A. Latham. Some computational and algorithmic developments in computational mechanics of discontinua. In *Theme issue of Philosophical Transactions of the Royal Society, invited contribution*, pages 1817–135, 2004.
- [265] T. Möller. A fast triangle-triangle intersection test. *Journal of Graphics Tools*, 2:25–30, 1997.
- [266] Asano N. Hybrid type of virtual work principle for elastic impact contact problems. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. A*, 51(470):2317–2326, 1985-10-25.
- [267] J. Lovisa N. Sivakugan, B. M. Das and C. R. Patra. Determination of c and ϕ of rocks from indirect tensile strength and uniaxial compression tests. *International Journal of Geotechnical Engineering*, 8(1):59–65, 2014.
- [268] A. Nacar, A. Needleman, and M. Ortiz. A finite element method for analyzing localization in rate dependent solids at finite strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 73(3):235–258, September 1989.
- [269] J. C. Nagtegaal and J. E. De Jong. Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(1):15–41, 1981.
- [270] G. Abdin Nasreldin. Adaptive mesh refinement for localisation problems involving strain-softening geomaterials. PhD Thesis. The University of Manchester, 2009.
- [271] A. Needleman. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(1):69 – 85, 1988.
- [272] T.W.; Field D.A Nehl. Adaptive refinement of first order tetrahedral meshes for magnetostatics using local Delaunay subdivisions. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27(5):4193–4196, Sep 1991.
- [273] E.d.S. Neto and D.R.J. Peric. *Computational Methods for Plasticity*. Wiley, 2008.

- [274] D. Ngo and A. C. Scordelis. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *Journal Proceedings*, 64:152 – 163, 1967.
- [275] M.B. Nooru-Mohamed. Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach. PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 1992.
- [276] The University of Florida Sparse Matrix Collection. <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/>. 2015.
- [277] J. Oliver. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(2):461–474, 1989.
- [278] J. Oliver. Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models. *Computational Mechanics*, 17(1-2):49–61, 1995.
- [279] J. Oliver, M. Cervera, and O. Manzoli. On the use of strain-softening models for the simulation of strong discontinuities in solids. *material instabilities in solids*. Wiley, 46(17):107–123, 1998.
- [280] J. Oliver, M. Cervera, S. Oller, and J. Lubliner. Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. *Second International Conference On Computer Aided Analysis And Design Of Concrete Structure*, 2:945–958, Apr 1990.
- [281] J. Oliver, A. E. Huespe, E. Samaniego, and E. W. V. Chaves. Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(7-8):609–632, 2004.
- [282] J. Oliver and A.E. Huespe. Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(30–32):3195 – 3220, 2004. Computational Failure Mechanics.
- [283] J. Oliver and A.E. Huespe. Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(27–29):2987 – 3014, 2004. Computational Failure Mechanics for Geomaterials.
- [284] J. Oliver, A.E. Huespe, M.D.G. Pulido, and E. Chaves. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(2):113 – 136, 2002.
- [285] J. Oliver, A.E. Huespe, E. Samaniego, and E.W.V. Chaves. Elementos finitos con discontinuidades internas. estudio del bloque de tensiones y sus posibles soluciones. *MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA*, V, 2002.
- [286] J. Oliver, A.E. Huespe, and P.J. Sánchez. A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-fem vs x-fem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(37–40):4732 – 4752, 2006. J. H. Argyris Memorial Issue. Part I.
- [287] S. Oller. Un modelo de daño continuo para materiales friccionales. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña, Mayo 1988.
- [288] S. Oller. *Dinámica No-lineal*. CIMNE, 1 edition, Junio 2001.
- [289] S. Oller. *Fractura Mecánica. Un Enfoque Global*. CIMNE, 1 edition, Junio 2001.

- [290] ACI Committee 446 on Fracture Mechanics. *Finite Element Analysis of Fracture in Concrete Structures: State-of-the-art*. American Concrete Institute, 1997.
- [291] D. Organ, M. Fleming, T. Terry, and T. Belytschko. Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency. *Computational Mechanics*, 18(3):225–235, 1996.
- [292] J. Hernández Ortega. Numerical modeling of crack formation in power compaction processes. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña, 2011.
- [293] M. Ortiz, Y. Leroy, and A. Needleman. A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61(2):189 – 214, 1987.
- [294] S. Osher and J. A Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1):12 – 49, 1988.
- [295] N. Ottosen and M. Ristinmaa. *Mechanics of Constitutive Modeling*. ELSEVIER, 2005.
- [296] N. S. Ottosen and K. Runesson. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 27(4):401 – 421, 1991.
- [297] D. R. J. Owen, Y. T. Feng, E. A. Souza, Neto, and J. Yu. The modeling of multi-fracturing solids and particulate media. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 60:317–339, 2004.
- [298] E. Oñate, J. Rojek, R. L. Taylor, and O. C. Zienkiewicz. Finite calculus formulation for incompressible solids using linear triangles and tetrahedra. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(11):1473–1500, 2004.
- [299] E. Oñate, A. Valls, and J. García. Fic/fem formulation with matrix stabilizing terms for incompressible flows at low and high reynolds numbers. *Computational Mechanics*, 38(4-5):440–455, 2006.
- [300] Bazant Z. P. Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete. *J. Engrg. Mech. Div., ASCE*, 102(EM2):331 – 344, 1976.
- [301] Bazant Z. P and Cedolin. Blunt crack band propagation in finite element analysis. *J. Engrg. Mech., ASCE*, 105(2):297 – 315, 1979.
- [302] Bazant P. and Jaime Planas. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press, 1997.
- [303] M. Papadrakakis and M. Yakoumidakis. On the preconditioned conjugate gradient method for solving $(a - b)x = 0$. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(7):1355–1366, 1987.
- [304] Intel MKL PARDISO. Parallel direct sparse solver interface. <https://software.intel.com/en-us/node/470282>. 2013.
- [305] R. H. J. Peerlings, R. de Borst, W. A. M. Brekelmans, and M. G. D. Geers. Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 3(4):323–342, 1998.
- [306] S. R Phansalkar. Matrix iterative methods for structural reanalysis. *Comput. Struct*, 4:779–800, 1974.
- [307] St. Pietruszczak and Z. Mróz. Finite element analysis of deformation of strain-softening materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(3):327–334, 1981.

- [308] Gilles Pijaudier-Cabot and Zdenek P Bazant. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10):1512–1533, 1987.
- [309] R. J. Pine, D. R. J. Owen, J. S. Coggan, and J. M. Rance. A new discrete fracture modelling approach for rock masses. *Géotechnique*, 57:757–766(9), 2007.
- [310] J. Planas, A. M. Fathy, G. V. Guinea, and M. Elices. Análisis de un método de ensayo para determinar la curva de ablandamiento del hormigón. *Mecánica de la Fractura*, 22:565–570, 2005.
- [311] J. H. Prevost and B. Loret. Dynamic strain localization in elasto-(visco-)plastic solids, part 2. plane strain examples. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 83(3):275–294, 1990.
- [312] Zhongxiao P Qing Li, J. Loughran and J. Osborne. Parallel adaptive mesh refinement for incompressible flow problems. *Key Engineering Material*, pages 1157–1160, 2006.
- [313] De Borst R., L.J. Slyys, H. B. Muhlhaus, and J. Pamin. Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation. *Engineering Computations*, 10:99–121, 1993.
- [314] Feng R., Su Huan C., and Yu Dong C. Structural modal reanalysis for topological modifications with extended kirsch method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(5–6):697 – 707, 2003.
- [315] Timon R. Computational methods for fracture in brittle and quasi-brittle solids: State-of-the-art review and future perspectives. *ISRN Applied Mathematics*, 2013.
- [316] R. Gettu R. Fernández and A. Aguado. Análisis numérico de la fractura en el ensayo de tracción indirecta. *Anales de la Mecánica de la Fractura*, 19, 2002.
- [317] T. Rabczuk and T. Belytschko. An adaptive continuum/discrete crack approach for meshfree particle methods. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 1(1):141–166, 2003.
- [318] T. Rabczuk and T. Belytschko. Cracking particles: a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(13):2316–2343, 2004.
- [319] T. Rabczuk, S. Bordas, and G. Zi. On three-dimensional modelling of crack growth using partition of unity methods. *Computers & Structures*, 88(23–24):1391 – 1411, 2010. Special Issue: Association of Computational Mechanics – United Kingdom.
- [320] T. Rabczuk and E. Samaniego. Discontinuous modelling of shear bands using adaptive meshfree methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6–8):641 – 658, 2008.
- [321] W. Rachowicz and A. Zdunek. Automated multi-level substructuring (aml) for electromagnetics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(13–14):1224 – 1234, 2009. {HOFEM07} International Workshop on High-Order Finite Element Methods, 2007.
- [322] M. Ramulu and A.S. Kobayashi. Mechanics of crack curving and branching — a dynamic fracture analysis. In M.L. Williams and W.G. Knauss, editors, *Dynamic fracture*, pages 61–75. Springer Netherlands, 1985.
- [323] Y.R. Rashid. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, 7(4):334 – 344, 1968.

- [324] S.S.A. Ravi, T.K. Kundra, and B.C. Nakra. Single step eigen perturbation method for structural dynamic modification. *Mechanics Research Communications*, 22(4):363–369, 1995.
- [325] K. Ravi-Chandar. Dynamic fracture of nominally brittle materials. *International Journal of Fracture*, 90(1-2):83–102, 1998.
- [326] J. J. C. Remmers, R. de Borst, and A. Needleman. A cohesive segments method for the simulation of crack growth. *Computational Mechanics*, 31(1-2):69–77, 2003.
- [327] J. J.C. Remmers, R. de Borst, and A. Needleman. The simulation of dynamic crack propagation using the cohesive segments method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(1):70 – 92, 2008.
- [328] M. C Rivara. Mesh Refinement Processes Based on the Generalized Bisection of Simplices. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21(3):pp. 604–613, 1984.
- [329] C. Rocco, J. Planas G.V. Guinea, and M. Elices. Ensayo brasileño. efecto tamaño y mecanismo de rotura. *Anales de la Mecánica de la Fractura*, 13, 1996.
- [330] Mariana Rodríguez. Aplicaciones del análisis meso-mecánico con elementos juntas a probetas de hormigón sometidas a fractura en modo mixto y altas temperaturas. Tesina de Master. UPC, 2102.
- [331] R. Rossi, J. Cotela, N.M. Lafontaine, P. Dadvand, and S.R. Idelsohn. Parallel adaptive mesh refinement for incompressible flow problems. *Computers & Fluids*, 80(0):342 – 355, 2013.
- [332] J. G Rots, G. M. A Kusters P Nauta, and Blaauwendraad. Smeared crack approach and fracture localization in concrete. *Heron*, 30(1):1–48, 1985.
- [333] J.G. Rots and J. Blaauwendraad. Crack Models for Concrete, Discrete or Smeared? Fixed, Multi-Directional or Rotating? *Heron*, 34(1), 1989.
- [334] J.G. Rots and R. de Borst. Analysis of mixed mode fracture in concrete. *J. Engng. Mech.*, (11):1739–1758, 1987.
- [335] M. Bampton R.R. Craig. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA J.*, 6(7):1313–1319, 1968.
- [336] J.W. Rudnicki and J.R. Rice. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23(6):371 – 394, 1975.
- [337] K. Runesson, N. S. Ottosen, and P. Dunja. Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *International Journal of Plasticity*, 7(1–2):99 – 121, 1991.
- [338] Qi S., P. Chen, and S. Sun. An exact reanalysis algorithm for local non-topological high-rank structural modifications in finite element analysis. *Computers & Structures*, 143(0):60 – 72, 2014.
- [339] Zihai S. Numerical analysis of mixed-mode fracture. *Journal of Structural Engineering*, 130(11):1738–1747, 2004.
- [340] E. Samaniego. Contributions to the continuum modelling of strong discontinuities in two-dimensional solids. PhD thesis, UPC Barcelona, 2003.

- [341] V.E. Saouma and A.R. Ingraffea. Fracture mechanics analysis of discrete cracking. *Proceedings, IABSE Colloquium on Advanced Mechanics of Reinforced Concrete.*, pages 393–416, 1981.
- [342] E. Schlangen and J.G. Van Mier. Mixed-mode fracture propagation: a combined numerical and experimental study. *H.P. Rossmanith (Ed.), Fracture and Damage of Concrete and Rock, E & FN Spon, London*, pages 166 – 175, 1993.
- [343] SCOTCH. Software package and libraries for sequential and parallel graph partitioning, static mapping and clustering, sequential mesh and hypergraph partitioning, and sequential and parallel sparse matrix block ordering. <http://www.labri.fr/perso/pelegrin/scotch>. 1998.
- [344] G. Scovazzi. Lagrangian shock hydrodynamics on tetrahedral meshes: A stable and accurate variational multiscale approach. *Journal of Computational Physics*, 231(24):8029 – 8069, 2012.
- [345] P. Seshu. Substructure and component mode synthesis. *Shock and Vibration*, 4:199–210, 1997.
- [346] J. A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science ... on Applied and Computational Mathematics*. Cambridge University Press, 2 edition, June 1999.
- [347] E. G. Sewell. Automatic generation of triangulation for piecewise polynomial approximation. Ph. D. Thesis Purdue Univ., West Lafayette, Jan 1972.
- [348] Chen S.H. and Lin Y.L. Matrix perturbation of vibration analysis. *Proc. 2-nd IMAC*, pages 698–704, 1984.
- [349] Fineberg J. Sharon E. Microbranching instability and the dynamic fracture of brittle materials. *Phys Rev Lett*, 54(10):7128–7139, 1996.
- [350] Fineberg J. Sharon E, Gross SP. Local crack branching as a mechanism for instability in dynamic fracture. *Phys Rev Lett*, 75(25):5096–5099, 1995.
- [351] G.C. Sih. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, 10(3):305–321, 1974.
- [352] J. C. Simo and T. J. R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, New-York, 1998.
- [353] J. C. Simo, P. Wriggers, and R. L. Taylor. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50(2):163 – 180, 1985.
- [354] J.C. Simo and J. Oliver. A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids. *IV*:25–39, 1994.
- [355] J.C. Simo, J. Oliver, and F. Armero. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12(5):277–296, 1993.
- [356] J.C. Simo, J. Oliver, and F. Armero. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12(5):277–296, 1993.

- [357] J.C. Simo and M. Ortiz. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(2):221 – 245, 1985.
- [358] J.C. Simo, R.L. Taylor, and K.S. Pister. Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51(1–3):177 – 208, 1985.
- [359] J. Sobieszczanski. Structural modification by perturbation method. volume 94, pages 2799–2816. ASCE, 1968.
- [360] J. Sobieszczanski-Sobieski and R.T. Haftka. Multidisciplinary aerospace design optimization: survey of recent developments. *Structural optimization*, 14(1):1–23, 1997.
- [361] J. H Song and T. Belytschko. Cracking node method for dynamic fracture with finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(3):360–385, 2009.
- [362] J. H. Song, H. Wang, and T. Belytschko. A comparative study on finite element methods for dynamic fracture. *Computational Mechanics*, 42(2):239–250, 2008.
- [363] Jeong-Hoon Song, Pedro M. A. Areias, and Ted Belytschko. A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(6):868–893, 2006.
- [364] M. Stammberger and H. Voss. Automated multi-level substructuring for a fluid-solid vibration problem. pages 563–570, 2008.
- [365] P. Steinmann and K. Willam. Finite element analysis of elastoplastic discontinuities. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(11):2428–2442, 1994.
- [366] Strouboulis T., Copps K., and Babuska I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(32–33):4081–4193, may 2001.
- [367] N. Sukumar, B. Moran, T. Black, and T. Belytschko. An element-free galerkin method for three-dimensional fracture mechanics. *Computational Mechanics*, 20(1-2):170–175, 1997.
- [368] N. Sukumarn, N. Moes, B. Moran, and T. Belytschko. Extended fnite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(1):1549–1570, 2000.
- [369] G. Suwała and Ł. Jankowski. A model-free method for identification of mass modifications. *Structural Control and Health Monitoring*, 19(2):216–230, 2012.
- [370] K. Svanberg. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2):359–373, 1987.
- [371] The morgan kaufmann series in computer graphics and geometric modeling. In PHILIP J. SCHNEIDER and DAVID H. EBERLY, editors, *Geometric Tools for Computer Graphics*, The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics, pages ii –. Morgan Kaufmann, San Francisco, 2003.

- [372] X. Tan, H. Konietzky, T. Frühwirth, and D. Dan. Brazilian tests on transversely isotropic rocks: Laboratory testing and numerical simulations. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 48(4):1341–1351, 2015.
- [373] R. L. Taylor. A mixed-enhanced formulation tetrahedral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3):205–227, 2000.
- [374] R. L. Taylor and P. Papadopoulos. On a patch test of contact problems in two dimensions. *Nonlinear Computational Mechanics*, 198:690–702, 1991.
- [375] P.S. Theocaris and D.L. Wu. The equivalent through-crack model for the surface part-through crack. *Acta Mechanica*, 59(3-4):157–181, 1986.
- [376] B. H. V. Topping and A. M. A. Kassim. The use and efficiency of the theorems of structural variation for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(10):1901–1920, 1987.
- [377] B.H.V. Topping. Exact and Approximate Static Structural Reanalysis. In G.I.N. Rozvany, editor, *Shape and Layout Optimization of Structural Systems and Optimality Criteria Methods*, volume 325 of *International Centre for Mechanical Sciences*, pages 377–398. Springer Vienna, 1992.
- [378] B. Trunk, G. Schober, A. K. Helbing, and F. H. Wittmann. Fracture mechanics parameters of autoclaved aerated concrete. *Cement and Concrete Research*, 29:855–859, 1999.
- [379] Cervenka V. and Gerstle K. H. Inelastic analysis of reinforced concrete panels, part i: Theory. *IABSE Publications*, 31(II):31 – 45, 1971.
- [380] Cervenka V. and Gerstle K. H. Inelastic analysis of reinforced concrete panels, part ii. *IABSE Publications*, 32(II):25 – 39, 1972.
- [381] G. Ventura, E. Budyn, and T. Belytschko. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(10):1571–1592, 2003.
- [382] R. Vermeer, P.A.; De Borst. Non-associated plasticity for soils, concrete and rock. *Heron*, 29(3), 1984.
- [383] Baisheng W. and Zhengguang L. Approximate reanalysis for modifications of structural layout. *Engineering Structures*, 23(12):1590 – 1596, 2001.
- [384] L. E. Walizer and John F. P. A bounding box search algorithm for DEM simulation. *Computer Physics Communications*, 182(2):281 – 288, 2011.
- [385] F.J. Wang, L. P. Wang, J. G. Cheng, and Z. H. Yao. Contact force algorithm in explicit transient analysis using finite-element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43(6–7):580 – 587, 2007.
- [386] S.Y. Wang, L. Sun, C. Yang, S.Q. Yang, and C.A. Tang. Numerical study on static and dynamic fracture evolution around rock cavities. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 5(4):262 – 276, 2013.
- [387] W. M. Wang, L. J. Sluys, and R. de Borst. Viscoplasticity for instabilities due to strain softening and strain-rate softening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(20):3839–3864, 1997.

- [388] W Weibull. A statistical theory of strength of materials. *Pocc. Royal Swedish Academy of Eng. Sci*, 151:1–45, 1939.
- [389] J.R. Williams and R. O'Connor. Discrete element simulation and the contact problem. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 6:279–304, 1999.
- [390] E. L. Wilson. *Three dimensional static and dynamic analysis of structures : a physical approach with emphasis on earthquake engineering*. Computers and Structures, 2000.
- [391] P Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. J. Wiley & Sons, 2002.
- [392] B. Wu and Z. Li. Static reanalysis of structures with added degrees of freedom. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 22(4):269–281, 2006.
- [393] B.S Wu, C.W Lim, and Z.G Li. A finite element algorithm for reanalysis of structures with added degrees of freedom. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40(13–14):1791 – 1801, 2004.
- [394] C. H. Wu. Fracture under combined loads by maximum-energy-release-rate criterion. *J. Appl. Mech.* 45, 45:553–558, 1978.
- [395] J.-Y. Wu and M. Cervera. On the equivalence between traction- and stress-based approaches for the modeling of localized failure in solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 82:137 – 163, 2015.
- [396] J. Ying Wu, J. Li, and R. Faria. An energy rate-based plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 43:583–612, 2006.
- [397] X.-P. Xu and A. Needleman. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42(9):1397 – 1434, 1994.
- [398] A. H. Barbat y J. Miquel. *Estructuras sometidas a acciones sísmicas: cálculo por ordenador*. CIMNE, 1992.
- [399] X. Yang, S. Chen, and B. Wu. Eigenvalue reanalysis of structures using perturbations and pade approximation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(2):257 – 263, 2001.
- [400] Z. J. Yang, S. H. Chen, and X. M. Wu. A method for modal reanalysis of topological modifications of structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(13):2203–2220, 2006.
- [401] J. Yin, H. Voss, and P. Chen. Improving eigenpairs of automated multilevel substructuring with subspace iterations. *Computers & Structures*, 119(0):115 – 124, 2013.
- [402] Yong Yu, Jianxun Zhang, and Jichun Zhang. A modified brazilian disk tension test. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 46(2):421 – 425, 2009.
- [403] Rui Z. and Kaiping Y. An efficient transient analysis method for linear time-varying structures based on multi-level substructuring method. *Computers Structures*, 146(0):76 – 90, 2015.
- [404] G. Zavarise and L. De Lorenzis. The node-to-segment algorithm for 2d frictionless contact: Classical formulation and special cases. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(41–44):3428–3451, 2009.

- [405] L. Bo Zhang. A Parallel Algorithm for Adaptive Local Refinement of Tetrahedral Meshes Using Bisection. *Tech. Rep. Preprint ICM-05-09, Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing.*, 2005.
- [406] Z. Zhang and J.Z. Zhu. Analysis of the superconvergent patch recovery technique and a posteriori error estimator in the finite element method (ii). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163(1–4):159 – 170, 1998.
- [407] Z. H. Zhong and Larsgunnar N. Lagrange multiplier approach for evaluation of friction in explicit finite-element analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 10(3):249–255, 1994.
- [408] F. Zhou and J. F. Molinari. Dynamic crack propagation with cohesive elements: a methodology to address mesh dependency. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(1):1–24, 2004.
- [409] J.Z. Zhu. A posteriori error estimation—the relationship between different procedures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 150(1–4):411 – 422, 1997. Symposium on Advances in Computational Mechanics.
- [410] J.Z. Zhu and O.C. Zienkiewicz. A posteriori error estimation and three-dimensional automatic mesh generation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25(1–2):167 – 184, 1997. Adaptive Meshing, Part 1.
- [411] Z.H.Zhong. *Finite Element Procedures for Contact Impact Problems*. Oxford University Press, 1986.
- [412] O. C. Zienkiewicz, Maosong Huang, and M. Pastor. Localization problems in plasticity using finite elements with adaptive remeshing. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 19(2):127–148, 1995.
- [413] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2):337–357, 1987.
- [414] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. Adaptivity and mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(4):783–810, 1991.
- [415] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1331–1364, 1992.
- [416] O.C. Zienkiewicz, M. Pastor, and M. Huang. Softening, localization and adaptive remeshing. capture of discontinuous solutions. *Computational Mechanics*, 17(1-2):98–106, 1995.